ISSN 1853-1385

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE
FACULTAD DE INGENIERÍA

INSTITUTO DE MATEMATICA

CIENCIAS BASICAS EN INGENIERIA

REVISTA DIGITAL SEMESTRAL

Nº 10 – AÑO 5 DICIEMBRE DE 2013

ISSN Nº 1853-1385

CIENCIAS BASICAS EN INGENIERIA

Revista Digital del Instituto de Matemática

Publicación Semestral

Director:
Prof. Antonio B. MAHAVE

Consejo Editor:
Dr. Ing. Jorge V. PILAR
Ing. Gustavo DEVINCENZI
Dr. Rubén CERUTTI
Dr. Juan NÁPOLES VALDÉS
Prof. Cdora. Carmen RESCALA
Ing. Emilio GARCIA SOLÁ
Dr. Ing. Mario E. De BÓRTOLI

Instituto de Matemática – Facultad de Ingeniería – U.N.N.E.
Las Heras 727 – Resistencia, Chaco (3500) – Republica Argentina
Director: Antonio Mahave – Facultad de Ingeniería – Las Heras 727
Tel. 03722 – 425064; 420076
e-mail: mahave@ing.unne.edu.ar

INDICE

Normas para la presentación de artículos en la Revista

Comité de Referato

Información sobre el CAIM 2014

GEOMETRIA FRACTAL: ORGANIZACION Y MERCADOS
Rufino Iturriaga, Carina Jovanovich

UNA APROXIMACION AL PROCESO DE GENERALIZACION EN LA SOLUCION DE PROBLEMAS CON DESIGUALDADES
Mauro García Pupo , Juan E Nápoles Valdés, Carlos Cañón Rincón

TECNOLOGIA DE LA MEDICION DEL PODER CALORIFICO DE COMBUSTIBLES SOLIDOS Y LIQUIDOS CON BOMBA CALORIMETRICA DE MAHLER
Leiva Azuaga Agripina, Martina Pablo, Aeberhard M.Raquel, Corace J.José, Mendivil Carlos, Emilio Garcia Solá

SOBRE LA CONSTRUCCION DE REGIONES DE ESTABILIDAD
Luciano Lugo, Juan E Napoles Valdes, Samuel Noya

CIENCIAS BASICAS EN INGENIERIA

Revista Digital del Instituto de Matemática

Publicación Semestral

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE

Rector:
Ing. EDUARDO DEL VALLE

Vicerrectora:
Prof. MARIA D. VEIRAVE

FACULTAD DE INGENIERIA

Decano:
Dr. Ing. JORGE V. PILAR
Vicedecano:
Ing. JOSÉ L. BASTERRA
Secretario Académico:
Ing. ARTURO A. BORFITZ
Sec. De Asuntos Estudiantiles:
Ing. GUSTAVO O. FISCHER
Sec. Administrativo:
Cdor. DANIEL ASULAY
Sec. De Extensión Universitaria
Prof. JUAN JOSE CORACE

INSTITUTO DE MATEMATICA

Director:
Prof. ANTONIO B. MAHAVE

Vicedirectora:
Ing. MARTA GIRAUDO

- RESOLUCION Nº 070/09
RESISTENCIA, 21 ABRIL 2009

VISTO:

El Expte. Nº 27-2008-04196, por el que el Director del Instituto de Matemática solicita la aprobación de las "Normas para las publicaciones en la Revista del Instituto" y acuerdo para la designación de la Comisión de Referato y;

CONSIDERANDO

Que los proyectos elevados por el Director del Instituto, con las modificaciones que oportunamente sugiriera la Comisión de Posgrado de esta Facultad con total acuerdo del primero, se ajustan a las necesidades de organización de las publicaciones periódicas a las que se hace referencia;

Que los antecedentes académicos y científicos de los integrantes propuestos de la Comisión de Referato avalan suficientemente la propuesta;

El Dictamen favorable de la Comisión de Enseñanza e Investigación;

Lo aprobado en Sesión Ordinaria del día de la fecha;

POR ELLO:

EL CONSEJO DIRECTIVO DE LA FACULTAD DE INGENIERIA
R E S U E L V E :

Artículo 1º.- APROBAR las "Normas para la presentación de artículos" para las publicaciones periódicas, Revista del Instituto de Matemática, ISSN 1850-9827 y "Ciencias Básicas en Ingeniería", Revista Digital, actualmente en preparación, que figura en el Anexo I de la presente Resolución.

Artículo 2º.- PRESTAR acuerdo a la designación de los miembros del Comité de Referato, para las publicaciones referidas en el articulo anterior, que figuran como Anexo II de la presente Resolución.

Artículo 3°.- REGÍSTRESE, comuníquese al Instituto de Matemática y cumplido, archívese.-

hjm.-

- RESOLUCION Nº 070/09

\\\...2.-

ANEXO I

NORMAS PARA LA PRESENTACION DE ARTÍCULOS

1) Los artículos se remitirán por correo electrónico al Director de la Revista ó en su defecto por correo postal una copia y CD, a la siguiente dirección:
Revista del Instituto de Matemática – Facultad de Ingeniería – Universidad Nacional del Nordeste.
Las Heras 727 – Resistencia – Chaco
C.P. 3500

La presentación de los trabajos deberá contar con:
a) Identificación del(los) autor(es): Nombre completo, Institución a la que pertenece, localidad, dirección de contacto (incluyendo la electrónica)
Pequeño texto de presentación de los autores (cargos actuales, línea de trabajo, contribuciones al campo de estudio, etc.) (Extensión no mayor a media pagina).
b) Título del artículo; en idioma español.
c) Resumen: Texto breve (de hasta 100 palabras) de descripción de objetivos, métodos y principales resultados y conclusiones. Ha de presentarse en idioma español, pudiendo opcionalmente hacerlo además en los idiomas ingles o portugués.
d) Palabras claves: hasta cinco.
e) Referencias: Se ajustarán a la normativa APA (Manual de publicación, 5º ed, 2001). (http://apastyle.apa.org/)
f) Tablas, imágenes e ilustraciones: Se incluirán en su lugar correspondiente en un formato compatible con su edición en Internet, identificándolas.

2) Los trabajos enviados deberán ser inéditos o con escasa difusión, (informando en este caso que otros mecanismos de divulgación han sido o están siendo utilizados).

3) La recepción de un trabajo no implicará compromiso de esta revista para su publicación.

4) El Comité Editorial procederá a la selección de los trabajos de acuerdo con criterios formales y de contenidos.

5) El envío de un artículo para su publicación, implica la autorización por parte del autor, de la reproducción del mismo por cualquier medio, en cualquier soporte y en el momento en que el Instituto lo considere conveniente, salvo expresa notificación en contrario del autor. En todos los casos la publicación mencionará a su autor(es), y el trabajo no será modificado una vez aprobado.

6) Los trabajos se aceptarán en formato WORD 97-2003, WORD 2007

7) Los artículos tendrán una extensión de hasta diez (10) páginas, incluidos las tablas, las figuras y los anexos. Como excepción la Revista podrá publicar algún trabajo de mayor extensión. Los trabajos deberán estar escrito con formato en fuente Times New Roman, tamaño 12 puntos para el cuerpo y 14 en mayúscula negrita para los títulos, interlineado simple, alineación justificado y en hoja tamaño DIN A4. Los márgenes inferior, superior, izquierdo y derecho serán de 3 cm. Todas las páginas deberán estar numeradas en el ángulo inferior derecho. No deberá contener encabezados ni pies de páginas.

8) Deberá indicarse el tratamiento de texto utilizado y si incluye símbolos, tablas o gráficos, se especificará el programa de diseño empleado.

9) Los artículos enviados para ser publicados serán evaluados en una primera instancia por el Director con los miembros del Comité Editorial, el que podrá rechazarlo; en caso de aceptación previa, enviará el artículo a evaluación externa (Miembros del Comité de Referato). A partir de los informes obtenidos decidirá sobre la publicación del trabajo, la información al autor de las observaciones planteadas por los revisores a los efectos de que considere posibles modificaciones; o su no publicación. En cualquier caso, se informará lo antes posible a los autores, particularmente en el caso de rechazo (y eventualmente, acompañando sugerencias para su posible publicación).

COMITÉ DE REFERATO

Publicaciones periódicas permanentes

Dr. Iran Abreu Mendes - Universidade Federal do Rio Grande do Norte y Universidade Federal do Pará, Brasil.

Dr. Rubén Cerutti - Facultad de Ciencias Exactas Naturales y Agrimensura. UNNE

Dr. Ing. Mario De Bortoli. - Facultad de Ingeniería. UNNE.

Ing. Emilio García Solá - Facultad de Ingeniería. UNNE

Lic. Liliana Koegel - Facultad de Ciencias Económicas. Universidad Nacional de Rosario.

Dra. Luisa Lazzari - Facultad de Ciencias Económicas. Universidad de Bs. As.

Lic. Mgter. Blanca Lezana - Universidad Nacional de Tucumán

Ing. Victor Martinez Luaces - Universidad de la Republica del Uruguay

Dr. Juan Eduardo Nápoles Valdes - Universidad Nacional del Nordeste y Universidad Tecnológica Nacional.

Dr. Ing. Mario Bruno Natalini. - Facultad de Ingeniería. UNNE

Dra. Claudia Lisete Oliveira Groenwald - Universidade Luterana do Brasil, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Campus Canoas.

Dr. Ing. Jorge Víctor Pilar - Facultad de Ingeniería. UNNE

Dr. Ing. Adrian R. Wittwer - Facultad de Ingeniería. UNNE

Ing. Gustavo H. Devincenzi - Facultad de Ingeniería. UNNE

Prof. Mgter Viviana Yaccuzzi Polisena – Universidad Nacional del Nordeste

Lic. Jorge Enrique Sagula – Universidad Nacional de Lujan

Mgter Gloria Santa Nuñez – Universidad Nacional del Nordeste

Facultad de Ingeniería, Sede y Coorganizadora del IV CAIM

"Tal como se viene realizando desde el 24 septiembre del año 2012, fecha en la cual nuestra Facultad recibió la grata noticia de haber sido seleccionada como sede y coorganizadora del IV Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica, tras haber presentado un ambicioso plan para su organización y siendo este convalidado por el Foro Docente del Área Mecánica de las Ingenierías (FoDAMI); continúan los trabajos para lanzar en pocos días la Inscripción Oficial y comenzar la gestión de envíos de resúmenes por parte de los participantes". Estas fueron las expresiones del Presidente del Comité Organizador y Vicedecano de nuestra Facultad, Ing. José L. Basterra, quien además destacó que el objetivo no solo radica en la gestión de realización del Congreso, sino también en continuar nutriendo a nuestra Universidad de prestigios que resultan de este tipo de eventos, haciendo énfasis no solo en el Contenido Académico, sino también en la parte organizativa, pues deseamos sentar precedentes innovando en varios aspectos que hacen a la organización del evento.

Por otro lado, el Presidente del Comité Organizador, destacó la importancia de los Congresos anteriores, con participaciones de Académicos, Investigadores, Estudiantes, Profesionales e Industriales de todo el País y del exterior con participación en las diversas Áreas Temáticas que abarca el Congreso, planteando así la gran expectativa que genera el IV CAIM.

Áreas Temáticas

Para entender la amplitud de los temas relacionados directamente y con otros campos disciplinares vinculados a la enseñanza de la mecánica en las Ingenierías, el **FoDAMI** ha incorporado las Áreas Temáticas que fundamentan al Congreso, expresándolas como:

- A- Enseñanza
- B- Mecatrónica y Automatización
- C- Energía y Medio Ambiente
- D- Diseño y Proyecto de Componentes y Máquinas
- E- Fabricación
- F- Explotación y Mantenimiento de Máquinas
- G- Sistemas Térmicos e Hidráulicos
- H- Materiales
- I- Simulaciones Numéricas y Mecánica Computacional
- J- Misceláneas

Acerca del Foro Docente del Área Mecánica de las Ingenierías (FoDAMI)

El Foro Docente Área Mecánica de las Ingenierías, FoDAMI, en su origen: Foro de Consulta y Perfeccionamiento Docente del Área Mecánica de las Ingenierías, Asociación Civil de bien Público sin fines de lucro, con personería jurídica tuvo su acto fundacional el día 28 de Octubre del año 2000, en la sede de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Lomas de Zamora.

Su creación resultó a partir de la inquietud de un conjunto de docentes universitarios, incorporados a las cátedras de Mecanismos, Elementos de Máquinas y Proyecto Mecánico de las Carreras de Ingeniería de las Universidades Argentinas.

La idea germinal surgió del objetivo común de este grupo inicial de docentes de intercambiar experiencias, consensuar contenidos, análisis de bibliografía, metodologías de enseñanza, compartir material didáctico, investigaciones y conocimientos personales

Los propósitos que sustentaron la convocatoria original evolucionaron hacia la consolidación de objetivos específicos, que fueron enriquecidos a través de las actividades desarrolladas durante su vigencia, desde ese histórico día hasta la fecha, y su crecimiento ha llevado a transformarse en una Asociación Civil de bien Público sin fines de lucro, con personería jurídica.

Sus actividades se componen de dos Reuniones académicas y científicas por año; Reuniones de Comisión Directiva y, especialmente en la realización del Congreso Argentino de Ingeniería mecánica CAIM cada dos años.

Todas estas actividades se desarrollan en distintas Universidades de nuestro país, que contemplen la carrera de Ingeniería mecánica o afín, fortaleciendo el concepto federal de la Asociación.

Gracias a la participación y el protagonismo de cada vez más docentes, que se incorporan al Foro, se han creado Áreas temáticas relacionadas con otros campos disciplinares vinculados a la enseñanza de la mecánica en las Ingenierías.

Canales de Comunicación IV CAIM

Para consultas, hemos dispuesto de los siguientes canales;
Las 24 hs. a través de:
E-mail: caim2014@ing.unne.edu.ar
Telefónicamente en los horarios de 7:30 a 12:30 y de 15:00 a 21:00 hs:
Secretaría de Extensión Universitaria Facultad de Ingeniería:
E-mail: extension@ing.unne.edu.ar
Tel. 0362-4420076 Int. 118
Vicedecanato Facultad de Ingeniería:
Tel. 0362-4420076 Int. 109
Manténgase informado sobre las novedades del IV CAIM 2014,
Página Oficial: http://caim2014.unne.edu.ar
Facebook: http://www.facebook.com/caim2014
Twitter: @Caim_2014

GEOMETRÍA FRACTAL: ORGANIZACIONES Y MERCADOS.

Rufino Iturriaga

Ethel Carina Jovanovich

Recibido: 16 de octubre 2013

Aceptado: 03 de diciembre de 2013

GEOMETRÍA FRACTAL: ORGANIZACIONES Y MERCADOS.

Rufino Iturriaga[1]

Ethel Carina Jovanovich[2]

RESUMEN

En muchos casos el ámbito empresarial ha decidido apartarse de los modelos convencionales, que se tornan muy complejos, en busca de organizaciones que, además de sencillez, representen un modelo en el cual sean respetados el factor humano y sus objetivos. En los mercados, en más de una ocasión, se han hecho estudios que buscan predecir los vaivenes de los índices.

Este trabajo busca realizar un análisis sobre las posibilidades de obtener resultados aplicables a partir de la geometría fractal en temas económicos, como la administración y los movimientos bursátiles, considerando investigaciones que estudiosos del área aportaron. Se encuentra destinado a personas con conceptos mínimos sobre tales cuestiones y fractales, de los cuales se hace una sencilla introducción.

Palabras clave: Fractales – Compañías – Mercados - Administración.

INTRODUCCIÓN

Es sabido que la geometría fractal, caracterizada por la irregularidad de las magnitudes y descripta por algoritmos recursivos, ha avanzado significativamente en las últimas décadas, encontrando aplicaciones en muy variados ámbitos.

El término fractal es un vocablo derivado del latín, "*fractus*", que significa quebrado o fracturado y se lo utiliza para designar a objetos semigeométricos cuya estructura básica se repite a diferentes escalas.

No existe una definición universalmente aceptada de fractales, lo cual establece una referencia de lo complicado que resulta encontrar una definición rigurosa para los mismos, sin embargo en cualquier intento de establecer una, hay dos propiedades a considerar de manera ineludible: la autosimilitud y la dimensión extraña.

El término autosimilitud puede entenderse también como autosemejanza y está relacionado a la propiedad de un objeto de presentar en sus partes la misma forma o estructura que el todo, aunque pueden presentarse a diferentes escalas y estar ligeramente deformadas. Resulta acertado hablar de tres tipos diferentes de autosimilitud:

- Autosimilitud exacta: el más rígido y restrictivo. Exige que el fractal parezca idéntico a diferentes escalas (sistemas de funciones iteradas). Ej: conjunto de Cantor, triángulo de Sierpinski, copo de nieve de Von Koch y otros. (Figura 1)
- Cuasi-autosimilitud: agrupa a los que parecen aproximadamente idénticos a diferentes escalas (fractales definidos por relaciones de recurrencia). Ej: conjunto de Julia, conjunto de Mandelbrot y otros. (Figura 2)
- Autosimilitud estadística: es el tipo más débil y vincula a los fractales que tienen medidas numéricas o estadísticas que se preservan con el cambio de escala (fractales aleatorios). Ej: el vuelo de Levy, árboles brownianos y otros. (Figura 3) Dentro de este tipo se suman los polvos

[1] Rufino Iturriaga – UNNE, Resistencia, Argentina - rufinoit@yahoo.com.ar

[2] Ethel Carina Jovanovich – UNNE, UTN-FRRe, Resistencia, Argentina - carijovanovich@yahoo.com.ar

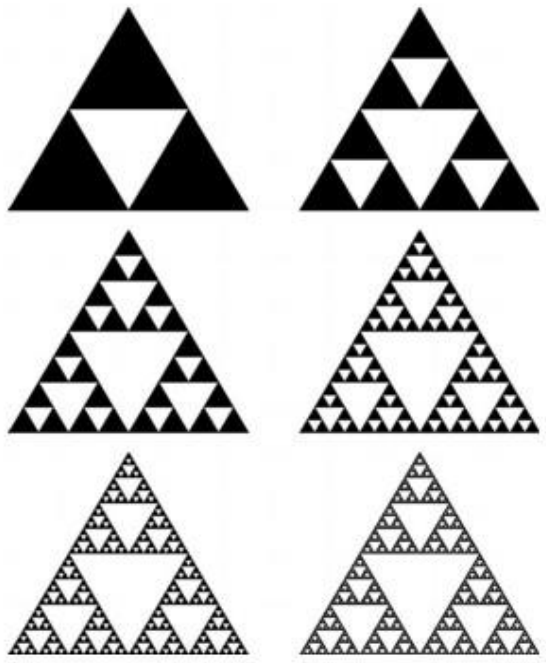


Figura 1: Triángulo de Sierpinski
Fuente: http://cuentos-cuanticos.com

fractales aleatorios (ha sido propuesto un fractal aleatorio obtenido por coagulación al azar, para describir la distribución no regular de los astros en el espacio).

Se sabe que la dimensión del punto es igual a 0, que una línea tiene dimensión 1, que las figuras planas tienen dimensión 2 y que las espaciales tienen dimensión 3. Los mencionados valores corresponden a números enteros, invariantes ante homeomorfismos y se los conoce con el nombre de dimensión topológica[3] y refiere precisamente al concepto habitual de dimensión que se tiene incorporado a partir de la matemática convencional.

Desde luego, la dimensión topológica no es la única que existe. Un cuadrado, por ejemplo, se puede descomponer o dividir en cuatro cuadrados congruentes, iguales entre sí y decir que existe un factor de ampliación 2, o también, se puede dividir en nueve cuadrados y establecer que tiene un factor de ampliación 3. Es acertado establecer de manera general, que un cuadrado se puede descomponer en n^2 copias de si mismo, o de manera análoga que un cubo puede descomponerse en n^3 copias de si mismo.

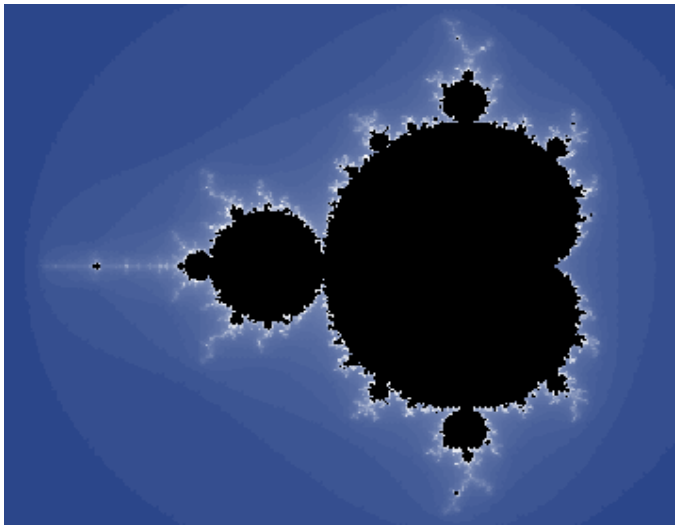


Figura 2: Conjunto de Mandelbrot
Fuente: http://sabia.tic.udc.es/gc/Contenidos%20adicionales/trabajos/Imagenyvideo/fractales/juliamandelbrot.htm

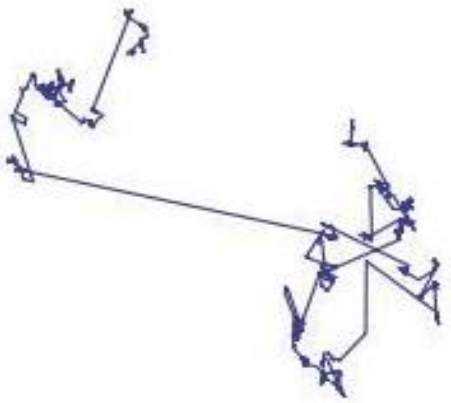


Figura 3: El vuelo de Levy.
Fuente: http://gredossandiego.net/ blogs/ alcala/index.php/matematicas

De manera que se puede generalizar en la fórmula: $n^D = N$
en la que n: factor de ampliación; N: el número de copias; D: dimensión.

[3] Recuérdese que, si *x* e *y* son espacios topológicos y *f* una función de x a y, *f* será un homeomorfismo cuando se cumpla que f sea biyectiva, f sea continua y la inversa de f sea continua.

Si se aplican propiedades de logaritmos, se obtendrá: $D = \frac{ln\, N}{ln\, n}$

La cual se conoce como dimensión fractal y que corresponde a una simplificación del concepto de dimensión que utilizó Haussdorf [4].

En algún momento, las autoridades españolas tenían una estimación de la longitud del límite con Portugal de 987km, mientras que desde Portugal estimaban la longitud de la misma frontera en 1214km. Una cuestión similar ocurrió en el límite entre Bélgica y Holanda, ya que los primeros calculaban la longitud en 449km mientras que los holandeses afirmaban que era de 380km. Ante estás situaciones es lógica la pregunta: ¿cuál es la longitud real? Una representación gráfica de la situación ayudaría a la solución de la cuestión, sabiendo de antemano que la longitud medida aumenta cuanto más corta es la regla utilizada. Benoit Mandelbrot [5], a quien se considera el padre de la geometría fractal, ha establecido un muy ilustrativo ejemplo en un relato sobre un científico a quien se le encomienda medir la costa de Gran Bretaña [6]. Resulta que la costa británica tiene una dimensión fractal que se encuentra alrededor de 1,25 (una costa escabrosa tiene una dimensión superior a una recta unidimensional dado que es más intricada) mientras que la costa sudafricana, que es muy suave, tiene una dimensión fractal apenas superior a la unidad (1,02). ¿Es acertado decir o establecer que a partir de la dimensión fractal se tiene una idea de la escabrosidad de una costa o del recorrido de un río en su cauce? Seguramente que sí, piénsese en la etimología de la palabra fractal, cuanta más quebrada sea la costa mayor será el número de su dimensión.

Benoit Mandelbrot define a los fractales como "conjuntos cuya dimensión de Haussdorf es estrictamente mayor que su dimensión topológica". Justamente Mandelbrot fue el que introdujo el término "fractal"; si bien su definición es ampliamente aceptada, el mismo autor estableció que no resulta lo suficientemente amplia. Con anterioridad, en su obra Los Objetos Fractales (1975) Mandelbrot aportó la siguiente definición: "Fractales es el conjunto de

---

[4] Felix Hausdorff (1868-1942): matemático de origen judío, profesor en Universidad de Bonn y uno de los responsables de la fundación de la topología moderna, célebre por su trabajo en el análisis funcional y la teoría de los conjuntos. En 1918 introdujo la dimensión de Hausdorff que se utiliza para medir las dimensiones fraccionarias de los conjuntos fractales. En 1942, a punto de ser enviado a un campo de concentración nazi, se suicidó junto a su esposa. El día anterior, Hausdorff escribió a un amigo: "Perdónanos. Te deseamos a ti y a todos nuestros amigos mejores tiempos" Muchos de los enfoques utilizados para calcular la dimensión de Hausdorff en relación con conjuntos complicados, fueron formulados por el matemático ruso Abram Besicovitch (1891-1970), por lo cual a veces se utiliza el término "dimensión de Hausdorff-Besicovitch"

[5] Benoit Mandelbrot nació en 1924 en Varsovia, Polonia, en el seno de una familia judía y fue educado bajo la tutela de su tío, Szolem Mandelbrot, reconocido profesor de Matemática en el Colegio de Francia, el mismo que le recomendó que leyera la tesis de doctorado que Gaston Julia (1883-1978) había publicado en 1918 sobre iteración de funciones racionales. En 1977, durante su trabajo en el Laboratorio de IBM de Yorktown Heigths, New York, Mandelbrot pudo demostrar como el trabajo de Julia constituye la fuente de los fractales más hermosos conocidos hasta el momento. En 1982 publicó su libro *Fractal Geometry of Nature*, en el que explicaba sus investigaciones en este campo. Entre 1985 y 1991 recibió numerosas distinciones, entre las que se destacan el premio *Barnard Medal for Meritorious Service to Science*, la *Franklin Medal*, el premio *Alexander von Humboldt*, la *Medalla Steindal* y la *Medalla Nevada*. En el año 2004 su obra *Fractales y Finanzas* fue elegida como mejor libro de economía del año por la versión alemana del Financial Times. Fue profesor en la Universidad de Harvard, Yale, el Colegio Albert Einstein de Medicina y otros. Falleció en octubre de 2010 en Cambridge, Massachusetts, Estados Unidos.

[6] El mencionado ejemplo fue expuesto originalmente en su trabajo "How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension", Science: 156, 1967, 636-638.

formas que, generadas normalmente por un proceso de repetición, se caracterizan por poseer detalle a toda escala, por tener longitud infinita, por no ser diferenciables y por poseer dimensión fraccional. Los fractales son resultado de la repetición al infinito de los patrones geométricos que se superponen de forma indefinida"

Como generalidad se acuerda en no definir un fractal, aunque es posible enumerar sus propiedades características:

- Los fractales son demasiado irregulares para ser descriptos con la geometría tradicional de Euclides.
- Los fractales tienen una cierta forma de auto-semejanza, quizás aproximada o estadística.
- Por lo general, la dimensión fractal es mayor que la dimensión topológica.
- En muchos casos, el fractal se define en forma muy simple, por lo general, recursiva.

Todos los fractales tienen algo en común, ya que todos son el producto de la iteración, repetición, de un proceso geométrico elemental que da lugar a una estructura final de una complicación aparentemente extraordinaria, basta con observar nuevamente la figura 1, el triángulo de Sierpinski, para llegar a la misma conclusión.

Se considera pertinente y esclarecedor desde el punto de vista del concepto, establecer que la geometría fractal es una "*geometría recursiva basada en la repetición, a diferentes escalas, de elementos geométricos simples"* sin que ello sea una definición precisa.

LOS FRACTALES, LAS ORANIZACIONES y LA ADMINISTRACIÓN

A principios de los años '90 Hans Jüergen Warnecke, presidente de la entidad alemana Fraunhofer-Instituts für Produktionstechnik und Automatisierung (IPA), utilizó el término de "Fábrica Fractal" con el objetivo de desarrollar empresas a partir de la idea de que las compañías son como organismos vivos con potencial de crecimiento y adaptación. El concepto de Fábrica Fractal tiene su origen en la geometría fractal y uno de sus objetivos primarios es la reducción de la complejidad de la compañía. A partir de la Fábrica Fractal, Wernecke pretende dar una respuesta adecuada a las filosofías de dirección de empresas americanas y japonesas, ajustándose a las necesidades del ambiente europeo.

Se ha establecido que un fractal contiene un elemento esencial, que se repite en la estructura entera, la que presenta la misma apariencia en cualquier sector. Esta misma idea mantiene el funcionamiento eficaz de la compañía y es considerada como modelo de empresa moderna.

La compañía fractal se define como un grupo de entidades autónomas que comparten conocimientos y recursos y colaboran para crear productos y servicios. La mencionada colaboración aumenta al máximo las capacidades y permite, a cada entidad, comprender sus metas específicas, proporcionando las soluciones globales a las necesidades de sus clientes. En la fábrica fractal debe fomentarse la comunicación abierta y la implementación de sistemas feedback[7] y de circuitos para la motivación de la comunicación, en tanto que las estructuras rígidas vectoriales y matriciales se sustituyen por redes flexibles.

La "Fábrica Fractal" mantiene las características de un fractal tal cual se han visto, incluyendo auto-similitud, auto-organización y la auto-optimización.

Auto-similitud: es una característica intrínseca de un fractal (se hizo alusión a la propiedad en la introducción). Cada unidad de la organización puede considerarse un fractal, el cual se sabe, puede considerarse parte de otro fractal superior o puede contener subsistemas con

[7] Los sistemas feedback son sistemas de lazo cerrado o con retroalimentación en los cuales las tomas de decisiones no dependen solamente de la entrada sino también de la salida.

idénticas propiedades o de la misma estructura. Cada fractal puede describirse con el mismo juego de atributos que del conjunto, es decir, los elementos y propiedades, relaciones, metas y logros.

Auto-organización: las empresas u organismos que conforman una red de fractales poseen algún grado de libertad para actuar y tomar decisiones, en busca de cumplir con los parámetros de crecimiento. Ellos pueden ocuparse de los recursos para producir bienes y servicios en procura de lograr las metas y estar de acuerdo con la atención de la demanda. Tienen capacidad de adaptarse rápidamente a su ambiente y al proceso de mercado que fluyen. En una compañía fractal la meta es constantemente cambiante y es cumplida mediante una relación de cooperación.

Auto-optimización: los requerimientos constantes a cambios y modificaciones plantean el absurdo de establecer estructuras fijas. Los equipos, los empleados o empresas que integran la red, entran en un proceso de mejora continua, para alcanzar una decisión óptima, disminuyendo tiempos de operaciones, sujeto a su propia iniciativa y autoridad. Esto puede lograrse ajustando la estructura fractal. Además de las características anteriores, hay una necesidad de que la fábrica fractal funcione como un todo coherente. Esto es logrado a través de un proceso de participación y coordinación entre fractales. De hecho, los fractales siempre se estructuran construyendo un nivel más alto. Las unidades del nivel más alto asumen sólo las responsabilidades que no puede cumplir el nivel más bajo, utilizando la información de una manera flexible y eficaz.

De una manera análoga a la Fábrica Fractal se desarrollaron nuevos conceptos para la organización estructural de oficinas, surgiendo de esa manera la Oficina Fractal, concepto que trabaja sobre la configuración de la estructura de la oficina, las técnicas de información y comunicación, la organización y el potencial del personal (los puntos más importantes a considerar son la flexibilidad y variabilidad en la configuración de los espacios y puestos de trabajo, la individualización de las situaciones de trabajo, la alta flexibilidad para configurar los tiempos de trabajo, vitalidad y movilidad en las formas de pensamiento)

Actualmente las empresas son consideradas como parte de sus mercados. Desde que se fragmentan los mercados cada vez más y la individualización de los consumidores va en aumento, las compañías necesitan considerarse como una parte integrante de los mercados para conocer los problemas y deseos de sus clientes. Un acercamiento a esta cuestión sería disponer de una apropiada organización de la compañía que responda rápida y coherentemente con la velocidad del cambio ambiental y puede ser útil repetir el mismo procedimiento de iteración que sucede en la naturaleza.

Diferentes autores y analistas han realizado trabajos e investigaciones de los cuales se pueden extraer criterios y puntos del enfoque fractal en cuestiones administrativas:

- Los trabajadores y las divisiones estructurales no son tratados como partes simples cual se hacía en las administraciones convencionales, sino que se los considera de una manera integral, de modo que objetivos, políticas y capacidades de las divisiones se refleje en el comportamiento de los trabajadores y la conducta de la compañía. De esta forma, los individuos deciden, realizan sus propios deberes y toman conciencia de objetivos, políticas y capacidades de la compañía.
- En el proceso de planeamiento, este criterio puede ser repetido en forma similar. Si los cambios redundan en resultados favorables, servirán de prototipos para nuevas reglas, ejemplo que se propagará en todos los niveles provocando un cambio en la compañía hacia una mayor competitividad y rápida adaptación al medio ambiente.

- Fomentar el sentido de cooperación de los trabajadores es común en sistemas complejos y origina mayor conexión entre el personal de la empresa. Esto implica que la confianza y la solidaridad en los trabajadores y divisiones pueden ser bases sólidas en la administración.
- Como los sistemas vivos, las empresas logran evolucionar en altos niveles de estructuras fractales. Las organizaciones pueden aumentar la creatividad y diversidad que permitan desarrollarse a sistemas complejos más elevados mediante adaptaciones a los cambios en el medio ambiente.
- Los procesos administrativos son sistemas abiertos, dinámicos y evolutivos, basados en iteraciones e interacciones entre sus miembros y entre miembros con el entorno, esto favorece a las estructuras fractales para que reflejen una dinámica de retroalimentación positiva. Pequeñas variaciones provocan mejores niveles de actividad y buenos resultados como antecedente para nuevos cambios: todo esto en un proceso de retroalimentación. Es el llamado círculo virtuoso del desarrollo de empresas. Por consiguiente, la administración puede ser entendida como un proceso en evolución mediante auto-organización y adaptaciones.

Las estructuras fractales emergen por la repetición de prototipos simples de reglas desde el nivel más bajo hasta el más alto. Los prototipos iniciales de las reglas, por ejemplo los objetivos y la política de la compañía, pueden proporcionarse por los ejecutivos y ser entendidos en los niveles más bajos de la organización. Los cambios acertados sobrevivirán y formarán un nuevo prototipo de reglas. Este nuevo prototipo se propagará desde la base hasta los niveles más elevados y cambiará a toda la compañía, haciéndola más competitiva y adaptable al ambiente que cambia rápidamente.

En años recientes han aparecidos trabajos que se encuentran muy desarrollados sobre modelos fractales que se aplican a la organización empresarial. Algunos autores sostienen que el clásico modelo taylorista presenta una paradoja al pretender dirigir a las personas negándole su condición humana, es decir tratándolo como una máquina en los tiempos de trabajo, excluyendo las emociones y los sentimientos propios de los humanos, cuestiones que son consideradas como nocivas o contraproducentes, es decir distorsionadores de la realidad objetiva.

Michel Henric Coll[8] establece: *"El paradigma en el que se centran muchos conceptos organizacionales y de gestión aportados por estas teorías está anclado en un modelo mecanicista que tiene sus raíces en el siglo de la "Ilustración" y en la visión que se tenía del universo como algo estático, repetitivo, previsible y lineal"*. Al mismo tiempo traza una comparación del modelo convencional taylorista con la organización fractal que él propone, no solamente aparecerán diferencias, sino oposición total en varios de sus aspectos. También establece comparaciones del modelo fractal con las organizaciones sistémica y holística. Tomar conciencia de estas oposiciones es fundamental para entender porqué el modelo fractal constituye una innovación real y un concepto diametralmente opuesto.

El modelo propuesto por M. Henric Coll sostiene como pilares para el desarrollo y la concreción de las metas en el sistema la Autonomía, el Sentido y la Reciprocidad ya que de la mutua colaboración surgen las sinergias.

---

[8] Michel Henric Coll es socio fundador y actual director general de FractalTeams®. Es experto en el campo de la organización y sistemas de management del personal. Creador del modelo de Organización Fractal, alternativo a los modelos tayloristas. Es además autor de los libros "Introducción a FractalTeams®. Una organización empresarial para el siglo XXI" y "Las Falacias del Tecnomanagement. La verdadera crisis está en la dirección del personal". También se desempeña como profesor colaborador en las Universidad Politécnica de Valencia, Universidad de Alicante, Cámara de Comercio de Castellón y otras instituciones.

La Autonomía alude a la distribución de la información, la cual no se destina a la alimentación de un poder centralizado, sino a lograr que los diferentes niveles se autorregulen. Las decisiones se ven devueltas a quienes tienen que aplicarlas. La autonomía responde básicamente a dos factores, uno es que las personas puedan sentirse parte de la compañía, mediante la aplicación de sus conocimientos, su formación y su preparación; la segunda alude a la imperiosa necesidad de que el sistema no se vuelva cada vez más complejo a medida que, justamente su complejidad tiende a ir en aumento.

El Sentido hace referencia a las metas y propósitos que motiva a las personas cuando ellas ven cumplidos sus necesidades básicas, manteniendo la noción del sentido de la vida propia y su importancia.

La Reciprocidad que es una carencia del modelo actual, se asocia a los beneficios de la empresa, ya que los modelos imperantes están pensados en base a beneficios exclusivos. Este punto sin duda tiene un vínculo directo con el Sentido.

De esta manera se contraponen al centralismo en la fluidez informativa, la fragmentación de tareas y el individualismo en el desarrollo planteado por los sistemas tayloristas.

FRACTALES Y MOVIMIENTOS BURSÁTILES

> *"Érase una vez un país conocido con el nombre de tierra de los 10000 lagos. El primero y más grande de estos lagos era un verdadero mar, de 1600 millas de diámetro. El segundo más grande tenía 919 millas de diámetro, el tercero 614 y así hasta el último y más pequeño, que solamente tenía un diámetro de una milla. Un matemático contratado por el gobierno, amante del reino de la inferencia y el valor probable, advirtió que los diámetros disminuían según una ley potencial.*
>
> *"En este país se situaban las tierras brumosas, un territorio en gran parte deshabitado que se encontraba envuelto en brumas y nieblas a través de las cuales apenas podía verse hasta una milla de distancia. Como se decidió trazar la cartografía del lugar, llegaron agrimensores y cartógrafos, los cuales pronto se encontraron con un lago. No podían ver la otra orilla, por lo cual, antes de embarcarse en busca del otro extremo ¿deberían llevar provisiones para cuánto tiempo? Decidieron basarse en que la nueva tierra no era diferente de la que ellos habitaban y por tanto seguían una distribución similar. Aventuraron que les esperaban lagos cuyos diámetros eran de más de una milla y de cinco en promedio.*
>
> *"Remaron y remaron pero la orilla no se veía; decidieron recalcular y sus cálculos sugirieron nuevamente cinco millas, pero pasadas las mismas siguieron sin encontrar la costa, lo cual los llevó a la desesperación, ¿emprendieron una travesía a través de un océano y sin provisiones suficientes o acaso había espíritus en la niebla que cambiaban la orilla de lugar?"* [9]

La historia resulta un poco rara, sin embargo puede asociarse a las situaciones que agentes de bolsa enfrentan a diario en su trabajo. Si se ha navegado veinte millas, ¿lo correcto es seguir adelante durante otras veinte millas? En algún momento se llegará a tierra, pero ¿cuál será ese momento?

Un fractal es un patrón cuyas partes evocan un todo, propiedad que se puede notar por medio de la observación directa de algunos elementos cuales las curvas de Koch; lo mismo ocurre con los frondes de los helechos (un fronde está compuesto por otros frondes), así es el

[9] Extraída de la obra de Benoit Mandelbrot, "Fractales y Finanzas" cap 12 "Las Diez Herejías Financieras"

método de la naturaleza. Los fractales aplicados a las finanzas, conocidos también como fractales financieros, pueden imitar ese comportamiento. La construcción de un fractal financiero comienza con el trazado de la diagonal de un rectángulo, que, como tiene pendiente positiva, asegura ganancias independientemente de la fluctuación de precios (de manera análoga, si se busca modelar una caída de valores se partirá del trazado de una pendiente negativa). El paso siguiente será el trazado del zig-zag generador, a partir del cual se comienza a gestar el indicador (figura 4). Para el resultado final resulta muy importante el punto donde se produce el corte y la frecuencia del mismo.

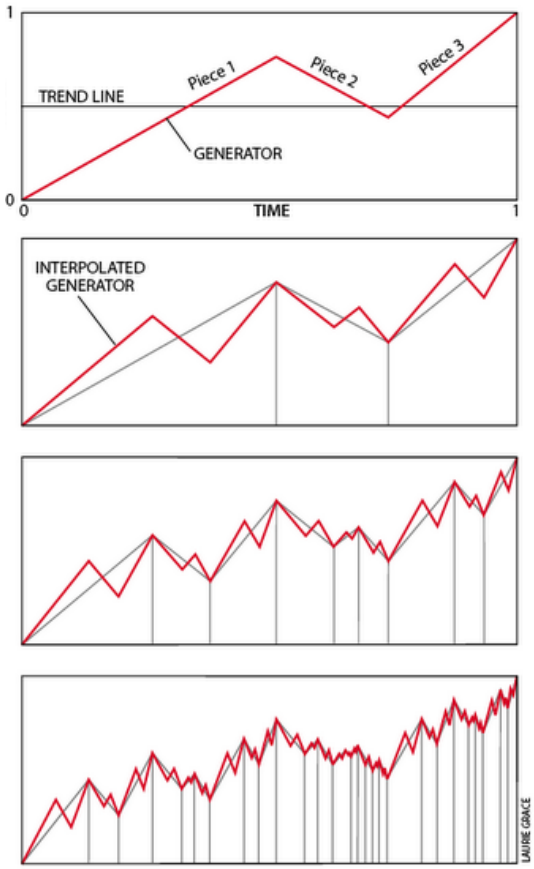


Figura 4: Fractal financiero.
Fuente: http://alexoutput.blogspot.com.ar/

Es muy lógico hablar de la importancia que representaría para las personas que invierten dinero, poder predecir las tendencias del mercado y más interesante aún, conocer con antelación el precio de cotización de las acciones. En los precios de los productos se pueden ver dos componentes: una de largo alcance, en el que los precios se regirían por fuerzas económicas profundas como la apertura de rutas comerciales, inventos que utilizarán el producto, una guerra, alguna innovación tecnológica que modificará el uso del producto, una revolución, etc. Esta tendencia a largo alcance quedaría claramente determinada. La otra componente del precio es de corto alcance: los precios variarían al azar, debido a un amplio número de causas, muchas de las cuales no se podrían determinar con precisión. Estas fluctuaciones son transitorias y se ha comprobado que casi no hay relación entre los ritmos de largo y de corto alcance.

Dentro de los múltiples estudios efectuados por Benoit Mandelbrot se encuentra el realizado sobre el precio de cotización del algodón. Debido a que la dinámica de los precios no es lineal, detectó que las curvas del movimiento diario, mensual y anual son similares en sus formas, con lo cual se puede llegar a notar alguna ventaja o facilidad en la predicción de precios a futuro. El estudioso publicó la analogía que la simulación de rachas de vientos tenía con la volatilidad del precio del algodón en la sucesión de los meses y estaciones, observación que resultó clave y lo llevó a subrayar que las técnicas matemáticas elaboradas para el tratamiento de turbulencias eran también aplicables a la economía. Justamente el autor de "El Misterio del Algodón" habla tras su estudio del extraño vínculo entre las diferentes ramas de la economía y entre la propia economía y la naturaleza.

Los estudios de Mandelbrot incluyen la construcción de multifractales. Justamente a partir de ellos procede a la deformación del tiempo reloj para llevarlo a un tiempo mercantil[10] único y a partir de ellos generar un gráfico de precios, surgió de esa manera el cubo fractal mercantil

[10] El tiempo mercantil es una escala temporal que surge como una deformación del tiempo de reloj por medio de un proceso matemático conocido como cascada multiplicativa que es un proceso fractal que conlleva numerosas multiplicaciones repetidas, de allí que se diga que el tiempo mercantil tiene una naturaleza multifractal

(figura 5). También es posible, partir de un gráfico de precios normal y descomponerlo en sus dos primitivos; ello sin duda ayudaría a encontrar un modelo de mercado que permita la evaluación de riesgos, el análisis de riesgos o la prevención de ruinas.

Se dijo antes que un fractal es un objeto cuyas partes evocan un todo, solamente que a menor escala. Un multifractal tiene, en cambio, más de una razón de escala en el mismo objeto, lo cual permite establecer que partes del objeto pueden variar de manera rápida y otras partes de manera lenta. Mandelbrot sentenció que un fractal es un objeto que se encuentra definido en blanco y negro: los puntos que pertenecen al conjunto fractal se muestran en negro, mientras que el resto quedará en blanco. Un multifractal corresponde al siguiente nivel: objetos que incluyen escalas en grises. Como el mundo no es solamente blanco o negro, los multifractales se acercan más al funcionamiento real de la naturaleza en muchos aspectos.

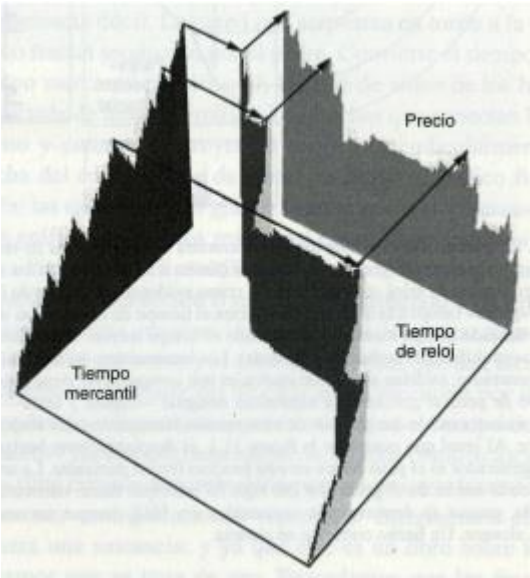


Figura 5: Cubo Fractal Mercantil.
Fuente: Benoit Mandelbrot - Richard Hudson (2006), *Fractales y Finanzas.* Barcelona (España). Editorial Tusquets, pág 224.

Una idea diferente de la aplicación de los fractales al tema que se trata, surgió de estudiosos de la Universidad de Yale. Utilizando el registro de las fluctuaciones de una acción individual para ejecutar un proceso fractal repetitivo, se logra la denominada "huella dactilar fractal", por ejemplo el uso de las variaciones de precio de una acción, a partir de la cual se obtiene una representación gráfica de la cotización variable de cada título. Originalmente se hicieron comparaciones a partir de una acción de valor estable y otra de tinte más arriesgado, confirmando la técnica que las acciones muestran comportamientos diferentes, sin embargo la profundidad y amplitud de los estudios son insuficientes para considerarla como una herramienta de análisis financiero.

Edgard Peters de PanAgora Asset Management, Inc. es autor de dos importantes libros que tratan el tema del análisis fractal en el mercado bursátil. Su obra contribuyó al nuevo impulso de la investigación. A mediados de los '90 reportó un sistema de la variación H[11] en función del tipo de activo, según el cual, las acciones de las empresas de alta tecnología tenían altos valores de H, lo cual las convertía en más volátiles, mientras que las empresas de servicio, industria pesada y otras, tenían valores de H más bajo. Peters concluyó que las empresas de altos valores H son más convenientes para los inversores, ya que son más fáciles de predecir en su comportamiento y tendencias, sin embargo los resultados obtenidos comparados con casos de reales de acciones de la bolsa son disímiles y no hubo consenso con la afirmación. La gestión de fondos de Panagora no se maneja sin embargo según los estudios fractales, ya que la empresa y su clientela son reconocidos conservadores.

CONCLUSIONES

Esta revisión sin duda no contempla todos los casos que se han estudiado en la materia, sin embargo, es acertado establecer que la geometría fractal ha encontrado un amplio desarrollo en temas de organizaciones y administración, proporcionando aplicaciones útiles que

[11] H es un exponente que mide la dependencia entre los cambios de precios pasados y futuros y que fue utilizado oportunamente por Edgard Peters para encontrar a partir del mismo una medida del riesgo.

muestran aumento en la flexibilidad y la adaptabilidad de empresas. En compañías que cuentan con alta tecnología es favorable y necesaria la rápida respuesta a los cambios de ambiente y en ese tipo de cuestiones repetir los reiterativos procedimientos de la naturaleza puede resultar útil.

La geometría fractal guarda relación con el comportamiento del mercado bursátil, lo que es posible cotejar o visualizar a partir las gráficas surgidas de los movimientos de bolsa. Por otra parte existen análisis cuantitativos que intentan justificar la aplicación de modelos fractales en los movimientos de mercado y más aún, lo hacen extensivo a otras áreas de la economía.

Aún no es tiempo para obtener resultados determinantes a partir de una teoría financiera fractal o esperar que así fuera, ya que los resultados no son concluyentes. En las últimas décadas la aplicación de la geometría fractal ha pasado por etapas de auge, de desaliento y nuevamente de interés, en busca de ideas novedosas (el mismo Mandelbrot enumera una serie de problemas referidos básicamente a riesgos e inversiones, sobre los cuales habría que trabajar en busca de soluciones) Las investigaciones fueron abordadas por varios estudiosos y todos ellos coinciden en la existencia de la relación y las posibilidades de llegar a resultados positivos, aunque no se han registrado probadas ganancias a partir de las teorías. Es de esperar que en el futuro se avance sobre el tema con resultados más certeros, que contengan mayor sustancia y no solamente investigaciones de moda como ha pasado en épocas anteriores. A favor de esta afirmación, sin duda se puede contar con los actuales equipos informáticos cuyo desarrollo y capacidad permiten analizar números de variables y situaciones que antes eran impensados. Si bien la meta de un hombre de negocios es la ganancia, seguramente la posibilidad de prever los vaivenes de los valores significará más que una ayuda para el mismo, no obstante el factor humano será en todos los casos el que decida los movimientos y por tanto el responsable de los resultados.

BIBLIOGRAFÍA

- Benoit Mandelbrot. (2003). *La Geometría Fractal de la Naturaleza*. Barcelona (España). Editorial Tusquets.
- Benoit Mandelbrot – Richard Hudson. (2006). *Fractales y Finanzas.* Barcelona (España). Editorial Tusquets.
- Francis Diebold. (1999). *Elementos de Pronósticos.* México. International Thomson Editores S.A. de C.V.
- Sonia Sabogal - Gilberto Arenas. (2008). *Una Introducción a la Geometría Fractal*. Bucaramanga (Colombia). Universidad Industrial de Santander.
- Henry Mintzberg – James Brian Quinn – John Voyer. (1997). *El Proceso Estratégico. Conceptos, Contextos y Casos. Edición Breve.* México. Prentice Hall Hispanoamericana.
- Kenneth Falconer. (2003). *Mathematical Foundations and Applications*. EUA. John Wiley & Sons. 2º Ed.
- Rainer Marr – Santiago García Echeverría. (1997). *La Dirección Corporativa de los Recursos Humanos.* Ediciones Díaz de Santos. Madrid.
- Edgard E. Peters. (1994). *Fractal Market Analysis*. EUA. John Wiley & Sons.
- Math 190a – Fractal Geometry. http://science.yalecollege.yale.edu/math-190a-fractal-geometry. Obtenido el 30 de agosto de 2013.

Una aproximación al proceso de generalización en la solución de problemas con desigualdades.

Mauro García Pupo

Juan E. Nápoles Valdés

Carlos Cañón Rincón

Recibido: 5 de noviembre 2013

Aceptado: 03 de diciembre 2013

Una aproximación al proceso de generalización en la solución de problemas con desigualdades.

Mauro García Pupo
mauro@uan.edu.co
Universidad Antonio Nariño, Colombia

Juan E. Nápoles Valdés
jnapoles@exa.unne.edu.ar; jnapoles@frre.utn.edu.ar
Universidad Nacional del Nordeste Argentina
Universidad Tecnológica Nacional, Argentina

Carlos Cañón Rincón
carloscanon@uan.edu.co
Universidad Antonio Nariño, Colombia

Introducción.

Indudablemente las ciencias matemáticas, así como el ejercicio de su enseñanza, siempre han tenido como principal medio y fin los problemas matemáticos. Paul Halmos (1980) no puede ser más elocuente al respecto, cuando afirma que los problemas son *"el corazón de la Matemática"*. La resolución de problemas entraña el engranaje de disímiles recursos cognoscitivos por parte del resolutor. Para este último resolver un problema debe servir no sólo de un simple entrenamiento intelectual, sino también de un sano y agradable entretenimiento. ¿Pero acaso sucede así con cualquier problema?

En este trabajo tomamos como base la definición de problema ofrecida por Campistrous y Rizo, "*Un problema es toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo. La vía para pasar de la situación o planteamiento inicial a la nueva situación exigida tiene que ser desconocida y la persona debe querer hacer la transformación"*[1] para poder caracterizar el proceso de generalización en el que estamos interesados.

De lo anterior es claro que podemos caracterizar un problema como una terna (C,P,S) del contexto matemático (C), de las propiedades involucradas (P) y de la vía de solución utilizada (S). En nuestro trabajo estamos interesados en la generalización del primer componente de esta terna: el contexto matemático, en particular, el paso de 2 a n dimensiones.

Pudiera parecer que el contexto matemático no es lo más relevante en el proceso de generalización. Sin embargo, existen innumerables ejemplos en la Didáctica de la Matemática que demuestran lo contrario. Así, para muchos docentes la extensión de **N** a **Z** y de **Z** a **Q**, puede parecer el mismo problema, poder resolver una ecuación, sin embargo matemáticamente la ampliación de estos dominios es muy diferente, en el primer caso de un conjunto provisto de una ley asociativa y conmutativa (la suma en **N**)

[1] Campistrous, L. y C. Rizo-"Aprende a resolver problemas aritméticos", Editorial Pueblo y Educación, C. Habana, 1996.

obtener *un grupo conmutativo* (**Z**), mientras que en el segundo caso, de un anillo **(Z,+,·)** construir *un cuerpo conmutativo* **(Q,+,·)**[2].

Tomaremos como base para elaborar nuestras conclusiones la investigación realizada con 32 estudiantes del grupo 65, de Cálculo Diferencial del programa curricular de Ingeniería Catastral y Geodesia de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, sede central, de los cuales se continuó la investigación con 24 estudiantes, ya que los demás no presentaron en su totalidad todas las actividades. Este grupo está conformado por estudiantes que están viendo la asignatura por segunda vez, en algunos casos por tercera vez. Para conocer el estado actual, se realizo un diagnóstico que consistió en 4 problemas con desigualdades, el cual posibilitó clasificar a los estudiantes en determinados niveles de generalización.

¿Qué es la generalización?

Hay tres significados ligados a la generalización:

- El primero es como sinónimo de abstracción. Es decir, el proceso de generalización es el proceso de encontrar y señalar propiedades en una clase de objetos similares.
- El segundo significado incluye extensión (empírica o matemática) del concepto existente o una invención matemática. Quizás el ejemplo más famoso de estos últimos son los fundamentos propuestos para las geometrías no-euclidianas.
- El tercer significado define generalización en términos de su producto. Si el producto de la abstracción es un concepto, el producto de la generalización es una declaración relativa a los conceptos, es decir, un teorema.

Como dijimos, nuestro trabajo estará centrado en el segundo significado[3].

Hacer generalizaciones es fundamental para la Educación Matemática y la propia Matemática. Tanto en docentes como en estudiantes la capacidad de hacer generalizaciones debe constituirse en uno de los objetivos fundamentales del proceso de enseñanza-aprendizaje que una sociedad espera de la escuela en cualquiera de sus niveles. Es una de las razones por las que las Matemáticas forman parte de la inmensa mayoría de los planes de estudios. Un buen aprendizaje de las Matemáticas es el mejor contexto para desarrollar las habilidades o capacidades de hacer generalizaciones.

Dentro de los diversos métodos[4] que pueden usar los profesores para enseñar la generalización, nosotros hacemos uso del "Enfoque de Resolución de Problemas" cuya esencia es plantear un problema y dejar que los estudiantes lo resuelvan y convenzan a los demás que la solución es correcta. Desde el punto de vista de la generalización en sí misma, nosotros estamos centrados en la generalización teórica[5].

---

[2] Consultar, por ejemplo, Zamanski, M.-"Introducción al Algebra y Análisis Moderno", Montaner y Simon, Barcelona, 1970.

[3] Para una discusión adicional sobre estos significados, recomendamos Michael Mitchelmore, "*The role of abstraction and generalization in the development of mathematical knowledge", Proceedings of the Second East Asia Regional Conference on Mathematics Education and the Ninth Southeast Asian Conference on Mathematics Education* In Mathematics education for a knowledge-based era, Vol. 1 (2002), pp. 157-167.

[4] Recomendamos Michael Mitchelmore-"How to teach generalizations in mathematics?", MERGA 22: 1999, 373-379.

[5] Davidov, V. V.-*"Types of generalisation in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula"* (Soviet studies in mathematics education, VoL 2; J. Kilpatrick, Ed., J.Teller, Trans.). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1990 (el trabajo original fue publicado en 1972).

Nosotros hacemos hincapié en que la calidad de las Matemáticas, descansa en las actividades y tareas que los estudiantes realicen en el aula[6]. Sabemos que estas actividades pueden ser clasificadas en ejercicios, problemas e investigaciones matemáticas[7]. Dentro de estas últimas es que hemos incluidos a los problemas de generalización.

Los ejercicios son actividades cuyo procedimiento/estrategia está claramente definida y se utilizan para el dominio de una habilidad recién aprendida (computacional, instrumental o de otro tipo). Estas actividades son importantes, pero deben utilizarse con moderación. Si nuestra enseñanza está dominada por estas actividades, los estudiantes comenzarán a pensar que la Matemática son solo hechos y procedimientos que aprender, una visión instrumental de la misma.

Los problemas son actividades con objetivos claramente definidos, pero las soluciones o estrategias no son evidentes. Si los estudiantes saben cómo resolver el problema, entonces ya no es un problema, es un ejercicio. Este tipo de actividad nos lleva a una concepción dinámica de la Matemática, la idea que ésta se construye día a día, socialmente producida e influida por factores socio-económicos[8].

Las investigaciones matemáticas son actividades que involucran la exploración abierta de una situación matemática. El estudiante es libre de elegir qué aspectos de la situación quisiera hacer y cómo hacerlo. Los estudiantes plantean sus propios problemas para resolver y extenderlo a una dirección que quieran seguir.

Es claro que nuestro trabajo hace hincapié en la función de este tipo de actividades en el desarrollo de la generalización de problemas.

Estas tres tareas (ejercicio, problema y generalización) pueden ser ilustradas con las preguntas de la Actividad 1 que desarrollaremos más adelante:

Ejercicio. Demostrar que si a,b>1, se tiene que $\log_a b+\log_b a\geq 2$ ¿Cuándo se tiene la igualdad?

Problema. Demostrar la siguiente desigualdad $\dfrac{3x^2}{1+9x^4}\leq\dfrac{1}{2}$.

Generalización. Demostrar que si a∈**R**, se tiene que $\dfrac{ax^{\frac{n}{2}}}{1+a^2x^n}\leq\dfrac{1}{2}$.

Niveles de generalización.

Como decíamos antes, al inicio se realizó una actividad diagnóstico que posibilitó clasificar a los estudiantes en diversos niveles de partida. Para ello, a cada problema se le asignó una puntuación en una escala de 0 a 2, de acuerdo al grado de solución del problema, 0 si el estudiante no abordó el problema; 1 si el estudiante aplicó los conceptos y proposiciones ofrecidas en las diferentes actividades, pero no resolvió el problema completamente y 2 si el estudiante resuelve el problema completamente, apropiándose de los conceptos y proposiciones dadas.

Para identificar los grados de generalización de definen cuatro niveles como sigue:

[6] Consultar Tao, T- "What is good Mathematics?", arXiv:math/0702396v1 [math.HO] 13 Feb 2007.

[7] Ver "Exercises, Problems, and Math Investigations" de Erlina Ronda disponible en http://math4teaching.com/2009/11/06/exercises-problems-and-math-investigations/

[8] Nápoles V., J. E.-"Some reflections on mathematics and mathematicians.Simple questions, complex answers", TME, vol.9, nos.1&2, 221-232.

- Nivel 1: Bajo.
- Nivel 2: Básico.
- Nivel 3: Intermedio.
- Nivel 4: Superior.

Se analizaron las diferentes puntuaciones por cada estudiante, procediendo a normalizar en una nueva escala de varia de 0 a 1, por lo tanto, si un estudiante se encuentra dentro del rango de 0,75 a 1, estaría en el nivel de generalización superior; entre 0,50 a 0,75, en nivel intermedio; entre 0,25 a 0,75, en nivel básico y si está entre 0 a 0,25, en nivel bajo.

Nivel 1 Bajo: El estudiante no resolvió ningún problema o resolvió algún problema pero no completamente, presenta dificultad en la comprensión y aplicación de los conceptos, definiciones y proposiciones.
Nivel 2 Básico: El estudiante logra resolver completamente uno de los cuatro problemas, aunque presenta algunas dificultades en la aplicación de los conceptos, y proposiciones presentadas en las actividades.
Nivel 3 Intermedio: El estudiante resuelve 2 problemas completamente, comprende y aplica las definiciones y proposiciones dadas, además es habilidoso en visualizar y abstraer, regularidades procedimentales que le permiten llegar a los resultados esperados.
Nivel 4 Superior: El estudiante resuelve tres o los cuatro problemas completamente, evidenciando un dominio claro y apropiación de los conceptos, además de visualizar, abstraer y argumentar en forma explícita, señalando el uso de las definiciones y proposiciones.

Esta clasificación en los anteriores niveles, tuvo en cuenta el análisis de las respuestas dadas por cada estudiante en cada una de las pruebas, incluyendo la prueba diagnóstica.

Prueba Diagnóstica
Esta actividad es introductoria a los conceptos y definiciones básicas en desigualdades, además de presentar una Proposición 1, que permite resolver los problemas planteados, con su respectiva ejemplificación de aplicación.
El primer problema consiste en probar una desigualdad, invitando al estudiante a que tome algunos números que cumplan el enunciado, así le da evidencia de la desigualdad, como lo plantea Polya en el método de los cuatro pasos de su heurística.
El segundo problema consiste en demostrar una desigualdad, lo cual invita al estudiante a reescribir la desigualdad de tal forma que pueda hacer uso de la Proposición 1 como propia, lo interesante es que él pueda descubrir la forma de reescribir la desigualdad y así poder aplicar dicha Proposición .
El tercer problema propone una generalización del primero, donde la utilización del mismo razonamiento y la Proposición 1 permiten llegar al resultado esperado.
El cuarto problema consiste en una aplicación del ejemplo 2, donde por analogía se puede lograr llegar a la solución.
Los anteriores problemas permiten al estudiante dar una fijación de los conceptos, definiciones y la Proposición 1, dada en la actividad.
A continuación, se presenta el listado correspondiente a los 24 estudiantes con su correspondiente nivel:

ESTUDIANTES DEL GRUPO	DIAGNÓSTICO
Estudiante	NIVEL
E1-E8	N3
E9-E12	N2
E13-E24	N1

Listado Nº 1

Se presentan los resultados por nivel y por problema resuelto completamente organizados en la tabla de frecuencias Nº1 y Nº2

N	RANGO	**DIAGNOSTIC0**
N1	**RANGO [0,0 a 0,25)**	12
N2	**RANGO [0,25 a 0,50)**	4
N3	**RANGO [0,50 a 0,75)**	8
N4	**RANGO [0,75 a 1,00)**	0
T	**TOTAL ESTUDIANTES**	24

Tabla Nº1 Frecuencias correspondiente al grupo 65

PROBLEMA	PD1	PD2	PD3	PD4
ESTUDIANTES QUE LO RESOLVIERON	5	7	8	0
PORCENTAJE	21	29	33	0

Tabla Nº2 Porcentaje por problema resuelto actividad diagnóstica grupo 65

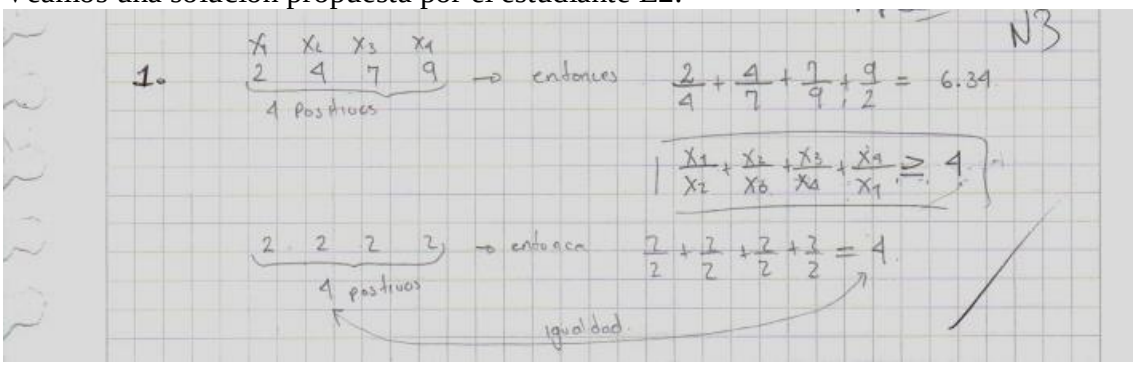
Los problemas que formaron la actividad diagnóstica fueron los siguientes:

Problema 1. Sean x_1, x_2, x_3, x_4 números positivos cualesquiera. Probar que $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_4}+\frac{x_4}{x_1}\geq 4$, la igualdad se da cuando $x_1= x_2= x_3= x_4$.

Su finalidad consistió en dar prueba a una desigualdad, invitando a los estudiantes a tomar cuatro números no negativos, verificando el resultado, producto de la compresión de la Proposición 1:

"Si el producto de unos números positivos x_1, x_2, x_3, …, x_n *es igual a 1, la suma no es menor que n, esto significa que si* $x_1x_2x_3\ldots x_n=1$, *entonces* $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n\geq n$*".*

Veamos una solución propuesta por el estudiante E2:

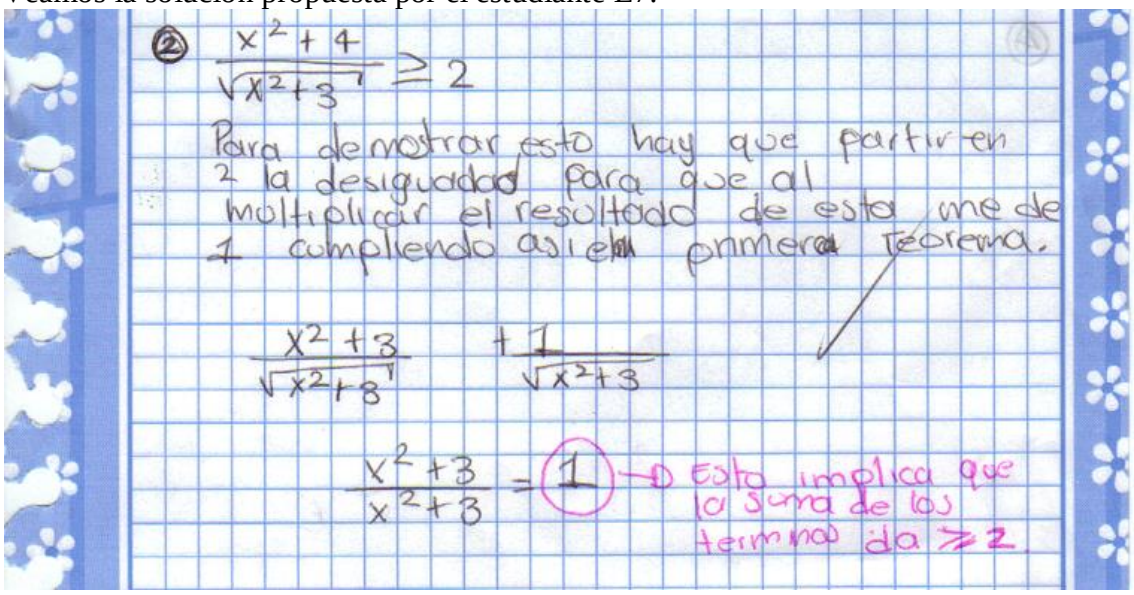


Se puede observar que el estudiante selecciona 4 números positivos y aplica correctamente la Proposición 1, da cuenta que la suma es mayor que 4 y que la igualdad solo se obtiene si los cuatro números son iguales.

Problema 2. Demostrar la desigualdad $\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+3}} \geq 2$.

Su finalidad consistió en demostrar una desigualdad haciendo uso y comprensión de la Proposición 1, el estudiante tenía que ver de cierta manera como la expresión $\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+3}}$, podía expresarse en dos términos cuyo producto fuese igual a uno y así poder hacer uso de la Proposición 1, para así concluir que la suma es mayor que dos.

Veamos la solución propuesta por el estudiante E7:

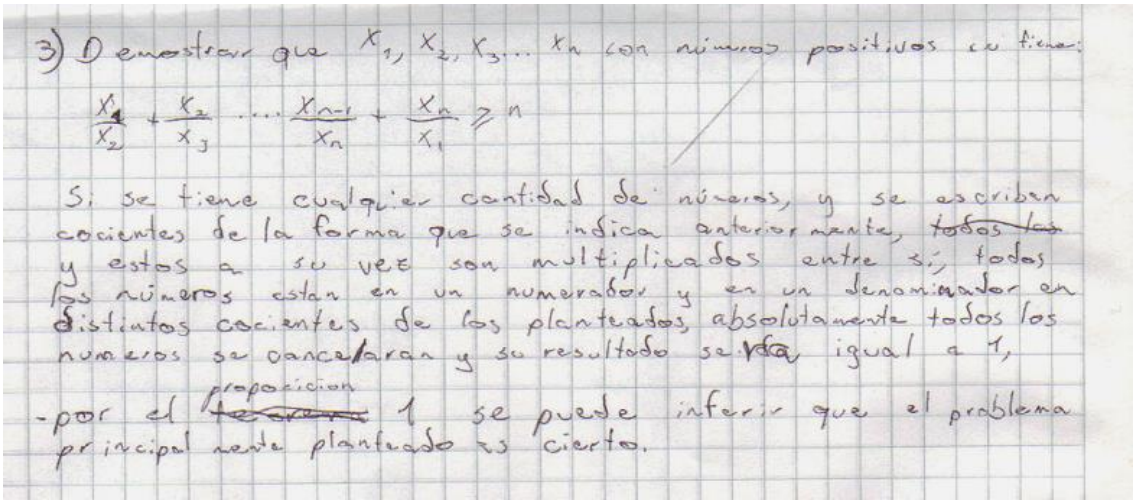


El estudiante logra expresar la expresión inicial en la suma de dos expresiones equivalentes de tal forma que verifica la condición inicial de la Proposición 1, que su producto sea igual a uno, para así concluir que la suma es mayor o igual a dos.

Problema 3. Demostrar[9] que si x_1, x_2, x_3,… x_n son números positivos se tiene $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_4}+...+\frac{x_n}{x_1} \geq n$, la igualdad se tiene si $x_1= x_2= x_3=\ldots=x_n$. ¿Será una generalización del Problema 1?

Es de resaltar que 9 de los 10 estudiantes que resolvieron el Problema 1, lograron resolver éste. Veamos la solución propuesta por el estudiante E4:

[9] Modificado de Korovkin, P. P.-"Desigualdades", Editorial Mir, Moscú, 1976, p. 15.



3) Demostrar que $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ son números positivos se tiene:

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} \ldots \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq n$$

Si se tiene cualquier cantidad de números, y se escriben cocientes de la forma que se indica anteriormente, ~~todos los~~ y estos a su vez son multiplicados entre sí, todos los números estan en un numerador y en un denominador en distintos cocientes de los planteados, absolutamente todos los numeros se cancelaran y su resultado se ~~vea~~ igual a 1,

-por el ~~teorema~~ proposicion 1 se puede inferir que el problema principalmente planteado es cierto.

Se evidencia que el estudiante comprendió la Proposición 1 y argumenta dicha generalización.

Problema 4. Si se sabe que la siguiente ecuación $x^3+mx^2+x+n=0$, tiene raíces reales positivas cuyos cuadrados suman uno ¿Cuál es el valor de m, n y las raíces?
Ningún estudiante logró acercarse a la solución, ya que el problema se fundamentaba en una aplicación presentada a manera de ejemplo en la actividad diagnóstica, en la parte introductoria a desigualdades, una de las dificultades presentadas en el problema se fundamentó en la compresión de las condiciones iniciales y como el estudiante podía relacionar dicha información, con los conceptos presentados.
En cada actividad diseñada se invita al estudiante a reflexionar en la heurística de Polya, que propone: *"comprensión, diseño de un plan, ejecución del plan y la verificación"*[10].
Nótese que el entendimiento de las propiedades básicas de las desigualdades y la Proposición 1, fueron vitales en las soluciones propuestas por los estudiantes, lo cual se alcanzó en cierta medida los objetivos básicos de la actividad de pilotaje y/o diagnóstico:

- Potenciar el pensamiento de la generalización a través de la solución de problemas.
- Comprender y deducir algunas desigualdades notables.
- Resolver problemas donde intervienen desigualdades notables.

Dificultades presentadas en el diagnóstico.
A continuación se listan algunas dificultades presentadas por los estudiantes en la resolución de los diferentes problemas:

- Falta de compresión de las propiedades básicas de las desigualdades y la Proposición 1.
- Manejo y simplificación de la expresiones algebraicas.
- Falta de compresión del lenguaje matemático, ya que los estudiantes de ingeniería y en particular del grupo experimental, no están acostumbrados a menar este lenguaje, debido a que vienen con dificultades en Matemáticas desde el colegio, además de haber desertado en cursos anteriores de Cálculo Diferencial, por eso su repitencia.

Resultados y discusión.

[10] Polya, G.-"Como plantear y resolver problemas". Editorial Trillas, México D.C, 1965, pp. 7-12

Después de la actividad diagnóstica, se desarrollaron cuatro actividades, con el objetivo de cuantificar la evolución de los estudiantes caracterizados en los cuatro niveles, en cada una de las cuales, estaban presentes ejercicios, problemas y generalizaciones. De las actividades desarrolladas presentaremos la primera de ellas.

Actividad Nº1

El Problema 1 consiste en la generalización de un problema planteado en la actividad diagnóstica, cuyo fin es determinar la compresión y aplicación de la Proposición 1, para demostrar la generalidad.

Los Problemas 2 y 3, son una aplicación puntual de los conceptos y la Proposición 1, en la demostración de dos desigualdades.

El Problema 4 sugiere la generalización del Problema 2.

La actividad anterior permite al estudiante hacer suya las definiciones, conceptos y la Proposición 1, que es la base para continuar en la construcción del conocimiento que se presenta en la actividad Nº2.

Se presenta la tabla de porcentajes por nivel y problema de los 24 estudiantes correspondientes a los diferentes niveles obtenidos en la actividad Nº1:

N	RANGO	**ACTIVIDAD 1**
N1	**RANGO [0,0 a 0,25)**	11
N2	**RANGO [0,25 a 0,50)**	3
N3	**RANGO [0,50 a 0,75)**	7
N4	**RANGO [0,75 a 1,00)**	3
T	**TOTAL ESTUDIANTES**	24

Tabla Nº3: Porcentaje de acuerdo a los diferentes niveles actividad Nº1

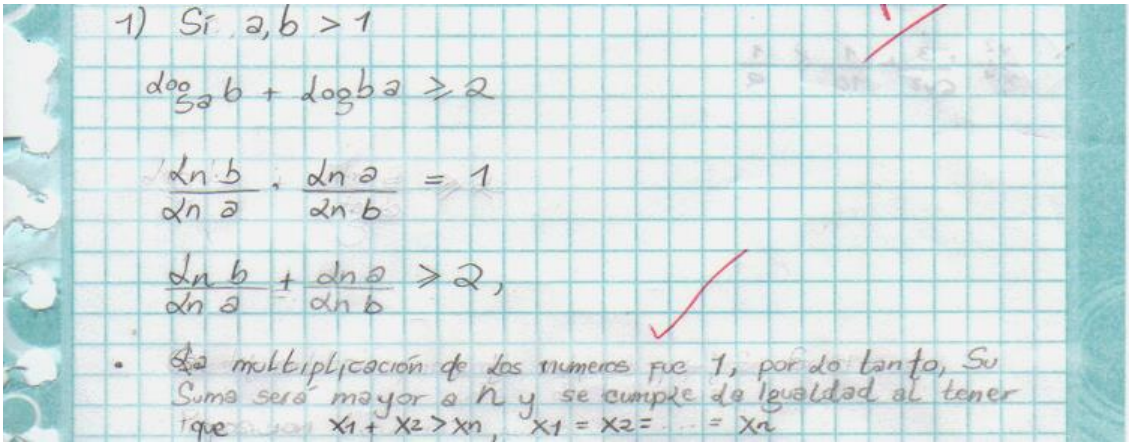
Se ve que tres estudiantes alcanzaron el N4, ya que lograron resolver tres problemas completamente, en especial el estudiante E4 resolvió los cuatro problemas.

PROBLEMA	P1A1	P2A1	P3A1	P4A1
ESTUDIANTES QUE LO RESOLVIERON	8	9	3	7
PORCENTAJE	33	38	13	29

Tabla Nº 4: porcentaje por problema actividad Nº1

Problema 1. Demostrar que si a,b>1, se tiene que $\log_a b+\log_b a\geq 2$ ¿Cuándo se tiene la igualdad?

Este es un ejercicio según nuestra clasificación. La finalidad es hacer uso de una propiedad básica de los logaritmos, para expresarlos de tal manera que sea aplicable la Proposición 1 y así lograr la demostración, veamos la solución propuesta por el estudiante E18:



1) Si $a, b > 1$

$\log_a b + \log_b a \geq 2$

$\frac{\ln b}{\ln a} \cdot \frac{\ln a}{\ln b} = 1$

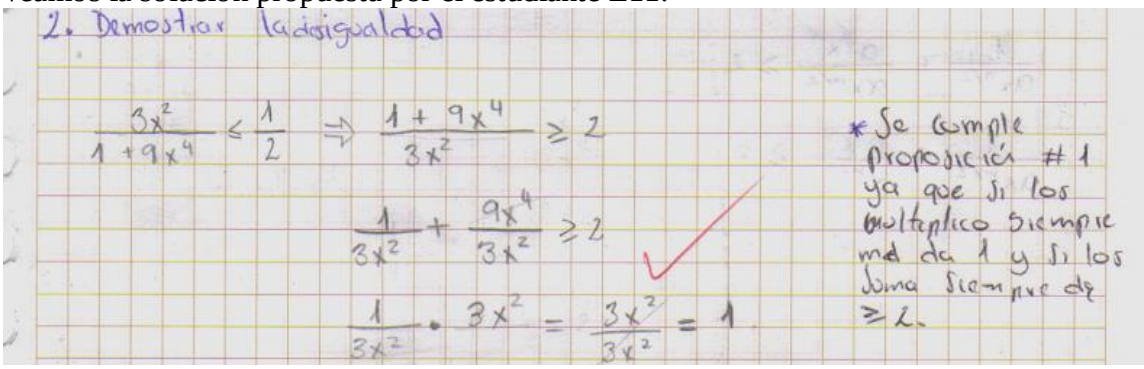
$\frac{\ln b}{\ln a} + \frac{\ln a}{\ln b} \geq 2,$

- La multiplicación de los numeros fue 1, por lo tanto, su suma será mayor o n y se cumple la igualdad al tener que $x_1 + x_2 > x_n$, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$

Se puede observar que la estudiante aplica la propiedad que le permite visualizar que el producto de las expresiones equivalentes es 1, para así aplicar la Proposición 1y llegar al resultado pedido, aunque se nota la dificultad de argumentar los pasos ideados y aplicados para llegar a la solución.

Problema 2. Demostrar la siguiente desigualdad $\frac{3x^2}{1+9x^4} \leq \frac{1}{2}$.

La finalidad del problema es afianzar la Proposición 1 para demostrar la desigualdad, veamos la solución propuesta por el estudiante E11:



2. Demostrar la desigualdad

$\frac{3x^2}{1+9x^4} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1+9x^4}{3x^2} \geq 2$

$\frac{1}{3x^2} + \frac{9x^4}{3x^2} \geq 2$

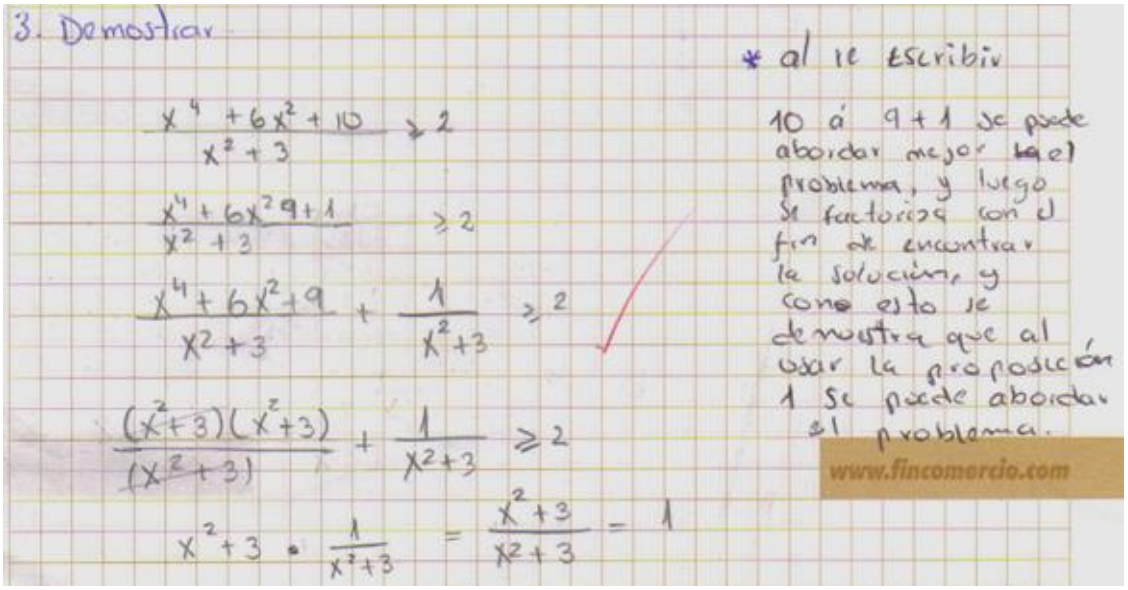
$\frac{1}{3x^2} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{3x^2} = 1$

* Se cumple proposición #1 ya que si los multiplico siempre me da 1 y si los sumo siempre da ≥ 2.

El estudiante aplica una propiedad básica de la desigualdades, que le permite invertir el sentido de la desigualdad, para así expresarla de tal manera que su producto sea igual a 1 y basándose en la Proposición 1 demostrar que su suma es mayor o igual a 2.

Problema 3. Demostrar la siguiente desigualdad $\frac{x^4+6x^2+10}{x^2+3} \geq 2$.

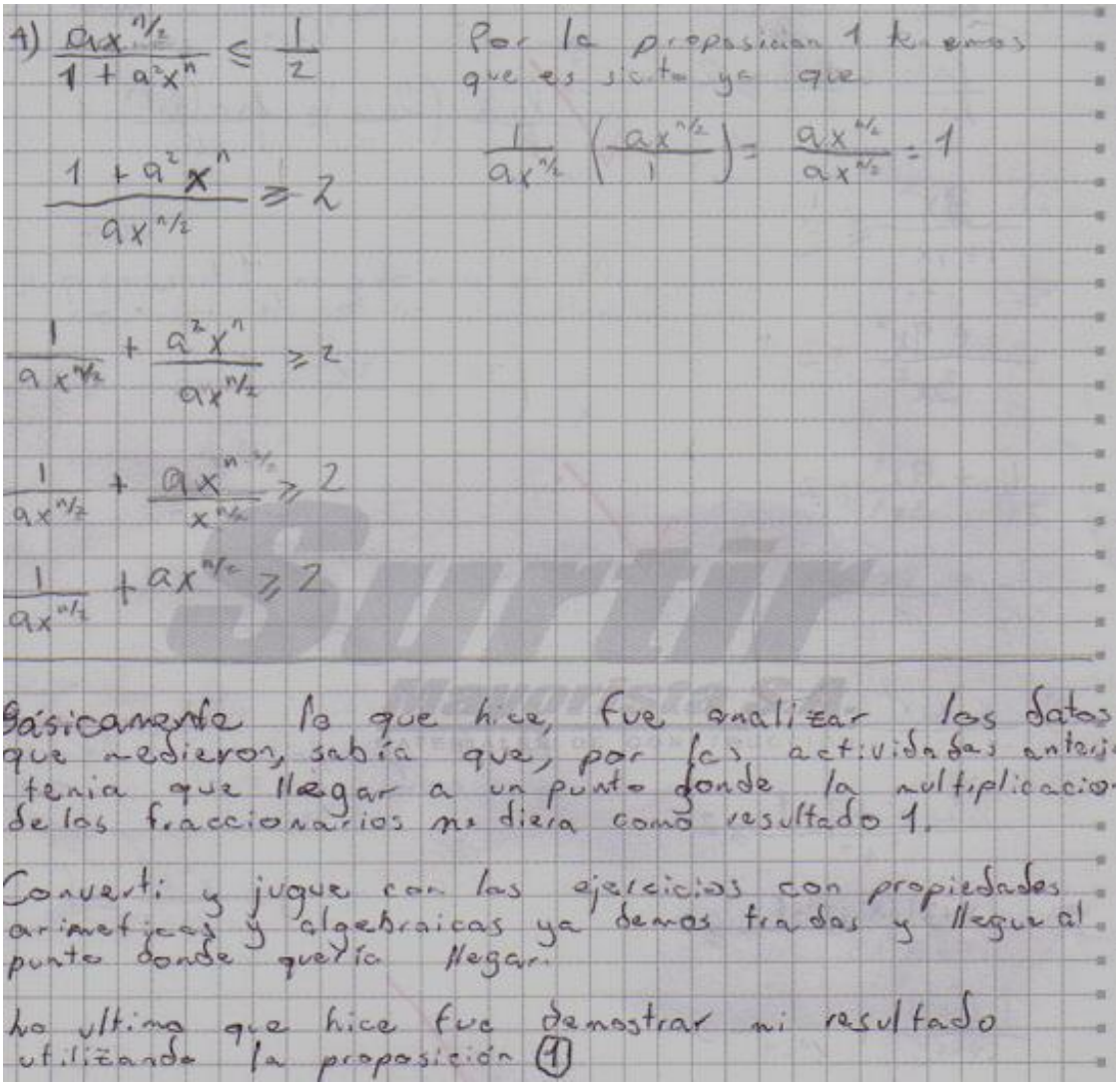
Este problema es más complejo que el anterior, ya que el estudiante debe ser habilidoso en lograr expresar el numerador de tal forma que sea aplicable la Proposición 1 y así lograr la demostración. Veamos la solución planteada por el estudiante E11:



El estudiante describe claramente el proceso que le permitió rescribir el miembro izquierdo de la desigualdad, para así verificar la condición inicial de la Proposición 1 y demostrar el resultado.

Problema 4. Demostrar que si a∈**R**, se tiene que $\frac{ax^{\frac{n}{2}}}{1+a^2x^n} \leq \frac{1}{2}$.

La finalidad del problema consiste en preguntarle al estudiante, si el enunciado presentado de está forma, es una generalización del Problema 2, veamos la solución propuesta por el estudiante E4:



4) $\frac{ax^{n/2}}{1+a^2x^n} \leq \frac{1}{2}$

Por la proposición 1 tenemos que es sicto ya que

$\frac{1}{ax^{n/2}}\left(\frac{ax^{n/2}}{1}\right) = \frac{ax^{n/2}}{ax^{n/2}} = 1$

$\frac{1+a^2x^n}{ax^{n/2}} \geq 2$

$\frac{1}{ax^{n/2}} + \frac{a^2x^n}{ax^{n/2}} \geq 2$

$\frac{1}{ax^{n/2}} + \frac{ax^{n-n/2}}{x^{n/2}} \geq 2$

$\frac{1}{ax^{n/2}} + ax^{n/2} \geq 2$

Básicamente lo que hice, fue analizar los datos que medieron, sabía que, por las actividades anteri tenia que llegar a un punto donde la multiplicacio de los fraccionarios me diera como resultado 1.

Converti y juque con las ejercicios con propiedades arimeticas y algebraicas ya demos tradas y llegue al punto donde quería llegar.

lo ultimo que hice fue demostrar mi resultado utilizando la proposición (1)

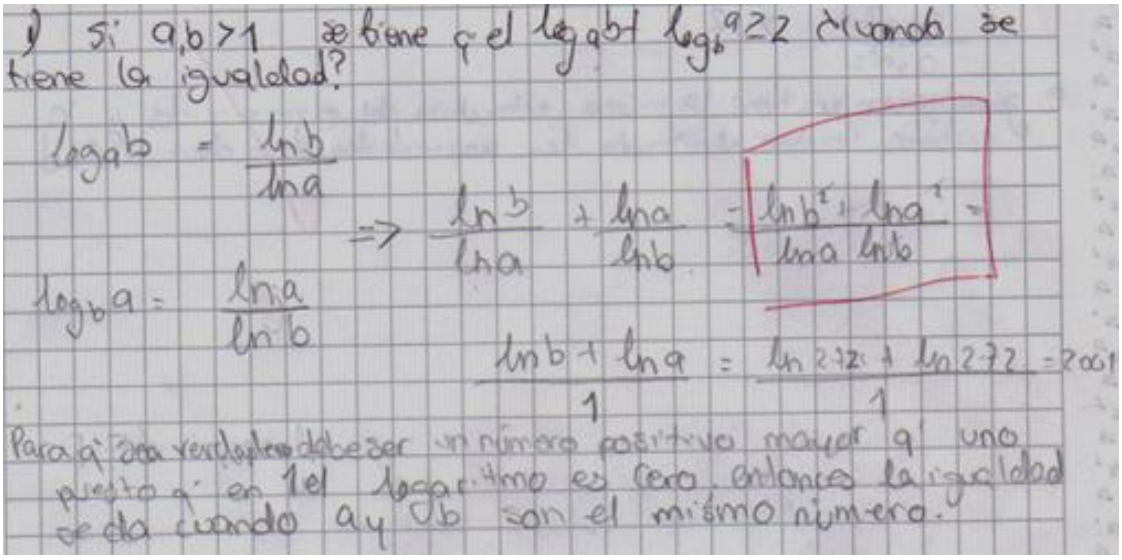
Como se mencionó anteriormente el estudiante logró resolver los cuatro problemas propuestos, explicando al final los pasos que utilizo para visualizar la generalización propuesta haciendo uso de las propiedades básicas y la Proposición 1.

De lo anterior cabe resaltar que los estudiantes que resolvieron el Problema 2, siguieron la misma estructura del problema, permitiendo así llegar a la generalización planteada, además de eso los estudiantes hicieron suya la Proposición 1.

Dificultades encontradas en la actividad Nº1

Se listan algunas dificultades presentadas en el desarrollo de la actividad:

- Explicar y argumentar los pasos efectuados en la resolución de cada problema.
- Manejo y simplificación de las expresiones algebraicas, presento un ejemplo de lo anterior en la estudiante E3, en la solución propuesta al Problema 1:



Nótese que este error es común a la gran mayoría de estudiantes que estudia algún curso de Matemáticas, al efectuar la simplificación encerrada en el recuadro (ver imagen) esto impide que la estudiante llegue al resultado esperado.

- Compresión del lenguaje matemático en que se enuncian los problemas.

Objetivos alcanzados

- Potenciar y comprender el pensamiento de la generalización a través de la solución de problemas.
- Comprender y deducir algunas desigualdades notables.
- Resolver problemas donde intervienen desigualdades notables.

De esta manera, se puede asegurar que se alcanzaron los objetivos, ya que los estudiantes lograron resolver al menos un problema completo, lo que corresponde a 13 estudiantes, es decir el 54%.

Conclusiones

El proceso de generalización se logra categorizar dentro del modelo propuesto, describiéndola como un procedimiento estructural de la forma siguiente P(O,M,R) donde O representa el objeto susceptible de ser generalizado (puede ser un problema, un concepto o una entidad abstracta), M un procedimiento algorítmico o heurístico y R el resultado que se obtiene después de aplicar dicho procedimiento que se constituye en dicha metodología. Entonces si tenemos que $O_1 \subset O_2$ con $R_1 \subset R_2$, hay proceso de generalización aun cuando se mantenga o no la metodología, es decir, se establece una transición de un O_1 a un O_2 más global, valga la redundancia. Esta estructura puede ser generalizada si n objetos $O_1 \subset O_2 \ldots \subset O_1$, producen n resultados, invariantes o no a una metodología de objeto definida, $R_1 \subset R_2 \ldots \subset R_n$, es decir cada transición produce de manera natural una generalización $G_1 \subset G_2 \ldots \subset G_n$.

Por tanto, generalizar implica una transición de un objeto particular a uno más general en el sentido siguiente: si dentro de la transición hay comprensión, idealización, ejecución y verificación.

De todo lo anterior se puede inferir que en 15 estudiantes se propició el desarrollo del pensamiento de generalización, es decir el 62%, se esperaba que cada estudiante avanzara de nivel actividad tras actividad, pero esto sólo se evidenció en el grupo Nº3,

en aquellos estudiantes de bajo rendimiento la metodología de trabajo se mantuvo constante con la diferencia que el nivel de dificultad incrementó con respecto a las anteriores actividades y el proceso de generalización se dio cuando el estudiante logró establecer una transición de lo usual a lo general.

A partir de estos resultados, podemos concluir que hemos logrado detectar dos tipos de errores que cometen los estudiantes en el proceso de generalización y que podemos caracterizarlos así:

En primer lugar, se necesita tiempo antes que un estudiante se percate que las estructuras conceptuales existentes no son suficientes para resolver la nueva situación problemática, así muchos estudiantes se empeñan en establecer invariantes correctos y fue muy difícil para nosotros eliminar este comportamiento erróneo.

En segundo lugar, otros estudiantes tienen éxito en el establecimiento de un invariante (generalización local, problema para nosotros), pero se mueven de un invariante a otro (a veces incorrecto) cuando se enfrentan a una nueva situación (generalización para nosotros).

TECNOLOGÍA DE LA MEDICIÓN DEL PODER CALORIFICO DE COMBUSTIBLES SÓLIDOS Y LÍQUIDOS CON BOMBA CALORIMETRICA DE MAHLER

Leiva Azuaga Agripina

Martina, Pablo Ernesto

Aeberhard, María Raquel

Corace, Juan José

Mendivil Carlos

García Solá, Emilio

Recibido: 03 de octubre 2013
Aceptado: 06 de diciembre de 2013

TECNOLOGÍA DE LA MEDICIÓN DEL PODER CALORIFICO DE COMBUSTIBLES SÓLIDOS Y LÍQUIDOS CON BOMBA CALORIMETRICA DE MAHLER

Leiva Azuaga Agripina[1]. - Martina, Pablo Ernesto.[2] -Aeberhard, María Raquel[2] - Corace, Juan José.[2] – Mendivil Carlos [1]. – García Solá, Emilio[1]
G.I.D.E.R.- Grupo de Investigación y Desarrollo en Energías Renovables
Departamento de Termodinámica y Máquinas Térmicas – Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional del Nordeste – Av. Las Heras 727 – 3500 – Resistencia - Chaco
Tel. 0362-4420076 – Email: mimaleiva@gmail.com

RESUMEN: El objetivo de este trabajo es divulgar la metodología para determinar el poder calorífico de combustibles sólidos y líquidos, utilizando una bomba calorimétrica de Mahler. Este dispositivo permite determinar el calor producido por la combustión de diversas sustancias según Norma IRAM 17016 **y** ASTM D240. Para corroborar el correcto funcionamiento del equipo, se ha determinado en forma experimental el poder calorífico de muestras de aserrín y se compararon dichos valores con el obtenido en forma teórica, a partir del análisis elemental. A pesar de existir diferencias entre los resultados alcanzados, los mismos están dentro de los intervalos de poder calorífico de materiales biomásicos de la bibliografía.

Palabras Clave: Poder Calorífico - Bomba calorimétrica - Combustibles sólidos y líquidos

INTRODUCCIÓN

Una forma de evaluar energéticamente un combustible es considerar, por una parte, su disponibilidad, y por otra conocer su poder calorífico.

Se puede estimar que la principal característica de un combustible es su poder calorífico, definido como la cantidad de calor que se obtiene mediante la combustión completa de la unidad de masa o volumen de un combustible, quedando los productos de la combustión a la temperatura a la que se encontraban inicialmente el combustible y el comburente, es decir que el poder calorífico es el calor de la reacción de combustión realizada a temperatura constante.

Al producirse la combustión se produce una transformación de energía química del combustible en energía térmica. Dicha energía térmica puede transferirse en forma de calor al medio si la combustión se realiza en un recinto no adiabático o bien puede incorporarse como energía interna térmica a los productos de la combustión si se realiza en un ambiente adiabático.

---

1 Docente-Investigador Dpto. Física y Química - GIDER – FI – UNNE
2 Docente-Investigador Dpto. Termodinámica - GIDER – FI – UNNE

Los combustibles que se emplean en la práctica normalmente contienen hidrógeno combinado y muchas veces también humedad. El agua que produce el primero, más la que constituye la humedad pasan a formar parte de los productos de la combustión. Según las condiciones en que se realice la combustión, puede ocurrir que toda el agua que integra los productos de la combustión quede gaseosa, es decir en forma de vapor, o que toda el agua quede líquida o parcialmente líquida y parcialmente vaporizada (García, 2002).

En cada uno de los casos la cantidad de calor que se obtendrá será diferente, se tendrá así una infinidad de poderes caloríficos, conjunto que tendrá dos valores extremos. Se define entonces como poder calorífico superior al correspondiente al caso en que toda el agua producto de la combustión queda líquida y como poder calorífico inferior al del caso en que toda el agua producto de la combustión queda gaseosa.

Los combustibles pueden ser quemados a presión o a volumen constante. El poder calorífico a presión constante de líquidos y gases se determina con el calorímetro de Junkers, dispositivo que fue diseñado y construido en el Departamento de Termodinámica y Máquinas Térmicas de la Facultad de Ingeniería de la UNNE, para determinar el poder calorífico del biogás (Martina et al., 2011).

El grupo GIDER (Grupo de Investigación y desarrollo en Energías Renovables) busca la forma de utilizar los residuos madereros de la región chaqueña, con la posibilidad de lograr a partir de ellos una fuente de energía barata, no contaminante, fácil de usar y que esté al alcance de todos. Es por ello que se diseñó y se puso a punto una bomba calorimétrica de Mahler con el fin de obtener las características energéticas de combustibles generados en la zona chaqueña.

Se pretende con este trabajo aportar conocimientos científicos a la industria regional para mejorar el valor agregado del producto forestal y su competitividad energética en el mercado regional, nacional y del MERCOSUR.

DESARROLLO EXPERIMENTAL

Descripción del Equipamiento

La bomba calorimétrica de Mahler consiste básicamente en un recipiente o bomba donde se quema la muestra de combustible y una vasija calorimétrica que contiene una cantidad determinada de agua donde se sumerge la bomba, el termómetro y el agitador como se observa en las siguientes imágenes:

La bomba (Figura 1) se basa en un obús maquinado fabricado en acero inoxidable de 282ml de capacidad, con tapa roscada y cierre de 2 anillos tipo O'ring.

La bomba está diseñada para soportar al ser llenada a presión con oxígeno puro, mediante válvula reductora y manómetros de alta y baja presión. Además se tuvo en cuenta que su superficie interna no se vea afectada por los productos a ensayar ni por el proceso de combustión (Figura 2).

Figura 1: Vista exterior de la bomba calorimétrica

Figura 2: Vasija calorimétrica

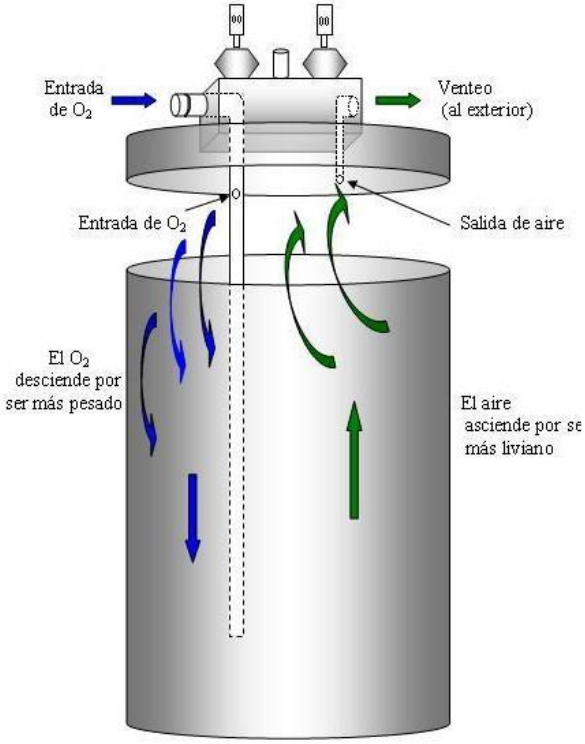


Figura 3: Vista interna de la bomba calorimétrica con circulación de oxígeno y aire.

Para la corriente de encendido se contó con un dispositivo de ignición a batería de 12 voltios, pulsado manualmente, como se observa a continuación (Figura 4).

Figura 4: Batería y pulsador

Figura 5: Bomba calorimétrica y equipo de medición

Las temperaturas fueron obtenidas con sensores tipo Pt100 (resolución 0,01ºC).

Para realzar un ensayo se introduce en la bomba un peso conocido de combustible, luego se la carga con oxígeno a presión (Figura 8), se sumerge en el baño de agua y se cierra el circuito eléctrico de ignición que inflama el combustible. El calor liberado en la combustión eleva la temperatura de la bomba y del agua.

Conociendo la elevación de temperatura y los pesos y calores específicos de las distintas partes del dispositivo puede obtenerse el poder calorífico del material estudiado.

ENSAYOS Y CÁLCULOS REALIZADOS

Determinación experimental del poder calorífico del aserrín

Como ejemplo se presentan a continuación los ensayos realizados con muestras de aserrín de Quebracho Colorado (Schinopsis Balansae).

Previo a la realización de los estudios se determinó el equivalente en agua E (capacidad calorífica de la bomba), utilizando una sustancia patrón, cuyo poder calorífico es conocido.

La sustancia utilizada para el cálculo de E fue ácido benzoico C_6H_5-CO_2H, cuyo poder calorífico es 26.550 joul/gr.

El valor calculado del equivalente en agua fue de: E = 1840,02 cal / ºC.

Una vez obtenido el equivalente en agua del calorímetro se procedió a determinar el poder calorífico del aserrín. Para ello se armó una pastilla, con el material a estudiar, sujetándola entre los 2 electrodos de platino mediante un alambre de Nicrome (80% Niquel-20% Cromo) de 0.35mm de diámetro.

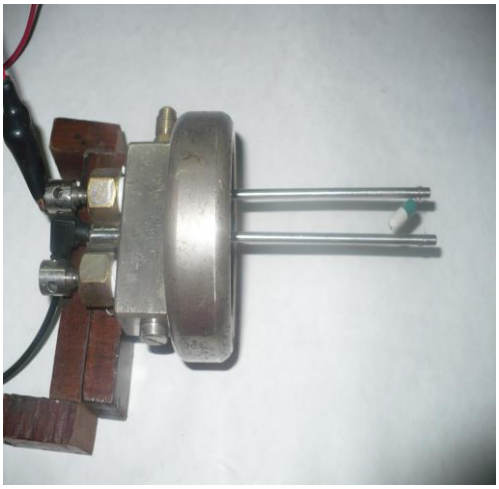


Figura 6: Cápsula de aserrín

Figura 7: Colocación de la cápsula en la bomba

Una vez introducida la cápsula en la bomba, (Figura 7) se cerró la tapa en forma manual y se ajustó mediante una llave de apriete. En la (Figura 8) se observa el tubo de oxigeno utilizado para el ensayo. Se cargó el obús con oxígeno puro a presión = 20kg/cm^2 (Figura 9), venteando previamente el aire inicial (Figura 3) para asegurarse que sólo quede oxígeno en el interior evitándose de esta manera la corrección por formación de ácido nítrico

Figura 8: tubo de oxígeno

Figura 9: carga de oxígeno a la bomba calorimétrica

Para comprobar la hermeticidad del cierre del obús se lo sumergió en agua (Figura 10).

Figura 10: prueba de hermeticidad de la bomba

Una vez preparada la bomba se introdujo en el recipiente calorimétrico rodeándolo con agua destilada hasta cubrirlo completamente (Figura 11). Se tapó el mismo y se comenzó la agitación del agua para lograr uniformidad térmica (Figura 12).

Figura 11: Inmersión de la bomba en agua destilada

Figura 12: Cierre del recipiente calorimétrico

Para finalizar se efectuó la conexión eléctrica (batería, amperímetro, pulsador) (Figura 5). Se accionó el pulsador y se produjo la explosión del combustible dentro del obús, lo cual se observó, inmediatamente, con el aumento de la temperatura del agua que rodea a la bomba. Transcurrido un tiempo la temperatura comenzó a descender levemente.

Se registraron los valores de temperatura cada minuto. Al finalizar el ensayo se destapó el obús y se midió el alambre de Nicrome que quedó sin quemar, para realizar la corrección del calor aportado por el mismo.

Por último se controló si la combustión fue completa, si quedaron cenizas y si se observaba agua líquida (microgotas, rocío) dentro de la bomba.
Con todas las lecturas realizadas se calculó el poder calorífico a través de la siguiente ecuación:

$$PCS = \frac{E.\Delta T - C_3}{m_c} \qquad (1)$$

Donde:

m_c = masa de combustible (aserrín) utilizado = 0.4537gr
Δt = variación de temperatura lograda en el ensayo = 1.10ºC
C_3 = corrección por el alambre de Nicrome utilizado = 36.8cal
E = equivalente en agua del calorímetro = 1840,02 cal / ºC

$$\Rightarrow PCS = \frac{E.\Delta T - C_3}{m_c} = 4380{,}03 Kcal / Kg$$

Dado que el valor obtenido en forma experimental mediante el calorímetro de Mahler es el poder calorífico superior en base húmeda (PCS_{bh}), se calculó el poder calorífico superior en base seca (PCS_{bs}) como:

$$PCS_{bs} = \frac{PCS_{bh}}{1 - \frac{H}{100}} = \frac{4380{,}03}{1 - \frac{11{,}82}{100}} = 4967{,}14 Kcal / kg \qquad (2)$$

Otra forma de estimar el poder calorífico de un combustible es utilizando fórmulas que lo expresan en función de las características físico-químicas del mismo.

Análisis próximo o Inmediato y elemental del Aserrín de Quebracho colorado

El análisis próximo o inmediato, comprende la obtención del contenido de Humedad, Cenizas, Materia Volátil y Carbono Fijo, y depende de una serie de ensayos, tanto directos como indirectos, que permiten obtener sus valores.

Para obtener el contenido de humedad (**CH)** se depositó la muestra de aserrín en una estufa a 105 ºC hasta que su peso permaneció constante, es decir, libre de agua y se calculó mediante fórmula el valor buscado.

Para obtener las materias volátiles (**MV)**, compuestas por la combinación de hidrógeno, carbono, y otros gases, se colocó la muestra seca en la mufla eléctrica a 550 ºC hasta que no hubo diferencia de peso entre dos pesadas consecutivas. Finalmente se obtuvo las materias volátiles conociendo los pesos seco y secado a 550ºC.

Para obtener las cenizas (**CEN)**, residuo incombustible, se continuó la quema a una temperatura de 850 ºC hasta que su peso permaneció invariable y, con estos datos, se calculó el dato esperado.

Finalmente el porcentaje de carbono fijo (**CF**) se determinó restando a 100 la suma de los porcentajes de materias volátiles y cenizas,

$$\Rightarrow \quad CF = 100\% - (MV + CEN) \qquad (3)$$

Los resultados del análisis próximo o inmediato se exponen en la tabla 2:

Tabla 1: Análisis próximo o inmediatos

ANÁLISIS INMEDIATO	**Base seca**	**Base húmeda**
Humedad Total (%)	------	11,82
Materias Volátiles (%)	62,7	55,3
Carbono Fijo (%)	34,5	30,41
Cenizas (%)	2,8	2,47

Este estudio permitió deducir el porcentaje de biomasa en la que se encuentra almacenada su energía química, como la materia volátil y el carbono fijo, y la fracción inactiva en el caso de las cenizas.

En la tabla 2 se exponen los valores característicos del análisis elemental del aserrín de Quebracho colorado (Schinopsis Balansae):

Tabla 2: Análisis elemental. (Fuente: Ogara et al., 1987; Ernitz 1961)

Análisis Elemental (% p/p en base seca)			
C	H	O	N
52,7	5,8	40,2	0,2

Para poder corroborar los valores del poder calorífico se compararon los resultados obtenidos en forma experimental con los obtenidos a través de las ecuaciones de Dulong (Kollman, 1959) Francis y LLoyd (Díaz, 2008), Milne (Rabou et al., 2002) y Christensen (Rasmussen, 2004) en las que se calculó el poder calorífico en función del análisis elemental y el análisis inmediato. A continuación se expresan las ecuaciones empleadas y los resultados obtenidos utilizando las tablas (1) y (2):

Ecuación de Dulong:

$$PCS = 8100.C + 34000(H - \frac{O}{8}) + 2500.S = 4535 Kcal/kg \quad (4)$$

Ecuación de Francis y Lloyd:

$$PCS = 0{,}3578.C + 1{,}1356.H + 0{,}0594N - 0{,}0845.O - 0{,}974 = 5037 Kcal/kg \quad (5)$$

Ecuación de Milne:

$$PCS = 341.C + 1322.H - 120.O - 120.ON + 68{,}6.S - 15{,}3.CEN = 4958{,}3 kcal/kg \quad (6)$$

Ecuación de Christensen:

$$PCS = 348.C + 939.H + 105.S + 63.N - 108.O - 24{,}5.CH = 4581{,}6 Kcal/kg \quad (7)$$

Donde: C, H, O, N, S, CEN, CH son los porcentajes de carbono, hidrógeno, oxígeno, nitrógeno, azufre, cenizas y contenido de humedad, respectivamente.

CONCLUSIÓN

Con la utilización de la bomba calorimétrica de Mahler se ha obtenido el poder calorífico del aserrín de madera de Quebracho Colorado (Schinopsis Balansae).

Para confirmar el valor del poder calorífico logrado en forma experimental, se lo comparó con el poder calorífico calculado en forma teórica a partir de ecuaciones empíricas expresadas en función del análisis elemental y del análisis próximo o inmediato.

Las diferencias entre los valores calculados y el obtenido calorimétricamente están dentro de los rangos aceptados, según la bibliografía. Estas diferencias se deben principalmente al contenido de oxígeno que es además, en algunas especies, muy variable. Para algunas maderas las discrepancias llegan a ser del 10 al 15% (Kollman. 1959). Los datos alcanzados se consideran satisfactorios, teniendo en cuenta que son los primeros resultados logrados con la bomba calorimétrica de Mahler.

Los resultados alcanzados durante los ensayos con aserrín de madera de Quebracho Colorado (Schinopsis Balansae), permiten inferir que la utilización de este producto, como alternativa para la producción de energía, mejoraría no sólo las condiciones ambientales y de seguridad sino también aportaría una solución a la industria de la madera y estimula al grupo de investigación a seguir incursionando en la evaluación energética de recursos regionales.

BIBLIOGRAFÍA

Christensen, T. H., 1998 ed., Affaldsteknologi (in Danish), 2nd edition, Ingeniøren bøger, , ISBN 87-571-2148-6.

Díaz R., 2008. Caracterización energética del Bagazo de Caña de Azúcar del Ingenio Valdez. Ecuador. Curso Internacional "Producción y Aprovechamiento Energético de Biomasa". Septiembre de 2008. Riobamba – Ecuador.

Ernitz A. 1961. Manual de Maderas. Editorial Alsina. Buenos Aires. ISBN: 9789505530038. p.58.

García, C., (2002) Termodinámica Técnica, Editorial Alsina, pp. 336.

Kollmann F, 1959 Technologie des Holzes und der Holzwerkstoffe, Springer Verlag, Berlin,. Tecnología de la Madera y sus Aplicaciones. pp 260-281

Márquez F. Cordero T., Rodríguez J., Rodríguez J. 2001 Estudio Del Potencial Energético De Biomasa Pinus Caribaea Morelet Var. Caribaea (Pc) Y Pinus Tropicalis Morelet (Pt); Eucaliptus Saligna Smith (Es), Eucalyptus Citriodora Hook (Ec) Y Eucalytus Pellita F. Muell (Ep); De La Provincia De Pinar Del Río. Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales y del Ambiente 7(1):pp: 83-89.

Martina P., Aeberhard R. Corace J., García Solá. E., (2011). Diseño y Construcción de un Calorímetro de Junkers para Determinación del Poder Calorífico del Biogás. Avances en Energías Renovables y Medio Ambiente, vol 15, ISSN 0329-5184

Norma IRAM 17016, Método de Determinación del Poder Calorífico.

Ogara, M.R., Berset, A., Gronhut, E. 1987. La biomasa forestal como fuente de energía. Sistemas y posibilidades. 11 Jornadas Mes Forestal de Entre Ríos. Concordia. 4.1 - 4.34.

Rabou L., Van der Drift A., Van Doorn J., 2002. Analysis of biomass data in ECN database Phyllis, ECNRX- 02-014. June, Amsterdam, the Netherlands.

Rasmussen A., 2004. Final report Waste Incineration.Thesis to obtain the Master of Science. Deparment of Chemical Engineering of University of Denmark, 2004.

Relova I., Hernández E., García J., Cándano F., Coro R., Fernández L. 2000. Potencial de aserrín de la industria del aserrado de *Pinus Caribaea var. Caribaea* con fines energéticos Centro de Información y Gestión Tecnológica. CIGET Pinar del Río. Vol. 2, No.1 enero-marzo, 2000. ISSN 1562-3297

SOBRE LA CONSTRUCCIÓN DE REGIONES DE ESTABILIDAD

Luciano M. Lugo

Juan E. Nápoles Valdés

Samuel I. Noya

Recibido:02 de noviembre 2013
Aceptado: 10 de diciembre 2013

SOBRE LA CONSTRUCCIÓN DE REGIONES DE ESTABILIDAD

Luciano M. Lugo [(1)]; Juan E. Nápoles Valdés [(1) (2)] y Samuel I. Noya [(1)]
lmlmb@yahoo.com.ar; jnapoles@exa.unne.edu.ar; samuelivannoya@gmail.com

[(1)] Facultad de Ciencias Exactas
UNNE, Av. Libertad 5540
(3400) Corrientes ARGENTINA

[(2)] Facultad Regional Resistencia
UTN, French 414
(3500) Resistencia ARGENTINA

RESUMEN

En este trabajo se comparan algunas de las regiones de estabilidad construidas alrededor del punto de equilibrio que proponen distintos autores para asegurar la estabilidad y el acotamiento de las soluciones, en el sentido de Lyapunov, de la Ecuación de Liénard.

Palabras clave: Lyapunov, trayectorias, equilibrio asintótico.

1. INTRODUCCIÓN

El Segundo Método de Lyapunov se ha establecido como el método más general para el estudio de la estabilidad de las posiciones de equilibrio de sistemas descritos por ecuaciones (o sistemas) diferenciales, en diferencias o funcionales. Este método pareció en la clásica memoria de Alexander Mijaílovich Lyapunov[1], publicada en ruso en 1892 y traducida al francés en 1907 (reimpresa más de 40 años más tarde[2]). Un papel fundamental en este trabajo lo juegan las llamadas *Funciones de Lyapunov* (funciones de energía desde el punto de vista físico) funciones que son de signo definido y cuya derivada a lo largo del sistema en estudio es de signo constante, contrario al de la función. Una excelente fuente para el estudio de este método es el renombrado texto de Yoshizawa de los años 60. El estudio cualitativo de un sistema no lineal, ya sea no autónomo:

$$\dot{x} = F(x, t);\ x \in R^n$$

O autónomo

$$\dot{x} = F(x);\ x \in R^n \qquad (1)$$

consiste en el análisis del comportamiento de sus soluciones x=x(t) para todo t≥0, aún sin conocer la expresión explícita de dichas soluciones. Dos de las propiedades cualitativas más estudiadas son la estabilidad y el acotamiento (también llamada prolongabilidad o continuabilidad):

En nuestro trabajo serán útiles las siguientes definiciones[3].

[1] Nació el 6 de Junio de 1857 en Yaroslavl, Rusia y murió el 3 de Noviembre de 1918 en Odessa, Rusia.
[2] Ver Lyapunov (1949).
[3] Ver Yoshizawa (1966).

La solución x=x*(t) de (1) será *estable según Lyapunov*, si y sólo sí dado un $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que cualesquiera sea la solución x(t) de (1), se cumple que si $\left|x^*(t_0)-x(t_0)\right|<\delta$ entonces $\left|x^*(t)-x(t)\right|<\varepsilon$, $\forall t\geq t_0$.

La solución x=x*(t) de (1) será *estable asintóticamente según Lyapunov*, si y sólo sí es estable y se cumple que $\lim_{t\to+\infty}\left|x^*(t)-x(t)\right|=0$.

Observación 1. El valor de δ permite definir una vecindad de $x^*(t_0)$, comúnmente llamada *base de atracción*. Si esta vecindad coincide con todo el espacio, entonces se dice que es estable asintóticamente *en sentido global*.

Una solución de la ecuación diferencial será *prolongable o continuable* si y sólo $\forall T>0$ se verifica $\lim_{t\to T^-} x(t)<\infty$.

Una forma de asegurar que estas propiedades se cumplirán para todas las soluciones del sistema, es proponer una región acotada Ω alrededor del punto de equilibrio en la cual permanecerán todas aquellas que comiencen en Ω, es decir, si $x(0)\in\Omega$, entonces $x(t)\in\Omega$, para todo t>0. a lo largo del trabajo, y por comodidad, tomaremos $t_0=0$.
En este trabajo consideraremos la Ecuación de Liénard:

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=0;\ x\in\mathbf{R},\ t\geq 0 \qquad (2)$$

en la cual la función f es continua, la función g es derivable y se cumplen las siguientes condiciones:

a) $f(x)>0$, si $x\neq 0$,
b) $xg(x)>0$, si $x\neq 0$.

Para llevar esta ecuación a la forma (1), hacemos $F(x)=\int_0^x f(u)\,du$ e introducimos la variable $y=\dot{x}+F(x)$, con lo cual esta ecuación se transforma en el sistema:

$$\begin{cases}\dot{x}=y-F(x)\\ \dot{y}=-g(x)\end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden tiene al origen como único punto de equilibrio, por lo que las propiedades estarán referidas a la solución trivial x(t)=y(t)=0.
En nuestro trabajo necesitaremos los siguientes resultados básicos[4].

[4] Ver los Teoremas 4 y 5 de LaSalle (1960).

Teorema A. Sea Ω una vecindad acotada del origen de y sea Ω^c su complemento. Si W(x) es una función escalar con primeras derivadas parciales continuas en Ω^c y satisface:

1) $W(x)>0$, $\forall x\in\Omega^c$,
2) $W'(x)\leq 0$, $\forall x\in\Omega^c$,
3) $W(x)\to\infty$ cuando $||x||\to\infty$.

Entonces, toda solución de (1) es acotada para $t\geq 0$.

Teorema B. Sea V(x) una función escalar con primeras derivadas parciales continuas que satisface las siguientes condiciones:

1) $V(x)>0$, $\forall x\neq 0$,
2) $V'(x)\leq 0$, $\forall x$,
3) $V(x)\to\infty$ cuando $||x||\to\infty$.

Y si V´ no es idénticamente cero sobre cualquier solución distinta de la trivial, entonces el sistema (1) es completamente estable[5].

La principal dificultad para usar el Teorema B es que no siempre puede construirse una Función de Lyapunov que cumpla los tres requerimientos. De ahí que es mucho más fácil estudiar el acotamiento de las soluciones como un problema independiente, de donde surge la necesidad de construir regiones apropiadas donde podamos garantizar el acotamiento de las mismas.
El objetivo de este trabajo es sumarizar la evolución de los métodos utilizados en los últimos 50 años para construir la región de estabilidad, así en los siguientes apartados se describirán tres regiones propuestas por distintos autores para asegurar la estabilidad y el acotamiento de las soluciones. Para ello se presentará la demostración del primer resultado y se esbozarán las otras dos.

2. REGIÓN 1[6].

Teorema 1. Bajo las condiciones a) y b) si se cumple que

$$|F(x)|=\left|\int_0^x f(u)\,du\right|\to+\infty \text{ cuando } |x|\to\infty,$$

entonces, todas las soluciones de (2) son estables y acotadas.

Demostración. Sea una solución (x(t),y(t)), y sean los números reales positivos l y a tales que el punto inicial (x(0), y(0)) $\in\Omega$, siendo Ω la región:

$$\Omega=\left\{(x,y)\in R^2 \;/\; V(x,y)=\frac{1}{2}y^2+G(x)<l \;\wedge\; (y+F(x))^2<a\right\}$$

[5] Prolongable para nosotros.
[6] LaSalle (1960).

La función V(x, y) es una **Función de Lyapunov** ya que es fácil ver que V(x,y)>0 en todo punto distinto del origen, V(0,0)=0 y su derivada con respecto a t a lo largo de las trayectorias del sistema es definida negativa:

$$\dot{V}(x,y) = y\dot{y} + g(x)\dot{x} = -yg(x) + g(x)\left(y - F(x)\right) = -g(x)F(x) \leq 0,\ \forall (x,\ y) \in \mathbf{R}^2, \qquad (3)$$

Para l y a arbitrarios, Ω es una región acotada[7]. Sea (x(t),y(t) cualquier solución que "comience" en Ω. Entonces la solución no puede abandonar Ω sin cruzar su frontera, o sea, V=l ó y+F(x)=a, y+F(x)=-a. Podemos seleccionar a suficientemente grande de tal forma que y+F(x)=a corresponda a x>0 y que y+F(x)=-a corresponda a x<0 (ver Fig. 1). De (3) es claro que ninguna solución que comience dentro de Ω puede cruzar V=l.

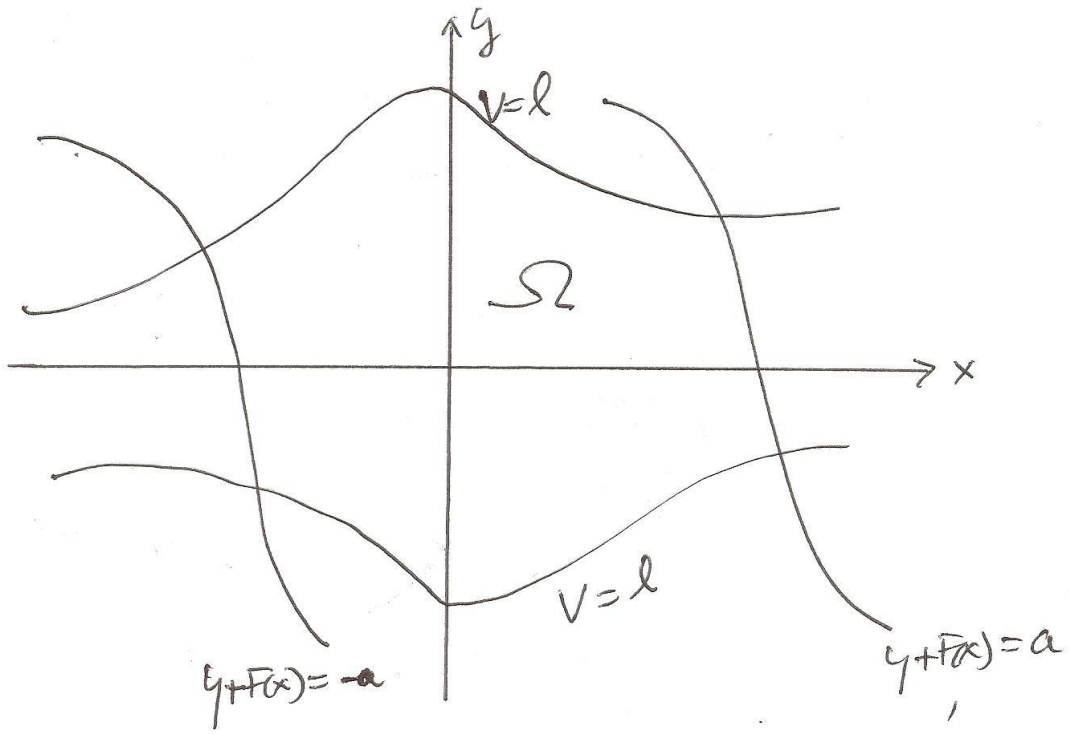


FIGURA 1

Luego, debemos analizar en el resto de la frontera de Ω. Así, en la parte del borde $(y+F(x))^2 = a^2$ hacemos el mismo cálculo:

$$\frac{d}{dt}(y+F(x))^2 = 2(y+F(x))\left(\dot{y} + f(x)\dot{x}\right) = 2(y+F(x))\left(-g(x) + f(x)(y-F(x))\right) =$$

$$= 2\left(-\underbrace{g(x)(y+F(x))}_{>0} + f(x)(y-F(x))(y+F(x))\right) = -2a|g(x)| < 0$$

[7] Ver Miller and Michel (1982).

Ambas derivadas nos muestran que las soluciones no pueden abandonar la región Ω, con lo que dicha región asegura la estabilidad y la continuabilidad de las soluciones de la Ecuación de Liénard.

Observación 2. Si consideramos (2) sometida a una fuerza externa $x''+f(x)x'+g(x)=p(t)$ bajo la condición adicional que p es continua y de clase $L^1[0,+\infty)$, este teorema sigue siendo válido sin prácticamente ningún cambio[8].

3. REGIÓN 2[9].

Teorema 2. Bajo las condición b) supongamos que

$$\exists\ a>0/\ 0<|x|<a \Rightarrow xF(x)>0.$$

entonces, todas las soluciones de (2) son estables y acotadas.

Observación 3. Es fácil darse cuenta que la condición que se considera es más general que a).

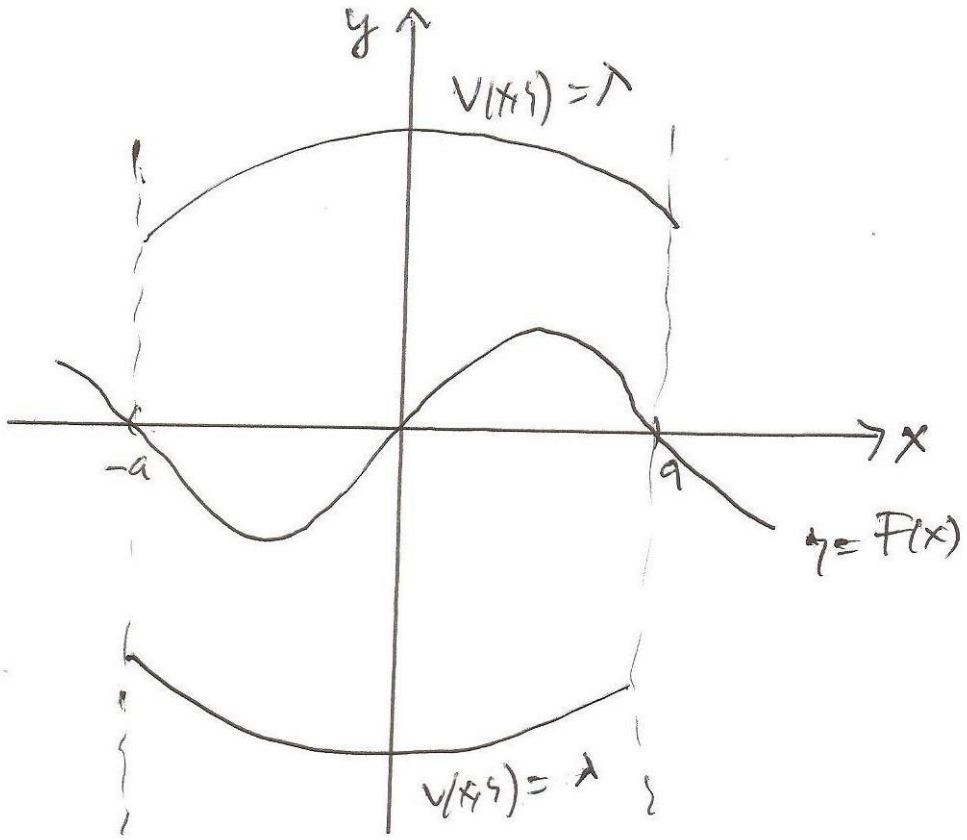


FIGURA 2

[8] Ver Hasan and Zhu (2007).
[9] Consultar Yadeta (2013).

Para la demostración de este resultado se considera la misma Función de Lyapunov $V(x,y)=\frac{1}{2}y^2+G(x)$. Tomemos Ω como la siguiente franja infinita:

$$\Omega = \left\{(x,y)\in R^2 \ / \ -a\le x\le a\right\}$$

En esta región se tiene:

$$\dot{V}(x,y) = y\dot{y} + g(x)\dot{x} = -yg(x)+g(x)\left(y-F(x)\right) = -g(x)F(x)\le 0.$$

Luego también se cumplirá $\dot{V}(x,y)\le 0$ en cualquier subconjunto de Ω. Sea entonces una región C_λ definida por $C_\lambda = \left\{(x,y)\in R^2 \ / \ V(x,y)\le\lambda\right\}$, donde λ es un número real positivo tal que $C_\lambda \subset \Omega$. Es fácil ver que el mejor valor del parámetro λ es el menor valor entre G(a) y G(–a). Nuevamente la no positividad de la derivada de V garantiza la estabilidad y la continuabilidad de las soluciones que empiecen en C_λ (ver Fig. 2).

4. REGIÓN 3[10].

Teorema 3. Bajo las condiciones a) y b) si se satisface que

$$f\in F_{\lambda,g}(R)=\{f\in C(R)/f(x)-\lambda g(x)>0 \text{ si } x>0;\ f(x)+\lambda g(x)>0 \text{ si } x<0\},$$

entonces todas las soluciones de (2) son estables y acotadas.

Para la demostración, dada una solución (x(t),y(t)) con la condición inicial $(x(0),y(0))=(x_0,y_0)$, la región que se propone es:

$$\Omega_k^G = \left\{(x,y)\in R^2 \ / \ \alpha\le x\le\beta \ ; \ |y|\le -kG(x)+\frac{1}{k}\right\},$$

donde k es un número real positivo que satisface la ecuación cuadrática $y_0=-kG(x_0)+\frac{1}{k}$; y α y β son las soluciones de la ecuación $G(x) = \frac{1}{k^2}$ (nótese que la ecuación que se propone para hallar el valor de k es equivalente a pedir que la solución "empiece" en el borde de la región).
Calculemos las pendientes del borde de esta región:

$$-kg(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{g(x)}{\dot{x}} \quad\Rightarrow\quad \dot{x} = \frac{1}{k} \quad \text{si } y > 0$$

$$kg(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = -\frac{g(x)}{x'} \quad\Rightarrow\quad \dot{x} = -\frac{1}{k} \quad \text{si } y < 0$$

[10] Ver Lugo, Nápoles and Noya (2013).

Estos valores de $\dot{x}$ son los necesarios para que la trayectoria de una solución que intersecte al borde, sea tangente a él. Es decir que si se toma

$$\dot{x} < \frac{1}{k} \quad \text{si } y>0 \quad ; \quad \dot{x} > -\frac{1}{k} \quad \text{si } y<0$$

Las trayectorias que comiencen en el borde de esta región "caerán" hacia el interior de la misma; lo cual asegura la estabilidad y continuabilidad de la solución considerada al principio (ver Fig. 3).

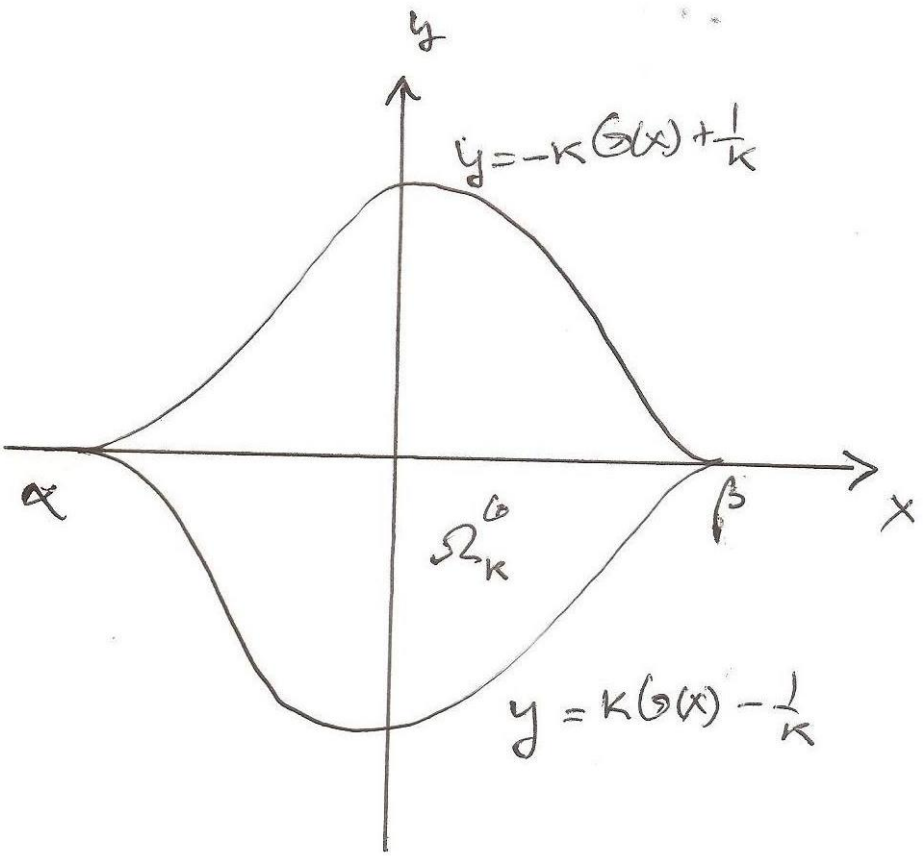


FIGURA 3

5. OBSERVACIONES FINALES.

- La Región 1 tiene 4 puntos de intersección entre los bordes propuestos, y en esos puntos no se puede hablar de derivadas.
- La Región 2 no tiene ese problema pero, como el valor de a está fijado de antemano, la región C_λ que propone no puede abarcar todas las soluciones de la ecuación.

- La Región 3 tiene la ventaja de que no se necesitó definir una Función de Lyapunov y, además, abarca cualquier solución de la ecuación, ya que dicha región se construye cuando se tiene la condición inicial. La desventaja es que tiene 2 puntos de intersección entre los bordes propuestos, donde tampoco se puede hablar de derivadas.
- Como un intento para superar los señalado más arriba, Guidorizzi construyó una familia de Funciones de Lyapunov[11] que extendimos[12] a la Ecuación de Liénard no autónoma x´´+f(x)x´+a(t)g(x)=0 tomando como Función de Lyapunov a la familia

$$V_\alpha(t,x,y)=\frac{1}{a(t)}W_\alpha(x,y)+G(x).$$

Siendo $G(x)=\int_0^x g(s)ds$ y $W_\alpha(x,y)=\int_0^{y-F(x)}\frac{sds}{\alpha s+1}$ lo que nos permite definir Ω_α como los siguientes conjuntos:

$\Omega_\alpha \equiv \mathbf{R}^2$ si $\alpha\equiv 0$,
$\Omega_\alpha=\{(x,y): y>F(x)-\alpha^{-1}\}$ si $\alpha>0$,
$\Omega_\alpha=\{(x,y): y<F(x)-\alpha^{-1}\}$ si $\alpha<0$.

6. REFERENCIAS.

Acosta, J., L. M. Lugo, J. E. Nápoles V. and S. I. Noya (2013)-"On some qualitative properties of a nonautonomous Liénard equation", dado a publicar.
Guidorizzi, H. L. (1996)-"The family of functions $S_{\alpha,k}$ and the Liénard equation", Tamkang J. of Math. 27, 37-54.
Hasan, Y. Q. and L. M. Zhu (2007)-"The bounded solutions of Liénard equation", J. Applied Sciences 7(8), 1239-1240.
LaSalle, J. P. (1960)-"Some Extensions of Lyapunov's Second Method", IRE Transactions on Circuit Theory, Dec, 520-527.
Lugo L. M., J. E. Nápoles V. and S. I. Noya (2013)-"About a region of boundedness for some nonautonomous Lienard's Equation", Trabajo presentado en la reunion Annual UMA, Rosario, 17-20 de septiembre.
Lyapunov, A. M. (1949)-"Problème general de la stabilité du movement", Annals of Math. Studies, No.17, Princeton University Press, Princeton, N.J.
Miller, R. K. and A. N. Michel (1982)-„Ordinary Differential Equation", New York, Lawa Stat University.
Yadeta, Z. (2013)-"Lyapunov´s Second Method for Estimating Region of Asymptotic Stability", Open Science Repository Mathematics, online, doi: dx.doi.org/10.7392/Mathematics.70081944, disponible en http://www.open-science-repository.com/lyapunovs-second-method-for-estimating-region-of-asymptotic-stability.html
Yoshizawa, T. (1966)-"Stability theory by Liapunov´s Second Method", The Math. Soc. of Japan.

[11] Guidorizzi (1996).
[12] Ver Acosta, Lugo, Nápoles and Noya (2013).