ISSN 1853-1385

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE
FACULTAD DE INGENIERÍA

INSTITUTO DE MATEMATICA

CIENCIAS BASICAS EN INGENIERIA

REVISTA DIGITAL SEMESTRAL

Nº 11 – AÑO 6 JUNIO DE 2014

ISSN Nº 1853-1385

CIENCIAS BASICAS EN INGENIERIA

Revista Digital del Instituto de Matemática

Publicación Semestral

Director:
Prof. Antonio B. MAHAVE

Consejo Editor:
Dr. Ing. Jorge V. PILAR
Ing. Gustavo DEVINCENZI
Dr. Rubén CERUTTI
Dr. Juan NÁPOLES VALDÉS
Prof. Cdora. Carmen RESCALA
Ing. Emilio GARCIA SOLÁ
Dr. Ing. Mario E. De BÓRTOLI

Instituto de Matemática – Facultad de Ingeniería – U.N.N.E.
Las Heras 727 – Resistencia, Chaco (3500) – Republica Argentina
Director: Antonio Mahave – Facultad de Ingeniería – Las Heras 727
Tel. 03722 – 425064; 420076
e-mail: mahave@ing.unne.edu.ar

INDICE

NORMAS PARA LA PRESENTACIÓN DE ARTÍCULOS EN LA REVISTA

COMITÉ DE REFERATO

INFORMACIÓN SOBRE EL IV CAIM 2014

MEDICIONES DE ALGUNOS PARÁMETROS HIGROTERMICOS Y AMBIENTALES EN EL EDIFICIO DE LA FACULTAD DE RECURSOS NATURALES DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE FORMOSA
Martina Pablo, Cóceres Héctor, Alías Herminia, Barreto David, Corace Juan José

INTEGRALES DOBLES ES LO MISMO QUE INTEGRALES SUCESIVAS?
Milena M. Balbi, Gricela A. Rohde

LA REGRESIÓN LINEAL MÚLTIPLE Y LA INFLUENCIA DE LAS VARIABLES DE COMPETITIVIDAD EN EL PRODUCTO BRUTO GEOGRÁFICO ARGENTINO
Germán E. Camprubi - David Vera

BREVE TRATADO DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER. APLICACIONES A CIRCUITOS
Rufino Iturriaga- Ethel Carina Jovanovich

ALGUNAS NOTAS HISTÓRICAS SOBRE EL CÁLCULO DEL NÚMERO π
Miguel Cruz Ramírez, José María Sigarreta Almira, Osvaldo Jesús Rojas Velázquez

EL JUEGO CON FIGURAS GEOMÉTRICAS: UNA ALTERNATIVA DIDÁCTICA EN ALUMNOS CON DÉFICIT INTELECTUAL LEVE
Mayelín Caridad Martínez Cepena, Miguel Cruz Ramírez, Yohannia Ochoa Ardite

REVISTA DEL INSTITUTO DE MATEMATICA

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE

Rector:
Ing. EDUARDO DEL VALLE

Vicerrectora:
Prof. MARIA D. VEIRAVE

FACULTAD DE INGENIERIA

Decano:
Ing. JOSE L. BASTERRA
Vicedecano:
Ing. ARTURO A. BORFITZ
Secretario Académico:
Ing. ARTURO A. BORFITZ
Sec. Administrativo:
Cdor. DANIEL ASULAY
Sec. De Extensión Universitaria
Prof. JUAN JOSE CORACE

INSTITUTO DE MATEMATICA

Director:
Prof. ANTONIO B. MAHAVE

Vicedirectora:
Ing. MARTA GIRAUDO

- RESOLUCION Nº 070/09
RESISTENCIA, 21 ABRIL 2009

VISTO:

El Expte. Nº 27-2008-04196, por el que el Director del Instituto de Matemática solicita la aprobación de las "Normas para las publicaciones en la Revista del Instituto" y acuerdo para la designación de la Comisión de Referato y;

CONSIDERANDO

Que los proyectos elevados por el Director del Instituto, con las modificaciones que oportunamente sugiriera la Comisión de Posgrado de esta Facultad con total acuerdo del primero, se ajustan a las necesidades de organización de las publicaciones periódicas a las que se hace referencia;

Que los antecedentes académicos y científicos de los integrantes propuestos de la Comisión de Referato avalan suficientemente la propuesta;

El Dictamen favorable de la Comisión de Enseñanza e Investigación;

Lo aprobado en Sesión Ordinaria del día de la fecha;

POR ELLO:

EL CONSEJO DIRECTIVO DE LA FACULTAD DE INGENIERIA
R E S U E L V E :

Artículo 1º.- APROBAR las "Normas para la presentación de artículos" para las publicaciones periódicas, Revista del Instituto de Matemática, ISSN 1850-9827 y "Ciencias Básicas en Ingeniería", Revista Digital, actualmente en preparación, que figura en el Anexo I de la presente Resolución.

Artículo 2º.- PRESTAR acuerdo a la designación de los miembros del Comité de Referato, para las publicaciones referidas en el articulo anterior, que figuran como Anexo II de la presente Resolución.

Artículo 3°.- REGÍSTRESE, comuníquese al Instituto de Matemática y cumplido, archívese.-

hjm.-

\\\...2.-

ANEXO I

NORMAS PARA LA PRESENTACION DE ARTÍCULOS

1) Los artículos se remitirán por correo electrónico al Director de la Revista ó en su defecto por correo postal una copia y CD, a la siguiente dirección:
Revista del Instituto de Matemática – Facultad de Ingeniería – Universidad Nacional del Nordeste.
Las Heras 727 – Resistencia – Chaco
C.P. 3500

La presentación de los trabajos deberá contar con:
a) Identificación del(los) autor(es): Nombre completo, Institución a la que pertenece, localidad, dirección de contacto (incluyendo la electrónica)
Pequeño texto de presentación de los autores (cargos actuales, línea de trabajo, contribuciones al campo de estudio, etc.) (Extensión no mayor a media pagina).
b) Título del artículo; en idioma español.
c) Resumen: Texto breve (de hasta 100 palabras) de descripción de objetivos, métodos y principales resultados y conclusiones. Ha de presentarse en idioma español, pudiendo opcionalmente hacerlo además en los idiomas ingles o portugués.
d) Palabras claves: hasta cinco.
e) Referencias: Se ajustarán a la normativa APA (Manual de publicación, 5º ed, 2001). (http://apastyle.apa.org/)
f) Tablas, imágenes e ilustraciones: Se incluirán en su lugar correspondiente en un formato compatible con su edición en Internet, identificándolas.

2) Los trabajos enviados deberán ser inéditos o con escasa difusión, (informando en este caso que otros mecanismos de divulgación han sido o están siendo utilizados).

3) La recepción de un trabajo no implicará compromiso de esta revista para su publicación.

4) El Comité Editorial procederá a la selección de los trabajos de acuerdo con criterios formales y de contenidos.

5) El envío de un artículo para su publicación, implica la autorización por parte del autor, de la reproducción del mismo por cualquier medio, en cualquier soporte y en el momento en que el Instituto lo considere conveniente, salvo expresa notificación en contrario del autor. En todos los casos la publicación mencionará a su autor(es), y el trabajo no será modificado una vez aprobado.

6) Los trabajos se aceptarán en formato WORD 97-2003, WORD 2007

7) Los artículos tendrán una extensión de hasta diez (10) páginas, incluidos las tablas, las figuras y los anexos. Como excepción la Revista podrá publicar algún trabajo de mayor extensión. Los trabajos deberán estar escrito con formato en fuente Times New Roman, tamaño 12 puntos para el cuerpo y 14 en mayúscula negrita para los títulos,

interlineado simple, alineación justificado y en hoja tamaño DIN A4. Los márgenes inferior, superior, izquierdo y derecho serán de 3 cm. Todas las páginas deberán estar numeradas en el ángulo inferior derecho. No deberá contener encabezados ni pies de páginas.

8) Deberá indicarse el tratamiento de texto utilizado y si incluye símbolos, tablas o gráficos, se especificará el programa de diseño empleado.

9) Los artículos enviados para ser publicados serán evaluados en una primera instancia por el Director con los miembros del Comité Editorial, el que podrá rechazarlo; en caso de aceptación previa, enviará el artículo a evaluación externa (Miembros del Comité de Referato). A partir de los informes obtenidos decidirá sobre la publicación del trabajo, la información al autor de las observaciones planteadas por los revisores a los efectos de que considere posibles modificaciones; o su no publicación. En cualquier caso, se informará lo antes posible a los autores, particularmente en el caso de rechazo (y eventualmente, acompañando sugerencias para su posible publicación).

COMITÉ DE REFERATO

Publicaciones periódicas permanentes

Dr. Iran Abreu Mendes - Universidade Federal do Rio Grande do Norte y Universidade Federal do Pará, Brasil.

Dr. Rubén Cerutti - Facultad de Ciencias Exactas Naturales y Agrimensura. UNNE

Dr. Ing. Mario De Bortoli. - Facultad de Ingeniería. UNNE.

Ing. Emilio García Solá - Facultad de Ingeniería. UNNE

Lic. Liliana Koegel - Facultad de Ciencias Económicas. Universidad Nacional de Rosario.

Dra. Luisa Lazzari - Facultad de Ciencias Económicas. Universidad de Bs. As.

Lic. Mgter. Blanca Lezana - Universidad Nacional de Tucumán

Ing. Víctor Martínez Luaces - Universidad de la República del Uruguay

Dr. Juan Eduardo Nápoles Valdés - Universidad Nacional del Nordeste y Universidad Tecnológica Nacional.

Dr. Ing. Mario Bruno Natalini. - Facultad de Ingeniería. UNNE

Dra. Claudia Lisete Oliveira Groenwald - Universidade Luterana do Brasil, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Campus Canoas.

Dr. Ing. Jorge Víctor Pilar - Facultad de Ingeniería. UNNE

Dr. Ing. Adrian R. Wittwer - Facultad de Ingeniería. UNNE

Ing. Gustavo H. Devincenzi - Facultad de Ingeniería. UNNE

Prof. Mgter Viviana Yaccuzzi Polisena – Universidad Nacional del Nordeste

Lic. Jorge Enrique Sagula – Universidad Nacional de Lujan

Mgter Gloria Santa Nuñez – Universidad Nacional del Nordeste

CAIM 2014

IV CONGRESO ARGENTINO DE INGENIERÍA MECÁNICA
Del 2 al 5 de Septiembre de 2014

A menos de tres meses para dar inicio al IV CAIM, el Comité Organizador conformado por autoridades; docentes, no docente y alumnos de nuestra Facultad, se encuentra dedicado a pleno a la organización del evento. Asimismo se vienen desarrollando arduas tareas en el seno del Comité Científico en lo que respecta a la revisión y corrección de los trabajos presentados, los que son evaluados por prestigiosos académicos del orden nacional e internacional, entre los cuales nuestra Facultad tiene el honor de ser representada a través de sus evaluadores.

Innovar, imprimir un antes y un después, es y será la premisa propuesta por el Comité Organizador, generando expectativas de alto grado en toda la comunidad científica, siendo esto demostrado por el alto nivel de convocatoria de asistentes y expositores de las distintas áreas temáticas que abarca el Congreso, con más de 260 resúmenes de trabajos presentados por autores locales y de países tales como Brasil, México, Colombia, Guatemala, Ecuador, Venezuela, y Uruguay entre otros, además de contar con el interés de participación de diversos grupos estudiantiles de las carreras de ingeniería Mecánica y Electromecánica de las Facultades UTN Regional Córdoba y Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología de la Universidad Nacional de Tucumán.

En el ámbito gubernamental, hemos recibido gratamente declaración de interés del evento por parte de la Honorable Cámara de Diputados de la Provincia del Chaco, el Instituto de Turismo de la Provincia del Chaco, la Municipalidad de la ciudad de Resistencia y Municipalidad de la ciudad de Corrientes, así como también el apoyo espontáneo de organismos e instituciones no gubernamentales, como la Unión Industrial Argentina y la Unión Industrial del Chaco.

Poco tiempo queda para dar inicio a tan importante evento, lejos queda en distancias de hechos aquella idea de participar en la convocatoria para ser sede del IV CAIM. Lo plasmado en un formulario, hoy se refleja en un equipo de recursos humanos que viene trabajando dispuesto a dar lo mejor de sí en beneficio de nuestra Institución, enalteciéndola, y con ella, a toda nuestra comunidad. Invitamos a todos a brindar su apoyo a tan prestigioso evento.

Comité Organizador IV CAIM

E-mail: caim2014@ing.unne.edu.ar
Página Oficial: http://caim2014.unne.edu.ar

MEDICIONES DE ALGUNOS PARÁMETROS HIGROTERMICOS Y AMBIENTALES EN EL EDIFICIO DE LA FACULTAD DE RECURSOS NATURALES DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE FORMOSA.

MARTINA, Pablo[1] – CÓCERES, Héctor[2] - ALÍAS, Herminia[3]; - BARRETO, David[4] - CORACE, Juan José[5] - ARCE, Jorge[6] - COMEZAÑA, Carlos[7]- RAFANIELLO CAPRA, José[8]

Recibido 19 de mayo de 2014
Aceptado 04 de junio de 2014

MEDICIONES DE ALGUNOS PARÁMETROS HIGROTERMICOS Y AMBIENTALES EN EL EDIFICIO DE LA FACULTAD DE RECURSOS NATURALES DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE FORMOSA.

MARTINA, Pablo[1] – CÓCERES, Héctor[2] - ALÍAS, Herminia[3]; - BARRETO, David[4] - CORACE, Juan José[5] - ARCE, Jorge[6] - COMEZAÑA, Carlos[7]- RAFANIELLO CAPRA, José[8]

1. Ingeniero Electromecánico. Docente (Jefe de Trabajos Prácticos) e Investigador (cat. III - CIN) Secretaría General de Ciencia y Técnica (SGCyT) - Universidad Nacional del Nordeste (UNNE). Grupo de Investigación y Desarrollo de Energías Renovables (GIDER). Depto. de Termodinámica. Facultad de Ingeniería (FI) - UNNE. Resistencia, Chaco. Se desempeña en el área de energías renovables. pablo@ing.unne.edu.ar

2. Ingeniero en construcciones. Magíster en Ciencias de la Ingeniería - Orientación Estructuras Docente (Profesor Titular) – Investigador (cat. IV - CIN). Facultad de Ingeniería (FI) y Facultad de Arquitectura (FAU) – UNNE, Resistencia, Chaco y Facultad de Recursos Naturales (FRN) de la Universidad Nacional de Formosa (UNaF), Formosa. Se desempeña en el área de cálculos y verificaciones de estructuras de edificios. h_coceres@yahoo.com.ar

3. Arquitecta. Magíster en Gestión Ambiental. Especialista en Docencia Universitaria. Docente (Profesora Adjunta) e Investigadora (cat. III – CIN) Secretaría General de Ciencia y Técnica (SGCyT) - UNNE. Área de la Tecnología y la Producción. Facultad de Arquitectura y Urbanismo (FAU). Universidad Nacional del Nordeste (UNNE). Resistencia, Chaco. Se desempeña en el área de eficiencia energética en la edificación. heralias@arq.unne.edu.ar

4. Becario de investigación. Carrera de Ingeniería Civil de la FRN de la Universidad Nacional de Formosa (UNaF). Formosa. Miembro del equipo técnico de proyecto de investigación acreditado UNaF, responsable de la instalación de instrumental y el seguimiento de monitoreos térmicos. davidbarreto1990_gmail.com

5. Licenciado en Física. Docente (Profesor Adjunto) e Investigador Secretaría General de Ciencia y Técnica (SGCyT) - Universidad Nacional del Nordeste (UNNE). Grupo de Investigación y Desarrollo de Energías Renovables (GIDER). Depto. de Termodinámica. Facultad de Ingeniería (FI) - UNNE. Resistencia, Chaco. Se desempeña en el área de energías renovables y extensión universitaria. jcorace@ing.unne.edu.ar

6. Ingeniero en construcciones. Docente (Profesor Adjunto). Facultad de Recursos Naturales (FRN). Investigador (Cat. D). Universidad Nacional de Formosa. Se desempeña en el área de diseño y cálculo de estructuras de edificios. arceter@hotmail.com

7. Ingeniero en construcciones. Especialista en Evaluación Ambiental. Docente (Jefe de Trabajos Prácticos), Facultad de Recursos Naturales (FRN) de la Universidad Nacional de Formosa (UNaF), Formosa. Se desempeña en el área de cálculos y verificaciones de estructuras de edificios, y en proyectos de obras de agua potable y saneamiento. cacomezana@yahoo.com.ar

8. Ingeniero civil. Docente (Jefe de Trabajos Prácticos), Facultad de Recursos Naturales (FRN) de la Universidad Nacional de Formosa (UNaF), Formosa. Se desempeña en el área de proyectos y cálculos hidráulicos de obras de agua potable y saneamiento. rafaniellojose@gmail.com

RESUMEN

Se comentan los avances de un proyecto de investigación en desarrollo en la Universidad Nacional de Formosa (UNaF), titulado "*Determinación de las condiciones higrotérmico – lumínicas y de calidad del aire de edificios del campus de la UNaF. Diagnóstico en función de normativa de habitabilidad y URE*". Dicho proyecto está realizando una evaluación del desempeño higrotérmico - lumínico y de calidad del aire interior de los edificios más representativos del Campus de la UNaF, lo que permitiría definir premisas básicas para determinar políticas institucionales para el "Uso Racional de la Energía" y para el saneamiento ambiental en su edificación. Tomado como caso el edificio de la Facultad de Recursos Naturales (FRN), se exponen los resultados de mediciones de temperatura en una muestra de 4 aulas del mismo, así como de

mediciones de calidad de aire interior. El objetivo fue detectar posibles problemas de disconfort y de contaminación ambiental, e iniciar un diagnóstico de situación.

Palabras clave: edificios educativos – ambiente - energía – temperaturas – monitoreos.

INTRODUCCIÓN

El clima local tiene una influencia importante en el ambiente térmico interior de los edificios, en los cuáles sus características tecnológicas y morfológicas juegan un rol relevante en el impacto del clima y el control de las condiciones térmicas internas. La envolvente del edificio influye con su resistencia y su capacidad térmica en la estabilización de las temperaturas internas (FILIPPÍN et al, 2007).

Los principales centros urbanos de la región Nordeste de Argentina experimentan las particularidades impuestas por un clima muy cálido que determina situaciones críticas de consumo de energía para acondicionamiento ambiental de los edificios durante casi seis meses al año. Cabe aclarar que la ciudad de Formosa pertenece a la zona bioambiental "I", *muy cálida* (IRAM 11603, 2012), y dentro de ella, se incluye en la subzona "a" (amplitudes térmicas mayores a 14ºC), donde los valores de temperatura efectiva corregida media, en el día típicamente cálido, son superiores a 26,3ºC; durante la época caliente todos los sectores presentan valores de temperatura máxima superiores a 34ºC y valores medios superiores a 26ºC. El período invernal presenta temperaturas medias durante el mes más frío superiores a los 12ºC.

Ante la situación expuesta, existe la necesidad urgente de concientización en el uso de técnicas alternativas para alcanzar eficiencia energética de los edificios, a través del adecuado diseño de las envolventes, por medio del uso de estrategias tecnológicas que logren el confort sin necesidad de generar contaminación y excesivo gasto energético. Asimismo es necesario implementar herramientas de análisis y verificación que permitan reducir el consumo energético derivado de deficiencias proyectuales.

En este sentido, en el país existen numerosos equipos de investigación dedicados desde hace más de veinte años al estudio, análisis y verificación de las cuestiones del desempeño y funcionamiento integral de los edificios, tanto ambientalmente como desde el punto de vista de su comportamiento frente a la acción del clima. Dichos grupos tienen el objetivo común, por un lado, de sistematizar métodos y técnicas de evaluación de las cuestiones comentadas, y por otro lado, de proponer medidas de mejoramiento, ya desde instancias iniciales del diseño de los edificios, que redunden en un uso mas racional de la energía eléctrica que se utiliza en dichos edificios para acondicionar interiormente los mismos y lograr las condiciones mínimas de "confort integral" (higrotérmicas, lumínicas, acústicas y ambientales en general). Entre dichos equipos de investigación merece citarse, por su cercanía geográfica y por la similitud climática en que se insertan los edificios estudiados, el de la cátedra *Estructuras II* (EII) de la Facultad de Arquitectura y Urbanismo de la Universidad Nacional del Nordeste (UNNE), que desarrolla tareas de investigación vinculadas al tema de la utilización racional de la energía en la edificación y la optimización de tecnologías adecuadas para el aprovechamiento y conservación de la energía, así como el *Grupo de Investigación y Desarrollo de Energías Renovables* (GIDER), del Depto. de Termodinámica de la Facultad de Ingeniería de la UNNE, varias de cuyas investigaciones constituyen antecedentes directos del presente proyecto.

Cabe comentar que el Estado argentino ha implementado el *"Programa Nacional de Uso Racional y Eficiente de la Energía"* en el año 2007, en el cual se dispone que los diversos organismos oficiales del estado, se adecuen y participen de las directivas

emanadas de dicho Programa. Por tal motivo, el Ministerio Nacional de Educación ha dispuesto en la Resolución Nº 022 (2008) que sean invitadas a participar en el citado programa todas las Universidades Nacionales, para que se implementen acciones en tal sentido. Además, en la misma resolución ministerial, se dispone en el Artículo 10º que se implementen *"pautas de diseño y mantenimiento tendientes a optimizar el uso racional y eficiente de la energía requerida en edificios educacionales",* tanto en proyectos a ejecutarse como en los existentes. Y en el Artículo 11º se estable que *"las autoridades de las Unidades Académicas y Universidades Nacionales adopten en sus ámbitos idénticas acciones en sus edificios para el uso racional de la energía".*

Figura 1: Fotos satelitales de la ciudad de Formosa (arriba, izquierda) y del Campus de la UNaF (abajo). Se señala el edificio de la FRN (arriba, derecha).

Desde otra perspectiva, se parte de considerar que, cuidando la calidad del aire interior, se cuida de la salud de las personas que en él viven o trabajan. La *Calidad del Aire Interior* (CAI), se refiere a la calidad del aire dentro y alrededor de los edificios y estructuras, especialmente en lo que se relaciona con la salud y el confort de los ocupantes del edificio. Diversos estudios señalan que los contaminantes en el aire interior pueden estar en mayor cantidad que los del aire exterior (OSMAN, 2011):
En este contexto, el edificio de la Facultad de Recursos Naturales (FRN), caso de análisis que se aquí se aborda, está implantado en el Campus Universitario de la UNaF, de las avdas. Gutnisky y de Pueyrredón (figura 1), en el sector sudoeste (SO) de la

ciudad de Formosa (Latitud: 26,11°; Longitud: 58,12° Oeste; Altitud: 65 msnm), en un área urbana de media densidad. La UNaF, formada a partir del redimensionamiento de la Universidad Nacional del Nordeste (UNNE), absorbió las sedes de ésta ubicadas en la provincia de Formosa, albergando actualmente las facultades de Ciencias de la Educación Agraria y de Recursos Naturales Renovables, así como profesorados y tecnicaturas dependientes de éstas. Se les sumaría una facultad de Humanidades y de Ciencias de la Administración y Económicas.

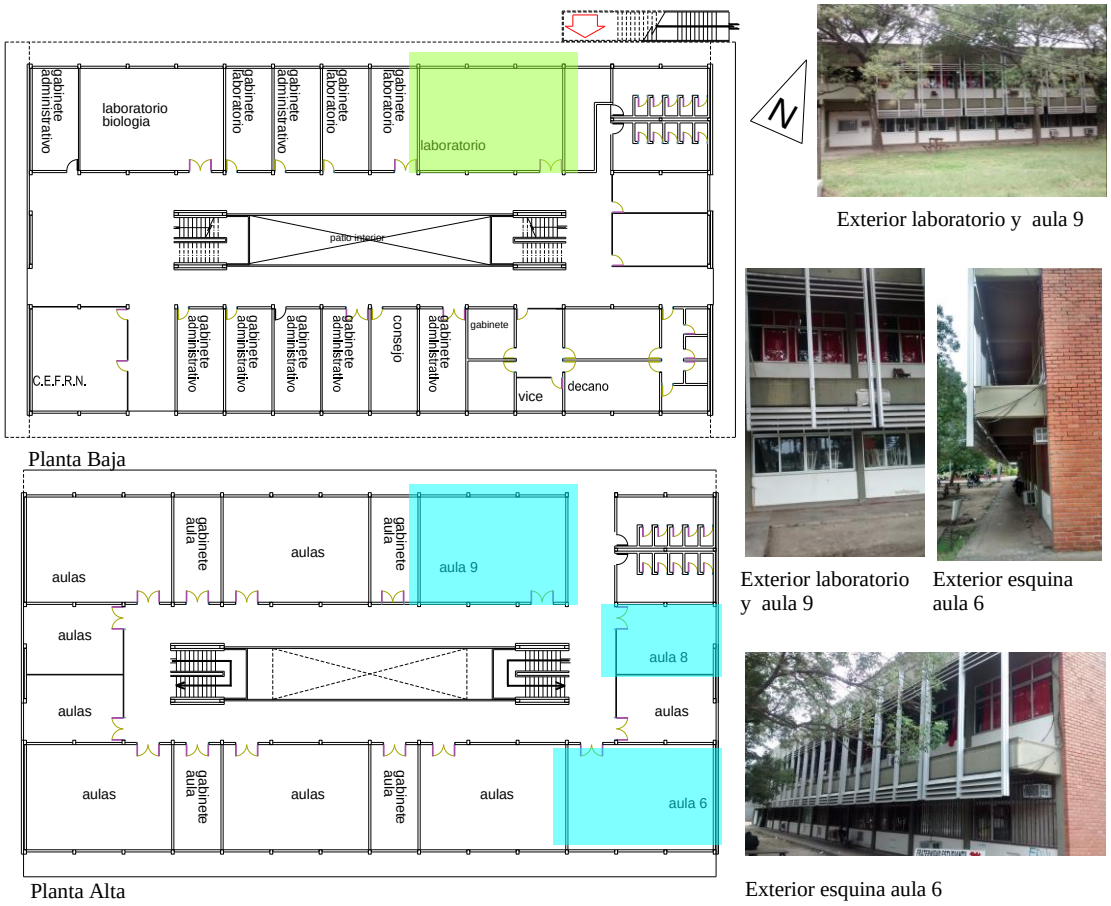


Figura 2: Esquemas en planta del edificio de la FRN de la UNaF. Se indica el muestreo definido de locales para monitorear. A la izquierda, fotografías de sectores exteriores del edificio y sus protecciones climáticas.

OBJETIVOS Y METODOLOGÍA

El objetivo general del proyecto es elaborar un diagnóstico de las condiciones de habitabilidad higrotérmica, de iluminación y de calidad del aire interior en edificios del Campus de la UNaF, para detectar posibles problemas de disconfort (térmico – lumínico - ambiental) que repercutan en un uso excesivo de energía eléctrica y en la calidad de vida que brindan los espacios. En base a ello de busca realizar una propuesta de medidas tendientes al Uso más Racional de la Energía (URE) para acondicionamiento termo-lumínico-ambiental del edificio. Para alcanzar este objetivo, se plantean los siguientes objetivos específicos:

1. Relevar integralmente edificios del Campus de la UNaF, en sus diferentes sectores;
2. Analizar los parámetros mínimos de habitabilidad higrotérmico-lumínica definidos por las normas técnicas vigentes, así como los parámetros que debe cumplir la calidad del aire interior;

3. Monitorear experimentalmente, tanto las condiciones térmicas (evoluciones horarias, de verano e invierno) como los niveles de iluminación (natural y artificial) de locales de los edificios más representativos del Campus de la UNaF;
4. Determinar experimentalmente la calidad del aire interior de dichos locales;
5. Comparar la situación real registrada mediante las mediciones con los parámetros normativos definidos y establecer el grado de ajuste, para elaborar un diagnóstico;
6. Realizar encuestas a los usuarios de los edificios, respecto a sus condiciones de bienestar psicofísico;
7. Proponer medidas de URE y saneamiento ambiental para los espacios que se detecten como "críticos" en los edificios analizados, en función del diagnóstico.

TECNOLOGÍA CONSTRUCTIVA DEL EDIFICIO. VERIFICACIÓN DE PARÁMETROS HIGROTÉRMICOS SEGÚN NORMAS IRAM

Locales monitoreados	**Aula 8 (sensor TK_1)**	**Aula 9 (sensor TK_2)**	**Aula 6 (sensor TK_4)**	**Laboratorio de física y química (sensor TK_3)**
Ubicación	planta alta (ver esquema)	planta alta (ver esquema)	planta alta (ver esquema)	planta baja (ver esquema)
Dimensiones	4,80mx6,70mx3,25m	7,20mx10,00mx3,25m.	7,20mx10,00mx3,25m.	7,20mx10,00mx3,25m.
Espacio interior				
Techos	Azotea losa alivianada de hormigón.			Entrepiso losa de hormigón armado
Sup. de techo expuesta al exterior (m^2)	32,16	72,00.	72,00.	----------.
Transmitancia térmica (IRAM 11601 y 11605)	**1,57 – Nivel de confort: fuera de categoría, por ser demasiado alto.**			**----------**
Muros exteriores	Ladrillos huecos revocados exterior e interiormente. Espesor = 0,15m.			
Sup. de muro expuesta al exterior (m^2)	19,47	14,10	37,5	14,10
Transmitancia térmica (IRAM 11601 y 11605)	**1,40 – Nivel de confort "C" (mínimo).** (Superficie expuesta al exterior: 16,45 m^2)			
Carpinterías	Ventanas marco aluminio natural y vidrio simple, sin protección exterior.	Ventanas marco aluminio natural y vidrio simple, con parasolado exterior.		
Sup. vidriada (m^2)	1,00	16,45	16,45	16,45
Transmitancia térmica (IRAM 11507-4))	**5,69** - Fuera de categoría de aislación térmica, por ser demasiado alto)	**1,60 - Categoría de aislación térmica "K3" (nivel intermedio)**		

Tabla I: Algunos parámetros tecnológicos e higrotérmicos de las envolventes de las aulas monitoreadas en el edificio de la FRN de la UNaF.

Las diferentes soluciones tecnológico-constructivas aplicadas a los cerramientos y espacios de los edificios más representativos del Campus de la UNaF, se ven representadas por la tecnología del Hormigón Armado (HºAº), que resulta

predominante, tanto en la resolución de la estructura portante como en los entrepisos y cubiertas –azoteas-). Esta situación se ve fielmente representada por el edificio de la FRN, que constituye un caso de análisis, dentro del Campus de la UNaF. Se realizó un análisis funcional, espacial y técnico – constructivo del edificio, que permitió definir diferentes paquetes de locales y sectores, agrupando funciones, patrones de ocupación y tecnologías constructivas homogéneas. A partir de dicha zonificación se definió una muestra de locales representativos de las diferentes zonas: Laboratorio de planta baja y aulas 8, 9 y 6 de planta alta (figura 2). Asimismo, se aplicaron las verificaciones higrotérmicas (según normas IRAM 11601, 11605 y 11507-4) a los componentes de las envolventes de los locales de la muestra definida, que se sintetizan en la tabla I. Básicamente, se verificó una baja resistencia térmica de la envolvente en general, la existencia de puentes térmicos (heterogeneidades en el cerramiento, con una menor resistencia térmica) importantes en muros y techos, representadas por la estructura portante de HºAº.

MONITOREOS TÉRMICOS EN INVIERNO Y VERANO

Figura 3: Planta Baja (izquierda) y Alta (derecha) del edificio de la FRN de la UnaF. Ubicación de los sensores térmicos y módulo registrador de datos.

Se determinó que los monitoreos térmicos se realizarían en las 4 aulas indicadas en tabla I y en la figura 3 (Laboratorio de planta baja y aulas 8, 9 y 6 de planta alta). Las variables registradas durante el monitoreo fueron: Temperatura ambiente exterior a la sombra; Temperatura de bulbo seco de las 4 aulas definidas; HR ambiente exterior; Irradiancia solar global sobre superficie horizontal. El instrumental de medición consistió en sensores de temperatura (termocuplas tipo “K”, previamente calibradas en el rango de temperaturas de trabajo), conectados a un módulo de adquisición de datos (Data Logger - Registrador Virtual *NOVUS FIELD LOGGER*, de 8 canales analógicos, alimentado con 220 voltios, conversor y software de adquisición de datos “Field Chart”). Las mediciones de datos de temperatura ambiente externas fueron realizadas con un medidor de HR y temperatura (marca *ROTRONIC*, tipo Hygromer I-128, con una amplitud de medición de 0 a 100% de HR, con un error de +/- 1,5% a 25°C y con una amplitud de medición de temperaturas de entre -15°C y 65°C, con una apreciación de 0,1 °C). Los 4 sensores de temperatura, conectados al adquisidor de datos, se ubicaron “colgados” del centro aproximado del cielorraso de cada local, a una altura aproximada de 2,10 metros del nivel de piso (de modo de no perturbar las actividades normales de los usuarios).

El **monitoreo térmico invernal** de la muestra definida de 4 aulas se realizó durante el período comprendido entre el 20 de agosto y el 4 de septiembre de 2013 (las 24 hs. de cada día). Las aulas estuvieron en condiciones de uso normal durante el monitoreo, habiéndose relevado tales condiciones de uso (cantidad de usuarios, tipo de actividad, patrón de apertura de aventanamientos y uso de la iluminación artificial, equipamientos y artefactos en uso). Se obtuvieron las curvas térmicas que se exponen en la figura 4. Durante el período de medición se registraron temperaturas representativas de la estación fría para la ciudad de Formosa (mínimas de todo el período de registro de 2ºC, coincidentes con el horario previo a la salida del sol, y máximas de todo el período de registro de 33ºC, a las 13,00 hs.). La *situación más favorable* (temperaturas más altas) se obtuvo para el Laboratorio, ubicado en planta baja, lo que podría explicarse por su situación resguardada en la parte superior (no tiene cubierta horizontal expuesta a la intemperie, sino un entrepiso). La situación de *temperaturas internas más bajas* se registraron en las aulas 8 y 6. Durante el período de registro, las temperaturas de las 4 aulas se mantuvieron, durante aproximadamente 20 hs. de cada día, por encima de las temperaturas exteriores. Solamente estuvieron 1ºC, en promedio, por debajo de las exteriores en horas de máxima exterior. En cambio, se mantuvieron siempre unos 7ºC en promedio por encima de las temperaturas exteriores en las horas de mínima exterior. Sintetizando, se registró un amortiguamiento considerable, en el período frío, de las temperaturas exteriores.

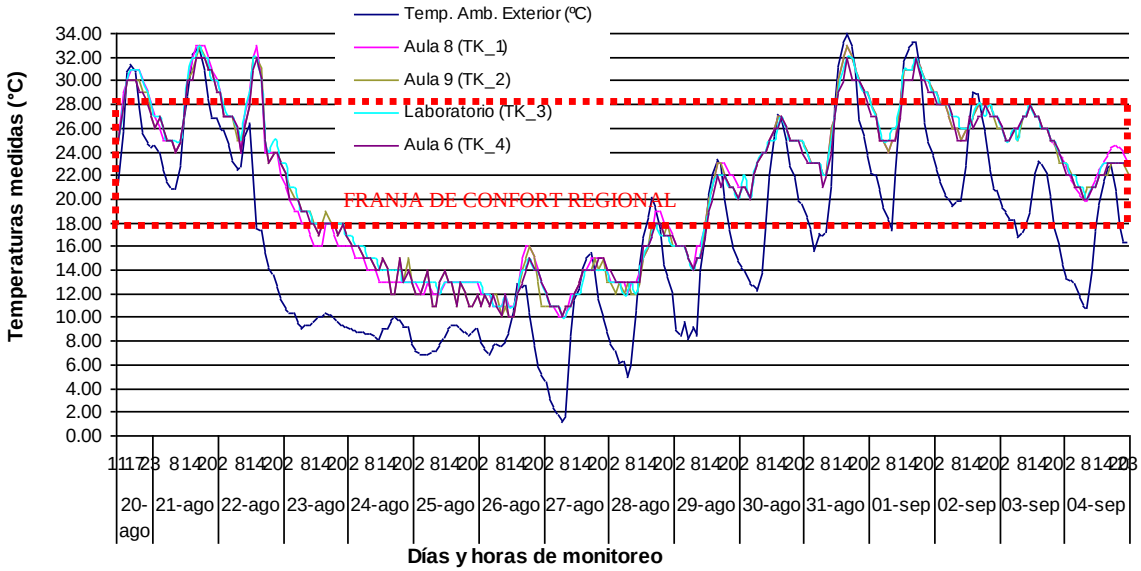


Figura 4: Evolución de temperaturas interiores medidas en 4 aulas del edificio de la FRN de la UNaF, durante el período del 20/08 al 04/09 de 2013.

El **monitoreo térmico estival** de las 4 aulas (figura 5), durante días con temperaturas representativas de la estación cálida para la ciudad de Formosa (mínimas de todo el período de registro de 22ºC, coincidentes con el horario previo a la salida del sol, y máximas de todo el período de registro de 42ºC, a las 13,00 hs.), se realizó en el período comprendido entre el 29 de noviembre y el 16 de diciembre de 2013 (las 24 hs. de cada día). Las aulas estuvieron en condiciones de uso normal durante el monitoreo: las actividades en esta época del año resultaron, tanto en frecuencia de uso como en cantidad de usuarios, muy escasas. Las variables registradas durante el monitoreo, así como la frecuencia de muestreo, fueron las mismas que las registradas durante el

monitoreo de invierno, habiéndose utilizado el mismo instrumental ya detallado. La *situación más favorable* (temperaturas más bajas) se obtuvo, al igual que para el registro de invierno, para el Laboratorio, ubicado en planta baja (figura 5), lo que podría explicarse por su situación resguardada en la parte superior, al no tener cubierta horizontal expuesta a la intemperie. La situación de *temperaturas internas más altas* se registraron en las aulas 6 y 9, que poseen mayores superficies de envolvente (muros y techos) expuestas al exterior, respecto a las demás aulas monitoreadas. Durante el período de registro, las temperaturas de las 4 aulas se mantuvieron, durante las 24 hs. de cada día, amortiguadas con respecto a las temperaturas exteriores, es decir, con picos de máxima que resultaron, en promedio, 4ºC inferiores a las máximas exteriores y con picos de mínima que resultaron, en promedio, 4ºC superiores a las mínimas exteriores.
En síntesis, se han detectado las siguientes deficiencias en cuanto al desempeño térmico de los locales: **en invierno**: temperaturas interiores que, durante el 50% del período de registro se hallaron por debajo del límite inferior de la franja de confort regional, definida entre 19°C y 28°C (ALÍAS et al, 2011), y **en verano**: temperaturas interiores que, durante el 75% del período de registro se hallaron por encima del límite superior de la franja de confort regional definida.

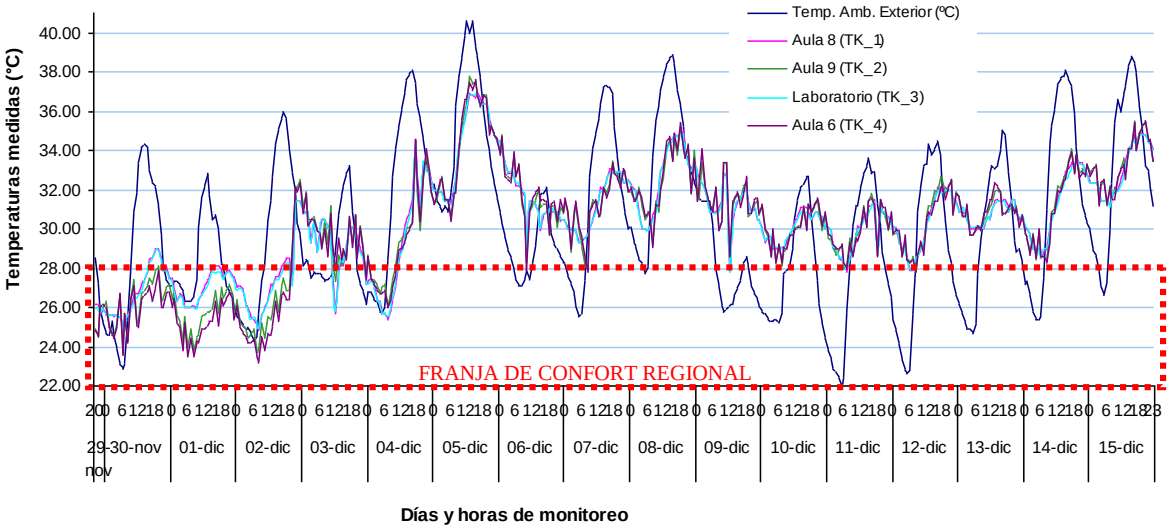


Figura 5: Evolución de temperaturas interiores medidas en 4 aulas del edificio de la FRN de la UNaF, durante el período del 29/11 al 15/12 de 2013.

CALIDAD DEL AIRE: MEDICIONES DE PARTICULADO AMBIENTAL

La Calidad de aire interior (CAI) puede ser afectada por gases, (incluyendo monóxido de carbono, radón, compuestos orgánicos volátiles), material particulado, microbios contaminantes (moho, bacterias) o cualquier material o factor estresante de energía que puede inducir a condiciones adversas para la salud. Los métodos principales para mejorar la calidad del aire interior en la mayoría de los edificios son la filtración y el uso de ventilación para diluir los contaminantes. Para conocer la calidad del aire interior deben recogerse muestras de aire, controlar la exposición humana a los contaminantes, recoger muestras en la construcción de superficies y elaborar modelos informáticos de flujo de aire dentro de los edificios. En este sentido se realizó, en el edificio de la FRN de la UNaF, la medición de material particulado PM0,5 y de PM2,5 (partículas en suspensión en el aire de diámetro aerodinámico igual o menor a 0,5 micrones y 2,5 micrones respectivamente). Dicha medición se llevó a cabo en los espacios interiores de los mismos locales definidos para los monitoreos térmicos, entre el lunes 25 y el viernes

29 de marzo de 2014, en el horario comprendido entre las 16.30hs. y las 17.15hs. (durante este lapso se realizaron mediciones cada 15 minutos en cada aula), en condiciones de uso habitual de las 4 aulas y para una situación climática exterior promedio de 26,4ºC, con cielo claro (días soleados), y con aire en calma (sin viento). Las mediciones se realizaron a una altura de 1,50m. respecto al nivel de piso de las aulas. El instrumental utilizado fue un contador de material particulado por sistema láser (marca DYLOS DC1700, cuyo caudal de aire de muestreo es fijo, de 2,83litros/seg., figura 6). La unidad de las mediciones es la cantidad de partículas/pie^3. Las características de las partículas no son especificadas por el instrumento: pueden ser granos de polvo, polen, ácaros, tierra, hollín, microcarbones, etc.
Las peores condiciones (mayor cantidad de partículas ambientales) se registraron para el aula 8, ubicada en planta alta del edificio, respecto a las otras 3 aulas en que se realizaron mediciones, tanto en los valores promedio como en los máximos (figura 6 y tabla II). El aula 8 es la de menor superficie de la muestra considerada (posee la mitad de la superficie de las otras 3 aulas). Por otra parte, posee una superficie de ventilación menor (ventanas elevadas y muy angostas). Las mejores condiciones se registraron para el aula 6, ubicada en planta alta (figura 6 y tabla II). Los valores medidos en los 4 locales se consideran satisfactorios, ya que resultan inferiores a los permitidos por las Normas Argentinas de Protección del Medio Ambiente, basadas en las Normas de la EPA (Environmental Protection Agency - USA). No se puede determinar, mediante el instrumental utilizado, a qué tipo de partículas corresponden las detectadas y contabilizadas mediante el instrumento.

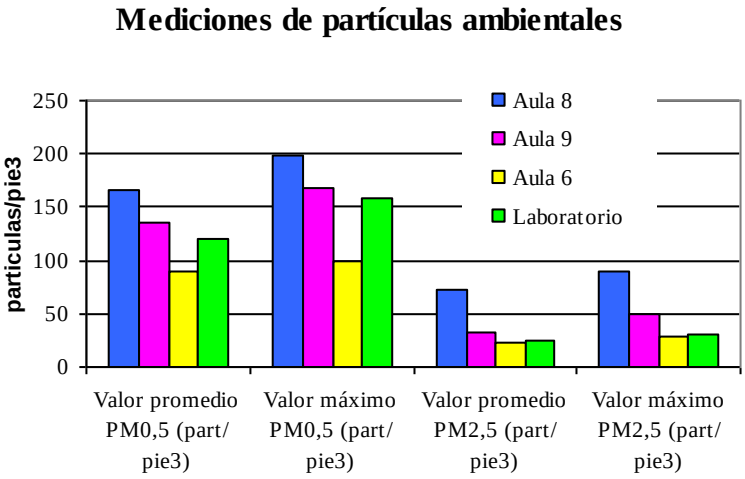


Figura 6: Medidor de partículas ambientales (izquierda) y resultados de la medición de particulado ambiental en las 4 aulas del edificio de la FRN de la UNaF (derecha).

Mediciones de material particulado en aulas del edificio de la FRN - UNaF				
Locales monitoreados	**Valor promedio** PM0,5 (part/ pie^3)	**Valor máximo** PM0,5 (part/ pie^3)	**Valor promedio** PM2,5 (part/ pie^3)	**Valor máximo** PM2,5 (part/ pie^3)
Aula 8 (Sup.: 32,16m^2)	166.000	198.500	73.090	89.600
Aula 9 (sup.: 72m^2)	135.100	168.800	32.200	49.600
Aula 6 (sup.: 72m^2)	89.900	98.900	22.000	29.200
Laboratorio (sup.: 72m^2)	119.300	158.400	24.100	29.800

Tabla II: Resultados de la medición de particulado ambiental (promedio de las mediciones efectuadas cada 15 minutos en cada aula durante un lapso de 1 hora) en las 4 aulas del edificio de la FRN de la UNaF.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El presente trabajo expone los avances de un proyecto de investigación en curso en la UNaF. **El principal aporte**, más allá de los resultados específicos obtenidos respecto a las variables analizadas hasta el momento, **lo constituye la metodología de análisis y evaluación empleada, así como los métodos y técnicas específicos utilizados en cada caso, que permiten la recolección de datos sistemáticos y precisos respecto al objeto de estudio, para una posterior sistematización y formulación de un diagnóstico**, que permita la interpretación de dichos datos a la luz de cuerpos teóricos específicos. Esta metodología resulta válida para la evaluación de cualquier tipología edilicia, en sus aspectos higrotérmicos y ambientales. Resta aún encarar los monitoreos y análisis lumínicos interiores en diferentes épocas del año y su contrastación con normativa IRAM - AADL vigente, en función de la tipología y orientaciones de las aberturas existentes.

Por los resultados obtenidos hasta el momento mediante el monitoreo de desempeño térmico de 4 aulas del edificio de la FRN, dicho edificio presenta un desempeño higrotérmico tal que, durante buena parte del año, los ambientes interiores que alberga se encuentran fuera de las condiciones de confort fijadas y aceptables para la zona bioclimática "Ia – muy cálida". Constituye un caso de desempeño térmico regular durante días de invierno típicos de la zona "Ia", que demandaría calefacción artificial durante ciertas franjas horarias de ocupación, así como un caso de desempeño térmico deficiente durante días de verano típicos, que demandaría refrigeración artificial durante la mayor parte de los horarios de uso. Por ello, se hacen necesarias propuestas de mejoramiento de las envolventes de los locales, que mejoren su desempeño térmico y contribuyan a la reducción del consumo eléctrico para climatización artificial, a la vez que resulten transferibles al mejoramiento de las condiciones energéticas de otros edificios del Campus de la UNaF. Entre dichas mejoras podrían incluirse la reducción de puentes térmicos y de pérdidas por carpinterías, así como el aumento de resistencia térmica del conjunto envolvente.

Por su parte, los resultados obtenidos respecto a la calidad del aire ambiental de la muestra de locales del edificio de la FRN resultan satisfactorios.

REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFÍA

ALÍAS, H. M. et al (2011). Simulaciones de desempeño térmico de aulas de la Facultad de Arquitectura de la UNNE y contrastación con mediciones en días de invierno. *Avances en Energías Renovables y Medio Ambiente (AVERMA)*, Vol. 15. Pp. 05.37 a 05.45.

FILIPPÍN C., FLORES LARSEN S. & FLORES L. (2007). Comportamiento energético de verano de una vivienda másica y una liviana en la región central de Argentina. *Avances en Energías Renovables y Medio Ambiente (AVERMA)*. Vol. 11. Pp. 05.17 a 05.23.

INSTITUTO ARGENTINO DE NORMALIZACIÓN Y CERTIFICACIÓN (IRAM). *Normas Técnicas Argentinas* 11601 (2002); 11603 (2012); 11605 (1996) y 11507-4 (2010). Buenos Aires, Argentina.

OBSERVATORIO DE SALUD Y MEDIO AMBIENTE DE ANDALUCÍA (OSMAN) & FONDO EUROPEO DE DESARROLLO REGIONAL DE LA UNIÓN EUROPEA (2011). *Calidad del aire interior*. Junta de Andalucía. Madrid, España. ISBN 978-84-964-5934-8. Pp. 5; 10.

AGRADECIMIENTOS: Los autores agradecen a la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional de Formosa (UNaF), así como a la Facultad de Recursos Naturales (FRN) de la UNaF, por el apoyo brindado para el desarrollo del proyecto de investigación en curso, cuyos avances se exponen en el presente.

“INTEGRALES DOBLES ES LO MISMO QUE INTEGRALES SUCESIVAS?”

Milena María Balbi
Gricela Alicia Rohde

Este Trabajo fué realizado y evaluado en el curso de posgrado

“LA PROPIA PRÁCTICA MATEMÁTICA COMO OBJETO DE REFLEXIÓN Y ANÁLISIS DIDÁCTICO – MATEMÁTICO”

Dentro del Programa de Formación Docente Continua de la Universidad Nacional del Nordeste

Recibido 14 de febrero de 2014
Aceptado 30 de abril de 2014

“INTEGRALES DOBLES ES LO MISMO QUE INTEGRALES SUCESIVAS?”

Milena María Balbi
Gricela Alicia Rohde

Este Trabajo fue realizado y evaluado en el curso de posgrado

“LA PROPIA PRÁCTICA MATEMÁTICA COMO OBJETO DE REFLEXIÓN Y ANÁLISIS DIDÁCTICO – MATEMÁTICO”

Dentro del Programa de Formación Docente Continua de la Universidad Nacional del Nordeste

LA PROPIA PRACTICA MATEMATICA COMO OBJETO DE REFLEXION Y ANALISIS DIDACTICO – MATEMATICO

OBJETIVO: escribir la producción matemática emergente de un trabajo de metacognición, reflexión y análisis de prácticas matemáticas personales y colectivas.

PRIMER MOMENTO: recuperar las prácticas matemáticas personales de los tres incisos (dejando explicito tanto las limitaciones como las fortalezas) (Individual).

SEGUNDO MOMENTO: recuperar las prácticas matemáticas colectivas dejando explicito:

- Que resoluciones se trabajaron.
- Como se trabajaron (por que, por cual se comenzó, con cual se relacionó, que se obtuvo de nuevo, apareció alguna explicación del profesor?)

TERCER MOMENTO: explicitar la producción matemática nueva que se logró reconocer.

No existe un paradigma de investigación consolidado en la didáctica de la Matemática, por su carácter relativamente reciente. El estudio de la misma en las instituciones propone como uno de sus fines esenciales, que el individuo se apropie de los conocimientos matemáticos. Es necesario como dice Brousseau (1986)[1] que la clase de matemática se piense como un espacio de producción, transformación y validación del conocimiento matemático.

No se puede estudiar o mirar el aula, si se desconoce la forma de hacer y sentir de los que están en ella, es necesario indagar cual es el sistema de prácticas matemáticas, verlo como un todo, como un sistema complejo[2].

Teniendo en cuenta lo trabajado en este curso se ha tomado una clase de un curso dictado por una de las integrantes del equipo, actividad presentada por la cátedra de Matemática II de la Facultad de Ciencias Económicas como tarea contracuatrimestre, los asistentes al mismo eran docentes de dicha asignatura. En ella se planteó una situación problemática y nos posicionamos en un planteo ontológico, desde el enfoque ontosemiótico, analizando tres núcleos referidos a:

La relatividad contextual: se refiere a las situaciones que uno elige, a lo qué se quiere discutir y cómo se quiere discutir.

La relatividad institucional: se refiere al perfil del egresado, al consenso y a la regulación de los modos de expresión y actuación ante una cierta clase de problemas, que condicionan los modos de pensar y actuar en las instituciones (por ej. la clase de Matemática II).

La relatividad personal: se refiere a como se recorrió el camino del conocimiento, es el resultado de la reflexión y la acción del sujeto individual ante una cierta clase de problemas.

SITUACION PROBLEMÁTICA:

Estime el Volumen del Solido que yace arriba del cuadrado $R = [0; 2] \times [0; 2]$ y debajo del PARABOLOIDE ELIPTICO $z = 16 - x^2 - 2y^2$.

[1] BROUSSEAU, G.(1986) *Fundamentos y Métodos de la Didáctica Matemática.* Universidad Nacional de Córdoba. Facultad de Matemática, Astronomía y Física. Serie B. Trabajos de Matemática, Nº19 (versión castellana 1993).

[2] ETCHEGARAY, S. (2013) Apuntes de clase del Curso "La apropia práctica Matemática como objeto de reflexión y análisis Didáctico-Matemático. UNNE. Resistencia. 2013.

PRIMER MOMENTO:

Profesora Milena:
Luego de finalizado este curso de posgrado tuve la gran necesidad de cambiar las prácticas docentes en la Universidad empleando lo aprendido. Casualmente tenía la propuesta de la Titular de la Cátedra Matemática II para desarrollar un breve "curso" para colegas docentes de la misma asignatura, de allí que planifiqué el planteamiento del tema ***Integrales Dobles*** con un problema inicial.
Las cuestiones sobre el conocimiento que surgieron en esta búsqueda fueron:

- ¿cuál es la diferencia esencial entre el cálculo de la integral doble y el de las integrales sucesivas?
- ¿cómo se resuelven las integrales dobles?
- ¿existe un método para evaluarlas? O ¿solamente se las resuelve con las sucesivas?
- ¿qué tipo de problemas se resuelven con el concepto de integral doble?
- ¿por qué se usan en el cálculo las integrales sucesivas?
- ¿se relaciona la clase teórica con los prácticos que desarrollamos en las clases al tratar este tema?
- ¿surge el concepto de integral doble como una necesidad para resolver algún tipo de problemas?
- ¿por qué se necesita de las sucesivas para el cálculo de las dobles?

Analizar éstas preguntas y tratar de responderlas hizo que buscara bibliografía sobre el tema. Encontrando una situación problemática que plantea que se estime por medio del cálculo el volumen encerrado por un sólido.

Si particionamos un recinto R en subregiones cada vez más pequeñas y en cada subregión se elige un "punto muestral" que nos defina la altura del prisma que se define por medio de la imagen de la función dada, podemos calcular el volumen da cada uno de éstos, y luego al sumarlos obtendremos una aproximación al Volumen encerrado por la superficie definida, que será más aproximada a medida que refinamos la partición.

Lo interesante de este tipo de cálculo por aproximación es que se "va barriendo" por áreas cada subregión y al multiplicar por las alturas correspondientes se calculan volúmenes. Esto nos lleva a pensar en una doble suma que define el cambio simultáneo de $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, cada vez que nos posicionemos en cada "punto muestral", que luego define la altura de cada prisma que se encuentra debajo de la superficie que representa la función de dos variables dada por encima de la región R.

Generalizando este concepto de refinar las particiones haciendo el límite con las particiones tendiendo a infinito de la doble sumatoria es que se define la integral doble.

Pero este trabajo de particionar la región y calcular los volúmenes en forma aproximada es tedioso, y lleva su tiempo. Por eso es que se podría haber definido el concepto de

realizar los límites iterados de las sumatorias, y no el doble, para de esta manera dar lugar a la noción de integral iterada o sucesiva.

Creo que en este punto y desde la teoría surge el planteo de por qué la necesidad de desdoblar la doble suma de Riemann en dos sucesivas.

Por eso se plantea la situación de evaluar aproximadamente un volumen para que los docentes la exploren, pudiendo realizar las particiones que ellos planteen en un comienzo, y luego realicen particiones más refinadas, para finalmente cuando se introduzca la noción de integrales sucesivas calculen de forma exacta dicho volumen, y comparen las maneras de resolver.

El problema seleccionado se detalla en la situación problemática planteada en párrafos anteriores.

Mis debilidades tienen que ver con la falta de planteos de este tipo, donde cuestiono lo conceptual, los tipos de problemas y mis prácticas docentes.

Mis fortalezas las encuentro en las ganas de mejorar las prácticas docentes para lograr puentes entre los componentes de la tríada didáctica.

Profesora Gricela:

Planteado el problema surgieron las cuestiones sobre los conocimientos que se necesitaban para comprender de qué se trataba.

¿Qué forma tiene un paraboloide elíptico?

¿Qué hacíamos para graficarlo?

Recordé como trabajamos para graficar cualquier cuádrica:

1°) los puntos de intersección con los ejes coordenados,

2°) las trazas con los planos coordenados.

Obtuve como puntos de intersección con el eje $\rightarrow$ x: $(\pm 4,0,0)$

y: $\left(0,\pm\sqrt{8},0\right)$

z: $(0,0,16)$

Como ecuaciones de las trazas en el plano $\rightarrow$ "yz": $\frac{y^2}{8}+\frac{z}{16}=1\ una\ parabola$

"xz": $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{z}{16}=1\ una\ parabola$

"xy": $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1\ una\ elipse$

Hasta aquí fueron las fortalezas, mi primer problema surgió para graficar en el espacio, debilidad crónica.

Calculé el Volumen del sólido haciendo una integral doble:

$$V = \int_0^2 \int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2)\, dx\, dy = 48\, u^3$$

La profesora intervino ante el desenvolvimiento de algunos docentes que manifestaron dificultades para el cálculo de la región que se determina en la situación.

Se planteó entonces el:

SEGUNDO MOMENTO:

P: nos preguntó escribiendo las consignas en el pizarrón:

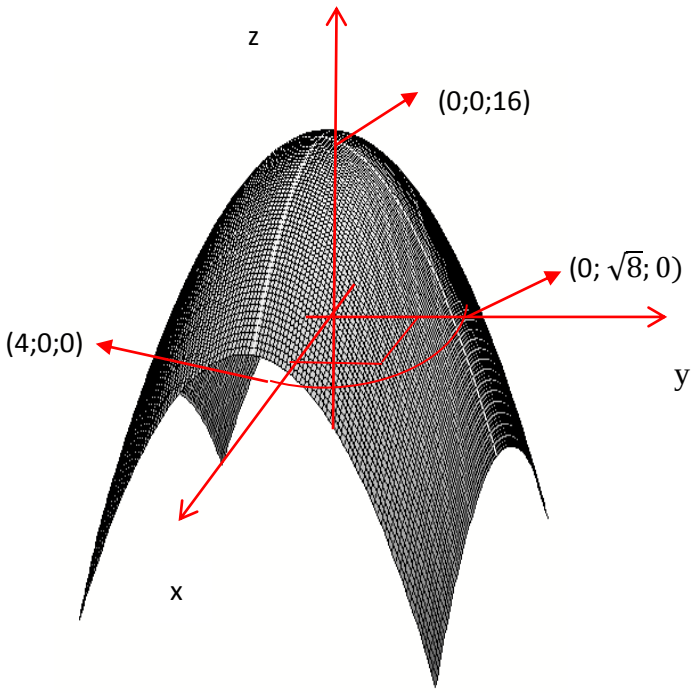
1) ¿Qué conocimientos necesitamos para resolver?
2) ¿Cuáles son los conceptos principales que se ponen en juego ante esta situación?
3) ¿Qué aplicaciones económicas tendría?

Aclarando que esta última cuestión quedaría de tarea para la próxima clase para que podamos consultar bibliografía.

La profesora (P) fue anotando lo que los asistentes contestaban:

- ✓ El concepto de región en el plano
- ✓ Producto cartesiano
- ✓ Intervalo
- ✓ Paraboloide elíptico y dentro de este concepto su definición, grafico, trazas, puntos de intersección con los ejes.
- ✓ Concepto de cuerpo con caras regulares y no regulares
- ✓ Planos
- ✓ Notación
- ✓ Concepto de volumen
- ✓ Concepto de área
- ✓ Integral doble
- ✓ Integrales iteradas

P: solicitó si alguien se animaba a dibujarlo en el pizarrón, un compañero ingeniero (D1) pasó a graficarlo.



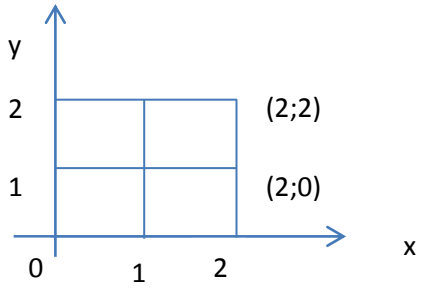
Ante este grafico surgieron preguntas entre los pares asistentes:

- ✓ ¿Cómo calculaste las coordenadas de los puntos?
- ✓ ¿Cómo graficaste la elipse?
- ✓ ¿Cómo calculaste el punto $(\sqrt{8}\,,4)$?

D1: fue explicando paso a paso como obtuvo las coordenadas de los puntos, deteniéndose en conceptos de Matemática I (Geometría Analítica) sobre la construcción de la elipse, retomando conceptos como coordenadas de los focos y lado recto.

P: volvió a cuestionar, alguien planteó de otra manera?

D2: comentó que no hizo el dibujo del paraboloide, sino que trabajó sobre la región en el plano "xy" y obtuvo las imágenes de cada vértice de la región rectangular.



$$f(0,0) = 16$$

$$f(0,2) = 8$$

$$f(2,0) = 12$$

$$f(2,2) = 4$$

D3: expresó que solo hizo un bosquejo del paraboloide a fines de ubicarse, porque no pedía graficarlo, agregando el cálculo de las imágenes.

Los docentes siguieron trabajando en los grupos.

En un grupo la D4 hizo el cálculo utilizando la integral doble:

$$V = \int_0^2 \int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2)\, dx\, dy = 48\, u^3$$

D2: pero en la consigna dice que estime el volumen no que haga el cálculo exacto. Se dirige a sus compañeros preguntándoles si está equivocado en su interpretación.

D5: esa es mi duda, que significa "estime el volumen".

D6: yo estaba pensando que así como en integral definida de una función de una sola variable hicimos rectángulos para el cálculo de área aproximada o "estimada" bajo la curva, podríamos hacer algo parecido para "estimar" el volumen debajo del sólido y encima de la región R.

P: entonces, ¿cómo se puede estimar dicho volumen? Sin usar integrales dobles.

Los profesores vuelven a trabajar en grupos.

TERCER MOMENTO:

P: ¿alguien terminó y quiere compartir la producción?

D2: En el grupo seguimos con la idea que comenzamos, trabajando con los valores que ya habíamos calculado de la función. Particionamos en 4 subrectángulos al recinto R.

Luego multiplicamos a cada uno por el área de su base, que en todos los casos es 1. Quedó así:

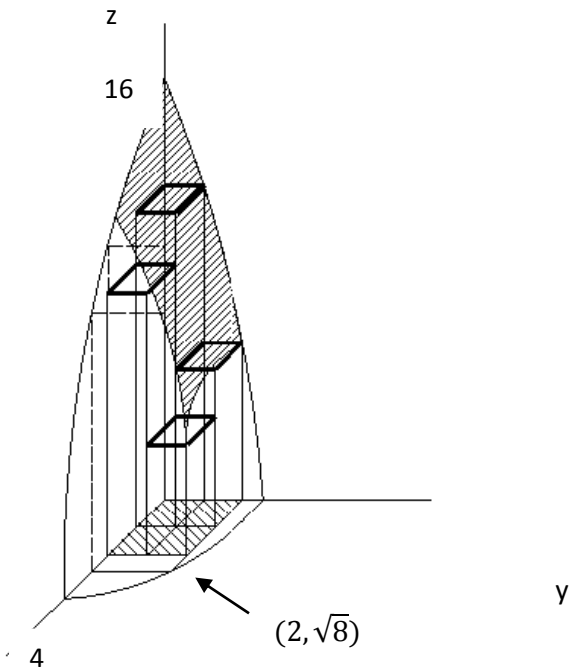
$$V \approx 4.\sup base + 7.\sup base + 13.\sup base + 10.\sup base$$

$$V \approx 4.1 + 7.1 + 13.1 + 10.1$$

$$V \approx 34\, unidades\ de\ volumen$$

D1: la gráfica que habíamos comenzado a trabajar la completamos con los prismas que quedan definidos de haber particionado en cuatro subregiones.

Quedó así:



P: ¿qué sucede si part x an en más rectángulos a la región R?

D1: cuantas más particiones del recinto… más aproximado al exacto será el volumen hallado.

P: si escribimos en forma general la primera expresión, tenemos entonces:

$$V \approx f(x_1, y_1).\Delta A + f(x_2, y_2).\Delta A + f(x_3, y_3) + f(x_4, y_4).\Delta A$$

Luego si refinamos la partición:

$$V \approx f(x_1, y_1).\Delta A + f(x_2, y_2).\Delta A + \cdots + f(x_i, y_j).\Delta A + \cdots + f(x_m, y_n).\Delta A$$

Utilizando la notación de sumatoria:

$$V \approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j).\Delta A \qquad \textit{SUMA DE RIEMANN (DOBLE)}$$

Si aplicamos límite con ***m*** y ***n*** que tiendan a infinito y si el límite existe es único, tenemos:

$$V = \lim_{m;n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j).\Delta A = \iint_R f(x;y).dA$$

Conclusiones: En el presente trabajo se observa la relatividad contextual al seleccionar para discutir el tema de la integral doble, las integrales sucesivas y la suma de Riemann eligiendo para ello una situación problemática buscando con las preguntas planteadas por la docente, una forma particular de discusión. Además la docente planifica la clase con lo que quiere que se discuta, con el conocimiento matemático que pretende que se construya en el aula.

Indudablemente estuvo presente la relatividad institucional en la selección de la situación problemática en cuanto a los temas que incluía, porque son los del programa de la asignatura Matemática II.

No se agregaron algunas discusiones que se presentaron por parte de un docente (D6) de mucha antigüedad, al cambiar la notación y la forma de presentar el tema, que indudablemente reflejan la resistencia a los cambios. Asimismo se notó la construcción del conocimiento por parte de la mayoría de los docentes que motivó al docente D6 a cambiar su postura y participar de manera activa para dicha construcción.

LA REGRESIÓN LINEAL MÚLTIPLE Y LA INFLUENCIA DE LAS VARIABLES DE COMPETITIVIDAD

EN EL PRODUCTO BRUTO GEOGRÁFICO ARGENTINO

Germán Edgardo CAMPRUBI
Facultad de Ingeniería – Universidad Nacional del Nordeste
gcamprubi@ing.unne.edu.ar

David VERA
Profesorado en Matemática – Carreras dependientes de Rectorado UNNE

Recibido 16 de Diciembre de 2013
Aceptado 17 de febrero de 2014

LA REGRESIÓN LINEAL MÚLTIPLE Y LA INFLUENCIA DE LAS VARIABLES DE COMPETITIVIDAD EN EL PRODUCTO BRUTO GEOGRÁFICO ARGENTINO

Germán Edgardo CAMPRUBI*, David VERA**

*Facultad de Ingeniería – Universidad Nacional del Nordeste
** Profesorado en Matemática – Carreras dependientes de Rectorado UNNE
Las Heras 727, Resistencia, Chaco, ARGENTINA

e-mail: gcamprubi@ing.unne.edu.ar

Resumen

El propósito de este artículo es determinar cuáles son las variables de competitividad predictoras del producto bruto geográfico en un modelo de regresión lineal múltiple aplicado a las provincias de Argentina en el año 2010.

Partiendo de un modelo de regresión de mínimos cuadrados ordinarios con siete variables predictoras se propuso finalmente un modelo ajustado con dos variables predictoras.

Palabras claves: regresión, provincias, producto geográfico, variables de competitividad

1. Introducción

La regresión lineal múltiple es una técnica que intenta modelar el valor esperado de una variable Y, a partir de los valores de dos o más variables predictoras X (Canavos, 1988).

Un modelo de regresión lineal múltiple es matemáticamente similar al de regresión lineal simple (Taucher 1997, Polit y Hungler 2000) y puede expresarse de la siguiente forma:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 . x_{1i} + \beta_2 . x_{2i} + \beta_3 . x_{3i} + \cdots + \beta_k . x_{ki} + \varepsilon_i$$

Donde:

Y_i = variable respuesta

β_0 = intercepto o término independiente

β_1= pendiente de la variable predictora X_1

β_2= pendiente de la variable predictora X_2

β_k= pendiente de la variable predictora X_k

ε_i= perturbación aleatoria o error

En el caso de dos o más variables predictoras, el método consiste en una aplicación matricial (Salinas y Silva 2007). La matriz de datos que se utiliza para realizar la estimación de los parámetros en regresión lineal múltiple tiene la siguiente forma:

Datos	Y	X_1	$\cdots$	X_k
1	y_1	x_{11}	$\cdots$	x_{k1}
2	y_2	x_{12}	$\cdots$	x_{k2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
n	y_n	x_{1n}	$\cdots$	x_{kn}

La notación matricial es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & x_{31} & \cdots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & x_{32} & \cdots & x_{k2} \\ 1 & x_{13} & x_{23} & x_{33} & \cdots & x_{k3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & x_{3n} & \cdots & x_{kn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, puede expresarse:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - Y_1 \\ y_2 - Y_2 \\ y_3 - Y_3 \\ \vdots \\ y_n - Y_n \end{pmatrix}$$

2. El producto bruto geográfico como variable dependiente del modelo de regresión

El Producto Geográfico Bruto (PGB) constituye un indicador amplio del nivel de actividad económica de una jurisdicción subnacional, pues expresa el valor a precios corrientes de mercado de los bienes y servicios finales generados cada año en su territorio interior por factores suministrados por los residentes en esa jurisdicción.

Puede decirse entonces que el Producto Geográfico Bruto o Producto Bruto Provincial es un equivalente provincial del Producto Bruto Interno (PBI), que se calcula para la Nación y constituye un insumo fundamental para la generación de políticas económicas a escala de los distritos subnacionales. El cálculo del PGB a precios corrientes de mercado es un indicador de la riqueza creada en el año a los precios de mercado de ese año.

Existen diferentes métodos para cuantificar el Producto Bruto Provincial y su desagregación permite identificar los sectores productores de bienes y servicios más importantes en la generación de riqueza de cada provincia (industria manufacturera, agricultura, construcción, comercio, etc.) (Delfino, 2001).

El cálculo del PGB desagregado hace posible examinar las principales características de la economía de una jurisdicción de escala subnacional, conocer las actividades productivas más importantes según su aporte a la formación del valor agregado y detectar el carácter esencial que tienen algunos sectores de la economía (Delfino, 2001). Además, los valores de PGB calculados año tras año permiten conocer la evolución de los distintos sectores de la economía de una jurisdicción a escala subnacional.

3. Variables de competitividad como predictoras del modelo de regresión

Diferentes autores aún participan del debate respecto de qué es la competitividad nacional y cómo se puede medir. La competitividad es un concepto complejo para el que no existe una única definición, en parte debido a que se sustenta en la identificación y medición de factores que contribuyan a elevar el nivel de vida de los ciudadanos en forma sostenida (Solleiro y Castañón, 2005). Es importante destacar, entonces, que las mejoras de la competitividad resultan de la búsqueda de una condición sostenible que se caracteriza por su permanencia en el tiempo (Bejarano, 1995), dirigida hacia los mercados (Roldán, 2004) y con la coexistencia de varios actores entre los que se destaca el sector productivo, el gobierno y los usuarios o clientes (Bernal y Laverde, 1995).

Como el concepto de competitividad no tiene límites precisos (Garay, 1998), la operacionalización de su definición depende de la referencia que se tome; alcance (nación, sector o firma), tipo de producto (bienes básicos o bienes diferenciados) entre otros aspectos (Piñeiro et al., 1993).

Una frecuente aproximación conceptual a la competitividad es la sistémica que identifica factores en cuatro niveles de análisis: microeconómico (las empresas), mesoeconómico (región o industria), macroeconómico (país) y metaeconómico (cultura) y las interacciones entre los mismos (Esser, Hillebrand, Messner, Meyer-Stamer, 1996).

Es decir que la competitividad es un concepto que se construye teóricamente y no existe un criterio único para medirla a escala subnacional. Los determinantes de la competitividad a escala subnacional, que para efectos de este trabajo se denominarán variables de competitividad, han sido establecidos prevaleciendo los siguientes criterios:

que el aspecto analizado pueda ser sujeto de alguna medida y ser fácilmente identificable respecto del resto de los aspectos sobre la base del marco teórico de la competitividad y que exista un soporte estadístico en el sentido que los aspectos analizados tienen indicadores de desempeño para todas las unidades de observación.

Entre los índices de competitividad nacionales son ampliamente difundidos los publicados por el *World Economic Forum* (WEF) con el enfoque de la Universidad de Harvard y el *Institute for Management Development* (IMD), así como otros índices relacionados que son elaborados por la *Heritage Foundation* y el Banco Mundial.

Estos índices cuentan con adherentes y detractores. Entre las críticas más frecuentes se reportan las del procesamiento simultáneo de información cuantitativa proveniente de fuentes oficiales con cualitativa generada a partir de las encuestas de opinión realizadas a gerentes y expertos en los distintos países. Aunque la competitividad nacional y su forma de medirla aún están en evolución, estos índices son empleados para hacer comparaciones entre países, detectar brechas y analizar evoluciones en el tiempo.

Más allá del vigente debate respecto de los índices de competitividad nacionales aparece la necesidad de desagregar la medición a escala subnacional tanto regional como provincial. En América del Sur se puede mencionar, entre otros, el trabajo realizado en ese sentido por la Subsecretaría de Desarrollo Regional y Administrativo en Chile y en Argentina por el Instituto de Investigaciones Económicas de la Bolsa de Comercio de Córdoba.

4. Objetivo

El objetivo de este trabajo consiste en determinar cuáles son las variables de competitividad predictoras del producto bruto geográfico en un modelo de regresión lineal múltiple aplicado a los distritos subnacionales de Argentina.

5. Metodología

Las unidades de observación de este trabajo son los veinticuatro distritos subnacionales argentinos, es decir las veintitrés provincias de la República Argentina y la Ciudad Autónoma de Buenos Aires (CABA).

La matriz de datos se conformó con información de dos fuentes secundarias independientes: los valores de PGB son las estimaciones que realiza la Fundación Libertad de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires y los valores de las siete variables de competitividad calculados en el Instituto de Investigaciones Económicas de la Bolsa de Comercio de Córdoba.

Las unidades de observación se analizaron teniendo en cuenta las estimaciones del PGB y los valores estandarizados de siete variables de competitividad: Personas; Empresas; Gobierno; Recursos Naturales y Medio Ambiente; Infraestructura; Innovación, Ciencia

y Tecnología y Resultados Económicos. Tanto en el caso del PGB como de la competitividad, se trata de valores agregados medidos en el año 2010.

La matriz de datos quedó conformada de la siguiente manera:

Tabla Nº1: Valores de PGB per cápita y de variables de competitividad – Año 2010

	PGB percapita	Personas	Empresas	Gobierno	RNat. MAmb.	Infraest	Inn. C. y T.	Res. Econ.
CABA	87496,8	0,907	0,886	0,468	0,238	0,788	0,921	0,452
Santa Cruz	48585,3	0,667	0,486	0,583	0,543	0,492	0,341	0,71
Tierra del Fuego	37381,2	0,628	0,51	0,527	0,486	0,479	0,415	0,716
Chubut	38082	0,5	0,474	0,703	0,452	0,472	0,302	0,614
La Pampa	27648,4	0,638	0,404	0,823	0,348	0,41	0,305	0,449
Santa Fe	25022,9	0,4	0,505	0,65	0,402	0,44	0,282	0,424
San Luis	35633	0,391	0,271	0,706	0,36	0,41	0,528	0,503
Córdoba	23270,4	0,617	0,376	0,464	0,445	0,387	0,336	0,374
Buenos Aires	24182,3	0,471	0,293	0,699	0,453	0,369	0,273	0,378
Neuquén	38411,7	0,552	0,31	0,485	0,412	0,516	0,236	0,425
Río Negro	24265,9	0,481	0,451	0,434	0,318	0,356	0,312	0,403
Entre Ríos	16352,9	0,455	0,273	0,679	0,401	0,362	0,169	0,382
Mendoza	15480	0,543	0,377	0,42	0,315	0,384	0,304	0,368
San Juan	15034,1	0,37	0,312	0,521	0,354	0,245	0,393	0,442
Misiones	14927,5	0,229	0,365	0,653	0,344	0,235	0,156	0,428
La Rioja	22039	0,357	0,148	0,668	0,215	0,284	0,248	0,308
Tucumán	11721	0,36	0,244	0,437	0,332	0,246	0,226	0,273
Corrientes	10514,6	0,281	0,273	0,492	0,263	0,318	0,158	0,329
Salta	11474,9	0,415	0,156	0,468	0,314	0,283	0,179	0,219
Catamarca	18992,7	0,363	0,166	0,395	0,339	0,181	0,181	0,405
Jujuy	9057,4	0,384	0,179	0,449	0,279	0,211	0,134	0,3
Formosa	6384,5	0,142	0,185	0,489	0,263	0,26	0,115	0,478
Santiago del Estero	6021,1	0,134	0,252	0,63	0,209	0,179	0,127	0,311
Chaco	9461,3	0,163	0,174	0,476	0,299	0,224	0,063	0,284

Fuentes: Fundación Libertad de la CABA e Instituto de Investigaciones Económicas de la Bolsa de Córdoba

El valor del PGB per cápita para los distritos subnacionales argentinos se calcula dividiendo el valor del producto bruto geográfico estimado en pesos por la cantidad estimada de la población de cada distrito subnacional.

Los valores de las variables de competitividad tienen unidades de medida heterogéneas pero en la Tabla N°1 ya aparecen estandarizadas con un puntaje de ranking desde cero hasta uno siendo uno el valor de máxima competitividad.

6. Resultados

En primer lugar se realizaron los gráficos de dispersión siguientes:

Gráfico N°1: Dispersión entre valores de la variable Personas y el PGB per cápita

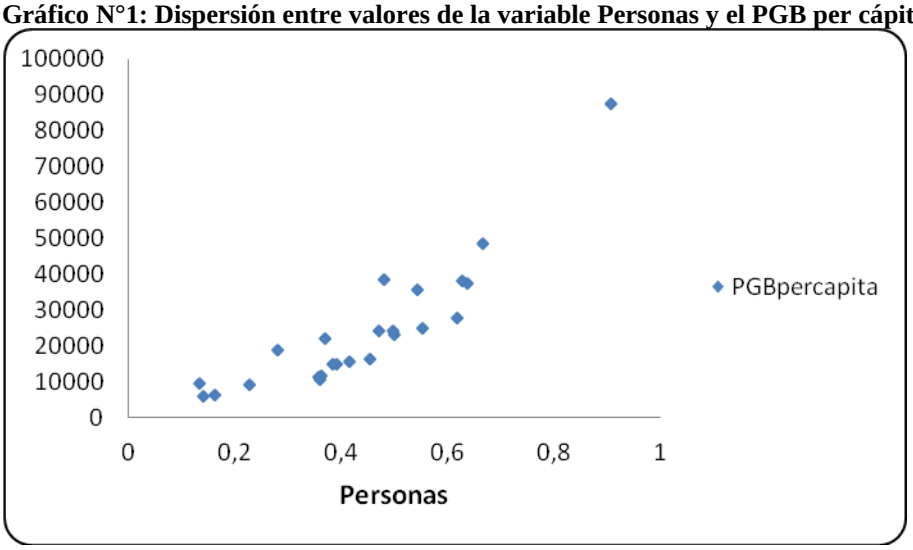


Gráfico N°2: Dispersión entre valores de la variable Empresas y el PGB per cápita

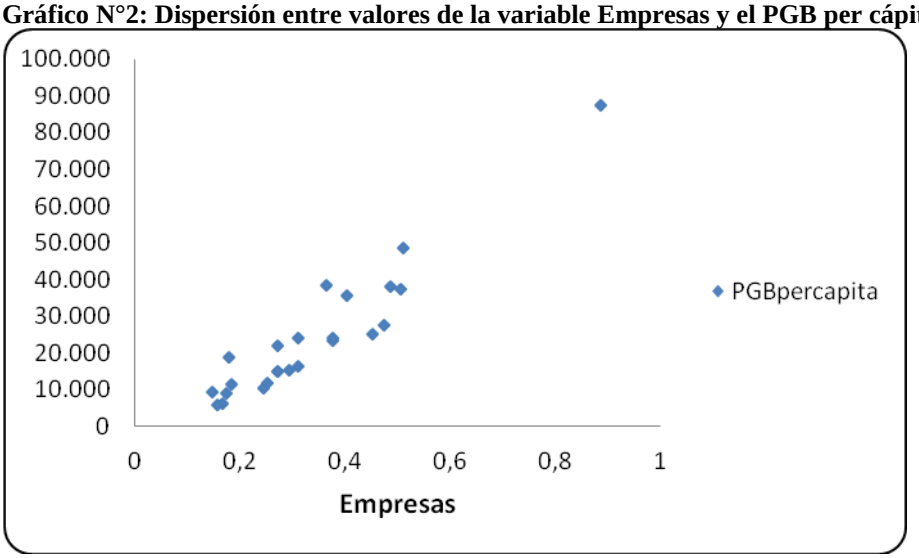


Gráfico N°3: Dispersión entre valores de la variable Gobierno y el PGB per cápita

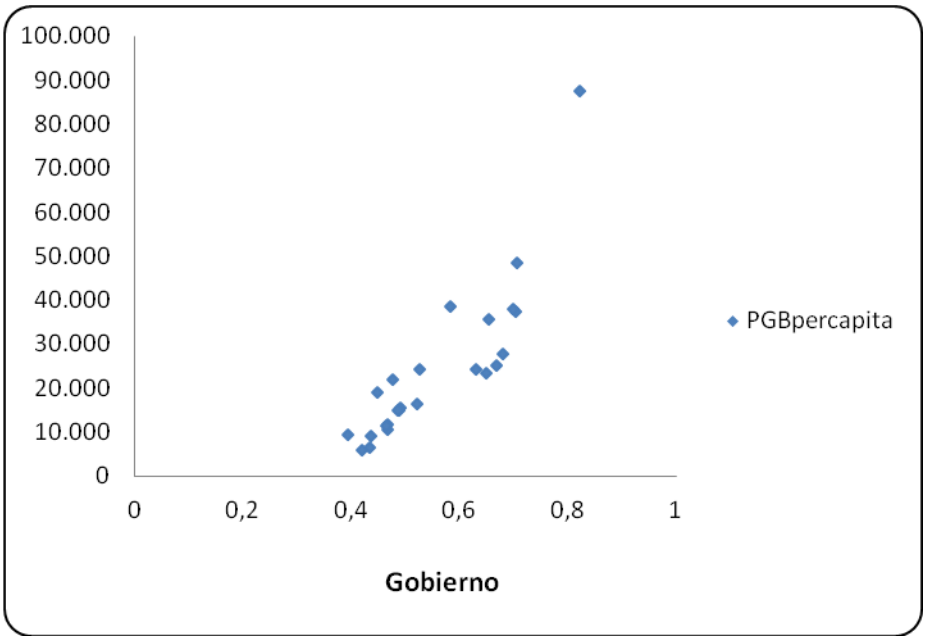


Gráfico N°4: Dispersión entre valores de la variable Recursos Naturales y Medio Ambiente y el PGB per cápita

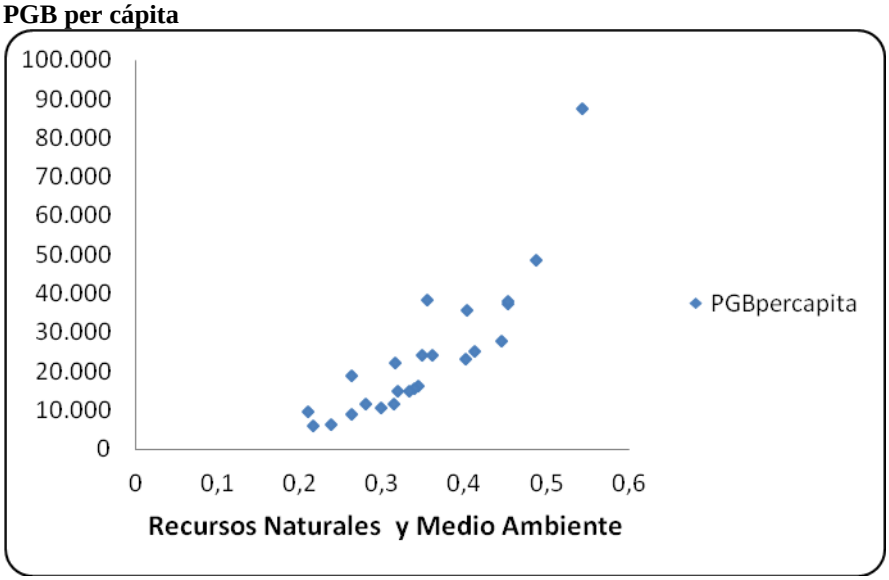
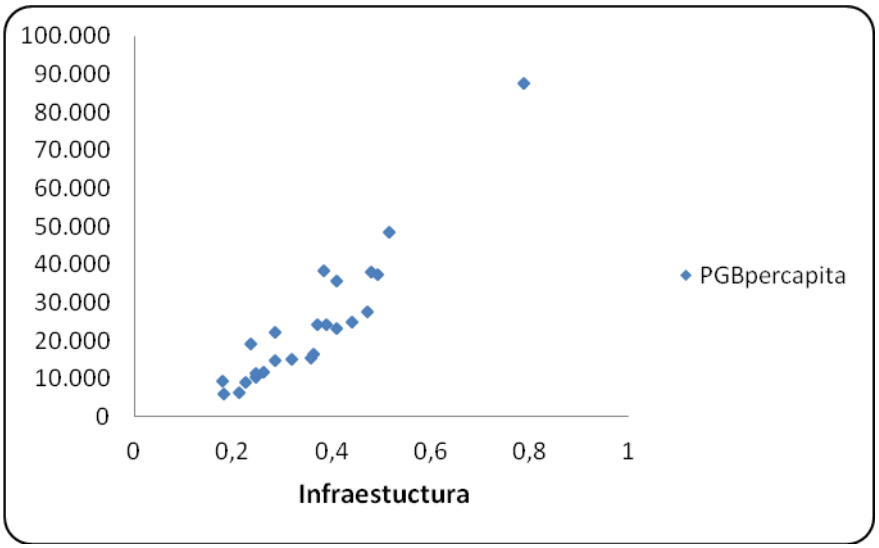


Gráfico N°5: Dispersión entre valores de la variable Infraestuctura y el PGB per cápita



GráficoN°6: Dispersión entre valores de la variable Innovación y PGB per cápita

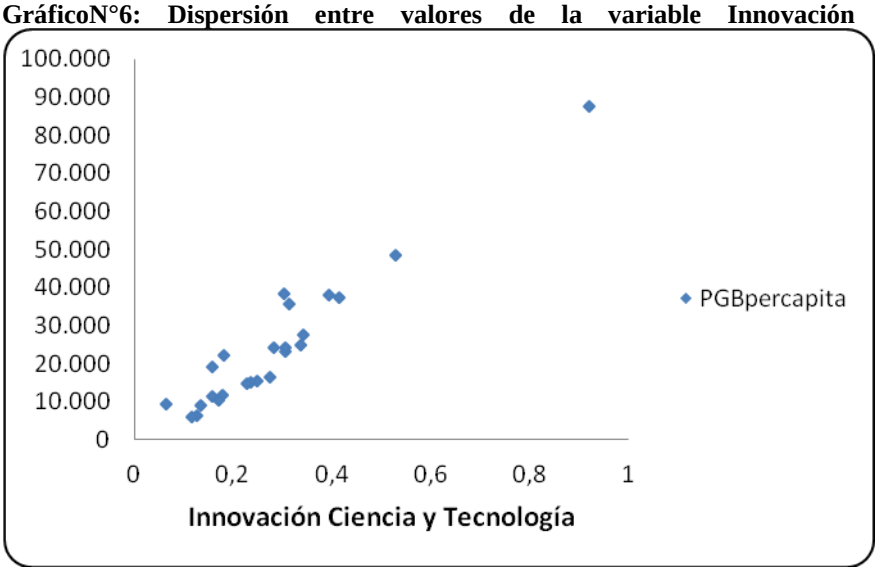
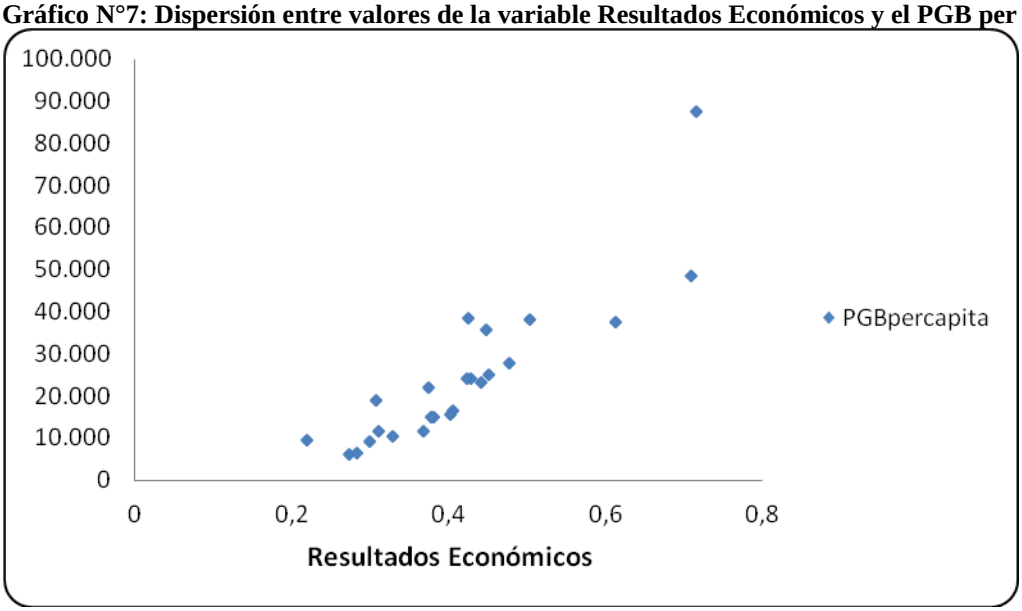


Gráfico N°7: Dispersión entre valores de la variable Resultados Económicos y el PGB per cápita



En los Gráficos de dispersión se puede observar la existencia de un outlier para cuatro (Personas, Empresas, Infraestructura e Innovación, Ciencia y Tecnología) de las siete variables analizadas que corresponde a la Cuidad Autónoma de Buenos Aires. Como consecuencia, el análisis de regresión lineal se realizó excluyendo la Ciudad Autónoma de Buenos Aires.

Tabla Nº2: Coeficientes de regresión y estadísticos asociados

Coef.	Est.	E.E.	LI(95%)	LS(95%)	T	Valor p	CpMallows
const	-22374,16	6508,51	-36246,71	-8501,60	-3,44	0,0037	
Personas	12950,39	14648,76	-18272,68	44173,47	0,88	0,3906	7,80
Empresas	-23551,72	15523,62	-56639,54	9536,09	-1,52	0,1500	9,22
Gobierno	7690,45	10044,22	-13718,29	29099,19	0,77	0,4558	7,61
RNat y MA	17638,29	24194,73	-33931,54	69208,12	0,73	0,4772	7,56
Infraestruct	49673,58	21468,75	3914,04	95433,13	2,31	0,0353	12,08
Inn C y T	15079,81	14277,54	-15352,04	45511,66	1,06	0,3076	8,11
Res Econom	35138,90	15089,32	2976,79	67301,01	2,33	0,0343	12,15

En la Tabla Nº2 aparecen los coeficientes de regresión para el modelo lineal múltiple.

Tabla Nº3: Valor de Bondad de Ajuste del Modelo

Variable	N	R^2	R^2Aj
PGB	23	0,87	0,81

Tabla Nº4: Análisis de la varianza

FV	SC	gl	CM	F	Valor p
Modelo	2660260262,22	7	380037180,32	14,52	<0,0001
Personas	20451731,54	1	20451731,54	0,78	0,3906
Empresas	60231672,45	1	60231672,45	2,30	0,1500
Gobierno	15340411,39	1	15340411,39	0,59	0,4558
RNat y MAmb	13907113,88	1	13907113,88	0,53	0,4772
Infraestruct	140088761,11	1	140088761,11	5,35	0,0353
Inn C y T	29191125,90	1	29191125,90	1,12	0,3076
Res Econom	141906663,15	1	141906663,15	5,42	0,0343
Error	392515685,71	15	26167712,38		
Total	3052775947,93	22			

En la Tabla Nº4 puede observarse que hay relación lineal entre el PBG per cápita y las variables de competitividad analizadas ($p<0,0001$) y que las variables predictoras que aportan una relación lineal significativa son *Infraestructura* y *Resultados Económicos* con valores de $p<0,05$.Teniendo en cuenta la información de la Tabla Nº 4 se propone un nuevo modelo de regresión ajustado con las variables predictoras de competitividad con mayor importancia predictiva del PGB per cápita.

Tabla Nº5: Coeficientes de regresión y estadísticos del modelo ajustado

Coef.	Est.	E.E.	LI(95%)	LS(95%)	T	Valor p	CpMallows
const	-16469,58	4147,24	-25120,56	-7818,59	-3,97	0,0008	
Infraestruct	68806,94	14138,42	39314,72	98299,15	4,87	0,0001	24,60
Res Econom	35280,09	11591,62	11100,41	59459,77	3,04	0,0064	10,87

En la Tabla Nº5 aparecen los coeficientes de regresión para el modelo lineal múltiple ajustado con sólo dos variables de competitividad.

Tabla Nº6: Análisis de la varianza del modelo

FV	SC	gl	CM	F	Valor p
Modelo	2499586881,18	2	1249793440,59	45,19	<0,0001
Infraestruct	655098178,35	1	655098178,35	23,68	0,0001
Res Econom	256221090,70	1	256221090,70	9,26	0,0064
Error	553189066,75	20	27659453,34		
Total	3052775947,93	22			

En la Tabla Nº6 puede observarse que hay relación lineal entre el PBG per cápita y las dos variables de competitividad analizadas en el modelo ajustado ($p<0,0001$) presentando las variables predictoras *Infraestructura* y *Resultados Económicos* una relación lineal significativa con valores de $p<0,05$.

Tabla Nº7: Valor de Bondad de Ajuste del Modelo ajustado

Variable	N	R^2	R^2Aj
PGB	23	0,82	0,80

A modo de validación del modelo ajustado, se realizó una prueba de Shapiro-Wilks con los residuos estudentizados.

Tabla Nº8: Test de normalidad para residuos estudentizados del modelo de regresión

Variable	n	Media	D.E.	W*	p (una cola)
RE_PGB	23	0,02	1,05	0,94	0,3781

El valor de $p\geq0,05$ establece que no puede rechazarse la hipótesis de normalidad y por lo tanto se asume la normalidad de los datos.

Finalmente, la ecuación del modelo ajustado se puede expresar de la siguiente manera:

$$Y= -16.469,58 + 68.806,94 \,.\, X_{Infraest} + 35.280,09.\, X_{ResEconom}$$

También con los fines de la verificación de los supuestos del modelo propuesto se presentan gráficos de los residuos estudentizados versus cada una de las variables predictoras del modelo.

Gráfico N°8: Dispersión entre valores de la variable Infraestructura y los residuos

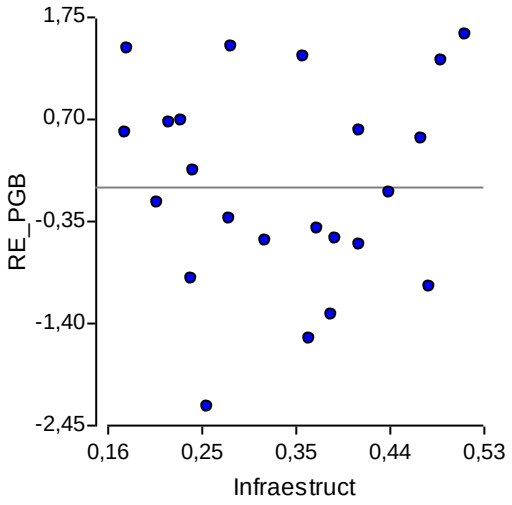
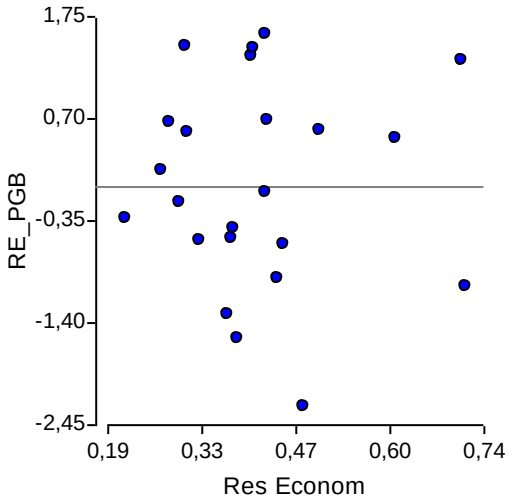


Gráfico N°9: Dispersión entre valores de la variable Resultados Económicos y los residuos



En los Gráficos Nº8 y Nº9 pueden observarse que no existen tendencias que sugieran falta de ajuste del modelo.

7. Conclusiones

El modelo de regresión lineal múltiple con siete variables de competitividad predictoras del PGB per cápita de las provincias argentinas podría aplicarse con fines predictivos pero profundizando el análisis se ajusta el modelo con las variables de competitividad que mejor explican la asociación lineal positiva entre las variables analizadas.

Las variables de competitividad *Infraestructura* y *Resultados Económicos* analizadas como predictoras presentan asociación positiva y una relación lineal significativa con los valores del *PGB per cápita*. Estas dos variables son las que mejor predicen el PGB per cápita de las provincias argentinas.

8. Bibliografía

Bejarano, J. (1995). Las cadenas productivas y la competitividad. *Cuadernos de Desarrollo Agrícola*. Vol. 1 Nº 1, Bogotá.

Bernal, C. y Laverde, J. (1995). Proyecto de modernización de PyMEs. Servicio Nacional de Aprendizaje, SENA, Bogotá.

Canavos G. (1988). *Probabilidad y estadística: aplicaciones y métodos*. Mc Graw-Hill, México.

Delfino, J. (2001). La Medición de la Actividad Económica a Nivel Regional. *Revista de Economía y Estadística*. Cuarta Época,Vol. XXXIX-XLI.

Esser,K.;Hillebrand,W.; Messner, D. y Meyer-Stamer, J. (1996). *Competitividad sistémica: Nuevo desafío a las empresas y a las políticas*. Revista de la CEPAL, Santiago de Chile.

Garay, L. (1998). *Estructura industrial e internacionalización*. Biblioteca Luis Ángel Arango. Disponible en Internet http://lablaa.org

Hernández, R. (2004). *Marco Teórico Conceptual de la Competitividad*. CEPAL. Santiago de Chile.

Otero, G.A.; Salim, L. y Carbajal, R. (2006). Competitividad: marco conceptual y análisis sectorial para la provincia de Buenos Aires. *Cuadernos de Economía*, Nº 74. Ministerio de Economía de la Provincia de Buenos Aires.

Peña, D. (2002). *Análisis de datos multivariantes*. McGraw-Hill.

Piñeiro, M; Jaffé, W.; Muller, G. (1993). *Innovation, competitiveness and agroindustrial development*. Presented at the Meeting of Integrating Competitiveness, Sustainability and Social Development.

Polit D. y Hungler B. (2000). *Procedimientos estadísticos multivariados*. Mc Graw-Hill, México.

Roldán, D. y C.F. Espinal. (2004). ¿Son posibles los acuerdos de competitividad en el sector agroproductivo? *Colección de documentos IICA*, Serie Competitividad No. 3, Bogotá.

Silva C. y Salinas M. (2007). Modelos de Regresión y Correlación. *Revista Ciencia y Trabajo*, Oct – Dic; 8 (22).

Solleiro, J.S.; Castañon, R. (2005). Competitividad y sistemas de innovación. Programa de apoyo a proyectos de investigación e innovación tecnológica de la DGAPA-UNAM, México, DF.

Taucher E. (1997). *Bioestadística*. Editorial Universitaria, Santiago.

Vaca, J. y Cao, H. (2005). Continuidades y rupturas en las desigualdades territoriales de la República Argentina. *Revista de Estudios Regionales.* Nº 72

BREVE TRATADO DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER. APLICACIONES A CIRCUITOS.

Rufino Iturriaga
UNNE, Resistencia - rufinoit@yahoo.com.ar

Ethel Carina Jovanovich
UNNE, UTN-FRRe, Resistencia - carijovanovich@yahoo.com.ar

Recibido 30 de abril de 2014
Aceptado 8 de mayo d 2014

BREVE TRATADO DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER. APLICACIONES A CIRCUITOS.

Rufino Iturriaga[1]

Ethel Carina Jovanovich[2]

RESUMEN

Las series de Fourier permiten describir una función periódica a partir de la fase y la amplitud, elementos del dominio de la frecuencia. La transformada de Fourier permite extender la aplicación en el dominio de la frecuencia a funciones que no son de naturaleza periódica.

En este desarrollo se realiza una breve introducción a la transformada de Fourier, su concepto y propiedades, más el tratamiento del teorema de Parseval y algunas aplicaciones a circuitos, destinado a personas con previos conocimientos de cálculo.

Palabras clave: Fourier – Transformada – Parseval – Circuitos.

CONCEPTOS - PROPIEDADES

Una función periódica se puede expresar como una combinación lineal de funciones seno y coseno a través de las series de Fourier[3]. ¿Cómo se puede lograr lo mismo con funciones que no son periódicas?

Las funciones periódicas f(t), de período T, se convierten en *no periódicas* cuando $T \to \infty$.

La función f(t) en forma de serie de Fourier exponencial será:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega_0 t} \qquad [1]$$

en la que $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ y $C_n = \dfrac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt$

La expresión de C_n se reemplaza en [1] y posteriormente, a través de un proceso heurístico, se permutan serie e integral, se cambia el orden de integración y se construye la integral de Riemann de la función *h(v)*, con:

$$h(v) = e^{i\omega(t-u)} \qquad [2]$$

se llegará a:

---

[1] Rufino Iturriaga – UNNE, Resistencia - rufinoit@yahoo.com.ar

[2] Ethel Carina Jovanovich – UNNE, UTN-FRRe, Resistencia - carijovanovich@yahoo.com.ar

[3] Jean-Baptiste Joseph Fourier: (Auxerre, 1768 - París, 1830) Ingeniero y matemático francés. Hijo de sastre y educado por los benedictinos. Acompañó a Napoleón en su expedición oriental de 1798 y fue nombrado gobernador del Bajo Egipto. Vuelto a Francia en 1801, comenzó sus experimentos sobre la propagación del calor. En la Academia de Ciencias de París presentó documentos relacionados con la conducción de calor, señalando que una función arbitraria podía expresarse como la suma de una serie trigonométrica, trabajos que fueron criticados por la falta de rigor (Lagrange, uno de los árbitros del momento, negó la propuesta de Fourier de manera terminante y los escritos no fueron aprobados; la misma posición tomaron otros conocidos matemáticos como Laplace y Monge) En 1822 publicó La Théorie Analytique de la Chaleur. Las "Series de Fourier" han tenido gran influencia en muchas áreas de la matemática. Fourier también trabajó en temas de resolución de ecuaciones, los cuales quedaron inacabados.

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-u)}d\omega du=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega u}du e^{i\omega t}d\omega \qquad [3]$$

Para que [3] sea válida, se deberán cumplir:
a) que f sea absolutamente integrable:

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt \langle +\infty$$

b) que f tenga una cantidad finita de máximos, mínimos y puntos de discontinuidad en cualquier intervalo.

Con estas condiciones, la expresión integral de f mostrada converge a f(t) en los puntos donde hay continuidad y a $\lim_{t\to 0}\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}$ donde hay discontinuidad.

La Transformada de Fourier de f(t) se define por:

$$\Im[f]=F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\mathrm{t})e^{-i\omega t}dt \qquad [4]$$

mientras que la transformada inversa de Fourier:

$$\Im^{-1}[F]=f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \qquad [5]$$

Dentro de las propiedades a tener en cuenta para la Transformada de Fourier:
Linealidad:

$$\Im[af+bg]=a\Im[f]+b\Im[g] \qquad [6]$$

Derivabilidad: si f es absolutamente continua en cualquier intervalo finito y $f'\in L_1(-\infty;+\infty)$, entonces:

$$\Im[f']=i\omega\Im[f] \qquad [7]$$

lo cual expresa que a la derivación en el dominio del tiempo, le corresponde la multiplicación por iω en el dominio de las frecuencias.

Contracción y dilatación:

$$\Im[f(at)]=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)\text{con } a\in\square \qquad [8]$$

así, la contracción en el dominio del tiempo supone una dilatación en el dominio de la frecuencia.

Desplazamiento en el tiempo:
$F(\omega)=\Im[f(t)]$, entonces:

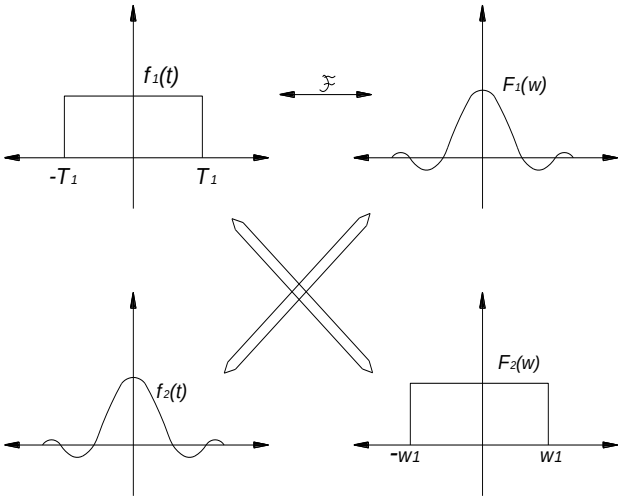
$$\Im[f(t-t_0)]=F(\omega)e^{-i\omega t_0} \qquad [9]$$

resulta que un desplazamiento en el tiempo de la señal origina un desplazamiento de fase en la transformada.

Desplazamiento en la frecuencia:

$F(\omega) = \Im\left[f(t) \right]$, entonces:

$$\Im\left[f(t)e^{-i\omega t_0} \right] = F(\omega - \omega_0) \qquad [10]$$



Simetría o Dualidad:[4]

$$F(\omega) = \Im\left[f(t) \right] \Rightarrow$$

$$\Im\left[F(t) \right] = 2\pi f(-\omega) \qquad [11]$$

Para cualquier par de transformadas hay un par dual con las variables de tiempo y frecuencia intercambiadas. (figura 1)

Figura 1: *Simetría en la Transformada de Fourier.*

CONVOLUCIÓN[5]

Sean f(t) y g(t) dos funciones integrables en toda la recta real, se define la convolución por medio de la siguiente integral:

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)du \qquad [12]$$

La convolución tiene las propiedades de asociatividad y conmutatividad. Calcular su transformada de Fourier será útil, entre otras cosas, para la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

La transformada de la convolución es igual al producto de las transformadas, convirtiendo la convolución en una operación más simple.

Sean $f(t) \wedge g(t) \in L_1(-\infty; +\infty) \Rightarrow$

$$\Im\left[f * g \right] = \Im(f)\Im(g) \qquad [13]$$

La convolución en el dominio del tiempo se corresponde con una multiplicación en el dominio de la frecuencia.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)h(t-u)du \Rightarrow$$

[4] De la dualidad se pueden deducir nuevas propiedades; así, si a la derivación en el dominio del tiempo corresponde una multiplicación en el dominio de la frecuencia, entonces, la multiplicación *it* en el dominio del tiempo corresponde a la diferenciación en el dominio de la frecuencia.

[5] El término convolución, corresponde a una castellanización del término en inglés convolution (twist together) cuya interpretación más acertada es *conjunto retorcido*.

$$\Im\left[y(t)\right] = Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \qquad [14]$$

La convolución en el dominio de la frecuencia se corresponde con la transformada de Fourier del producto de dos funciones en el dominio del tiempo.

$$f\left(t\right) = f_1(t).f_2(t) \Rightarrow \Im\left[f(t)\right] = F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(v)F_2(\omega - v)dv \qquad [15]$$

Considerando un sistema lineal invariante en el tiempo[6] con respuesta al impulso $h\left(t\right) = \delta(t - t_0)$, la respuesta en frecuencia de este sistema será la transformada de Fourier de h(t) y estará dada por:

$$H\left(\omega\right) = e^{-i\omega t_0} \qquad [16]$$

Para cualquier entrada x(t) con transformada de Fourier X(ω), la transformada de Fourier de la salida es:

$Y\left(\omega\right) = H(\omega)X(\omega)$, de la cual:

$$Y(\omega) = e^{-i\omega t_0}X(\omega) \qquad [17]$$

resultado que muestra un desplazamiento en el tiempo, según la propiedad antes vista. Específicamente, un sistema para el cual la respuesta al impulso $\delta(t - t_0)$ aplica un desplazamiento en tiempo de t_0 a la señal de entrada; esto es:

$$y\left(t\right) = x(t - t_0) \qquad [18]$$

Si $\Im\left[f\right] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathrm{t})e^{-i\omega t}dt$ converge, puede expresarse acertadamente que la función $f(t)$ tiene transformada de Fourier. Las funciones que presentan un *correcto* funcionamiento, no tienen problema de convergencia; $f(t)$ difiere de cero en un intervalo finito de tiempo y encierra un área finita a lo largo del rango de integración.

Considerando lo mencionado, todos los pulsos de duración finita serán funciones de comportamiento *correcto*.

Si $f(t)$ difiere de cero en un intervalo infinito de tiempo, tendrá transformada de Fourier si $\int_{-\infty}^{\infty} \left|f(t)\right|dt$ existe y cualquier discontinuidad posible es finita.

Una función del tipo $f(t) = Ke^{-at}$ es un claro ejemplo.

Existe un grupo de funciones, de alto interés por su trascendencia en las ciencias y la ingeniería, que no tienen Transformada de Fourier en sentido estricto y para llegar a la misma debe recurrirse a la habilidad matemática, por ejemplo $\cos\omega_0 t$.

Considerando la transformada inversa [5], si:

$F\left(\omega\right) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \Rightarrow$

---

[6] Sistema Lineal Invariante en el Tiempo (SLIT): el sistema lineal es aquel que cumple con el **principio de superposición**, que a su vez verificará adición y homogeneidad, de manera que el sistema lineal cumplirá: $k_1x_1(t) + k_2x_2(t) \Rightarrow k_1y_1(t) + k_2y_2(t)$.

El sistema es invariante en el tiempo si la respuesta del mismo no depende del momento en el cual es excitado, por lo tanto:

$si\ x(t) \rightarrow y(t) \Rightarrow x(t - t_0) \rightarrow y(t - t_0)$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[2\pi\delta(\omega-\omega_0)\right]e^{i\omega t}d\omega \qquad [19]$$

Por desplazamiento de la función impulsiva, $f(t) = e^{i\omega_0 t}$

de modo que:

$$\Im\{e^{i\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega-\omega_0) \qquad [20]$$

Se sabe que:

$$\cos\omega_0 t = \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}$$

que reemplazando:

$$\Im\{\cos\omega_0 t\} = \frac{1}{2}\left[\Im\{e^{i\omega_0 t}\} + \Im\{e^{-i\omega_0 t}\}\right]$$

$$\Im\{\cos\omega_0 t\} = \frac{1}{2}\left[2\pi\delta(\omega-\omega_0) + 2\pi\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

$$\Im\{\cos\omega_0 t\} = \pi\delta(\omega-\omega_0) + \pi\delta(\omega+\omega_0) \qquad [21]$$

De una manera análoga:

$$\Im\{sen\omega_0 t\} = i\left[\pi\delta(\omega+\omega_0) - \pi\delta(\omega-\omega_0)\right] \qquad [22]$$

TEOREMA DE PARSEVAL[7]

El teorema de Parseval relaciona la energía asociada a una función de energía finita en el dominio del tiempo con la transformada de Fourier de la función. Si la función f(t) en el dominio del tiempo es la tensión (aunque también puede ser la corriente) en una impedancia de 1Ω, la energía asociada se puede calcular como:

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt \qquad [23]$$

Parseval establece que la citada energía puede calcularse mediante una integración en el dominio de la frecuencia, lo cual se puede expresar como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2 d\omega \qquad [24]$$

Dicho de otra manera, las energías de señal de una señal de energía y su Transformada de Fourier son iguales.

El producto de dos señales de energía en el dominio del tiempo corresponde a la convolución de sus transformadas en el dominio de la frecuencia:

$$\Im[x(t)y(t)] = X(\omega) * Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu)Y(f-\nu)d\nu \qquad [25]$$

[7] Marc-Antoine Parseval des Chénes (1755 Rosières-aux-Salines, 1836 Paris). Proveniente de una familia aristocrática de ricos terratenientes. Partidario realista, fue encarcelado en 1792 y fue opositor al régimen de Napoleón. De su obra científica solamente se conocen 5 publicaciones, las cuales fueron presentadas a la Academia de Ciencias entre 1798 y 1804. Fue propuesto en varias ocasiones para la Academia de Ciencias pero nunca fue honrado con la elección.

Pero relacionando, según se ha definido la transformada de Fourier:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)e^{-i2\pi f t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu)Y(f-\nu)d\nu \qquad [26]$$

La [26] se cumple para cualquier f, pero si particularmente $f = 0$ se llega a la forma generalizada del teorema de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu)Y(-\nu)d\nu$$

En el caso que $y(t) = x^*(t)$[8]

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu)X(-\nu)d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu)X^*(\nu)d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} |X(\nu)|^2 d\nu$$

De manera que se llega a la igualdad de la energía de señal en los dominios del tiempo y la frecuencia[9]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \qquad [27]$$

El teorema de Parseval brinda una interpretación física del módulo de la transformada de Fourier, ya que el mencionado módulo elevado al cuadrado es una densidad de energía (en Joule/Hertz). $|F(\omega)|^2 = |F(2\pi f)|^2$ multiplicado por el diferencial, es la energía en una banda infinitesimal de frecuencias y la energía total (para 1Ω) es la integral (o sumatoria) para la totalidad de las frecuencias.

Si se pretende encontrar la energía contenida en un pulso rectangular de tensión, se tendrá en cuenta que la transformada de Fourier para un pulso de ese tipo es:

$$V(\omega) = V_m \tau \frac{sen\left(\omega t/2\right)}{\left(\omega t/2\right)} \qquad [28]$$

A medida que se reduce el ancho del pulso de tensión (τ), la parte dominante del espectro de amplitud [-2π/τ; 2π/τ] se distribuye, lógicamente, en un rango más amplio de frecuencias, lo cual concuerda con el citado coloquial "al comprimir el tiempo la frecuencia se estira" (y viceversa).

Si se busca transmitir un pulso rectangular único que lleve una fidelidad razonable, la frecuencia de corte deberá ser al menos de (2π/τ).(rad/seg) (el ancho de banda del sistema debe ser lo suficientemente grande para aceptar la parte dominante del espectro de amplitud).

---

[8] La propiedad de la conjugación establece $x(t) \overset{\Im}{\leftrightarrow} X(j\omega) \Rightarrow x^*(t) \overset{\Im}{\leftrightarrow} X^*(-j\omega)$ para la transformada de Fourier, propiedad que surge de la evaluación del conjugado complejo de $X(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt$. De esta manera: $X^*(i\omega) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt\right]^* = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{i\omega t}dt \Rightarrow \quad X^*(-i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{-i\omega t}dt$, por lo que $X(-i\omega) = X^*(i\omega)$ cuando x(t) es real.

[9] Para llegar a la [25] se tienen en consideración $yy^* = |y|^2$ y $\Im\left[y^*(t)\right] = Y^*(-f)$

La energía asociada con *v(t)* comprendida en el rango $0 < \omega < 2\pi / \tau$, según Parseval:

$$W = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\tau}} V_m^2 \tau \frac{sen^2\left(\omega t/2\right)}{\left(\omega t/2\right)^2} .d\omega \qquad [29]$$

Si $x = \frac{\omega t}{2}$ y $x = \pi$ cuando $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$

$$W = \frac{2V_m^2 \tau}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{sen^2 x}{x^2} dx$$

resolviendo la integral:

$$W = \frac{4V_m^2 \tau}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{sen 2x}{2x} dx$$

Si $y = 2x$ y $y = 2\pi$ cuando $x = \pi$

$$W = \frac{2V_m^2 \tau}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{sen\, y}{y} dy \qquad [30]$$

$$W = \frac{2V_m^2 \tau}{\pi} (1,418)$$

La energía total para 1Ω asociada con *v(t)* puede calcularse a partir de la integral en el dominio del tiempo o evaluando la [30] con límite superior de integración ∞.

La energía total: $Wt = V_m^2 \tau$

$$\eta = \frac{W}{Wt} = \frac{2V_m^2 \tau 1,418}{\pi V_m^2 \tau} = 0,902 \qquad [31]$$

De manera que, el 90% aproximadamente, de energía asociada con *v(t)* está contenida en la parte dominante del espectro de amplitud.

APLICACIÓN A CIRCUITOS

Considerando un circuito R-L como el que se muestra en la figura 2, nótese que al producir el cierre en el instante t = 0, la intensidad de corriente:

$$I(t) = \frac{E(t)}{Z(\omega)}$$

en la que, la fem aplicada:

$E(t) = E_0\, e^{i(\omega t + a)} 1(t)$ [10]

y la impedancia compleja:

$z(\omega) = R + L(D + i\omega)$

con el conocimiento de Z para cualquier valor de ω, se puede tener la respuesta:

$$E(t) = \lim_{\omega_0 \to 0} \sum_{-\infty}^{+\infty} E_n\, e^{in\omega_0 t}$$

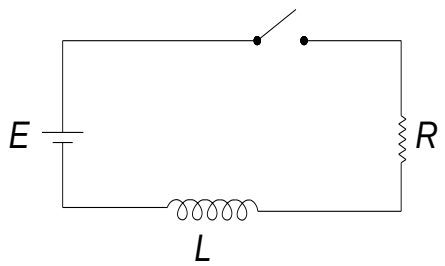


Figura 2: *Circuito R-L*

[10] $1(t) = \begin{cases} 0 \; si \; t < 0 \\ 1 \; si \; t \geq 0 \end{cases}$ función salto unidad o función de Heaviside, que se suele indicar Y(t) o U(t).

$$I(t) = \lim_{\omega_0 \to 0} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{E_n}{Z(n\omega_0)} e^{in\omega_0 t}$$

$$\omega = n\omega_0 \,; \quad \Delta\omega = \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \,; \quad E_n = \omega_0 F(\omega)$$

$$E(t) = \lim_{\Delta\omega \to 0} \sum_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \Delta\omega$$

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega$$

como $F(\omega) = \frac{E_n}{\omega_0} = E_n \frac{2\pi}{T}$ para $T \to \infty$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{-i\omega t} \, dt$$

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega)}{Z(\omega)} e^{i\omega t} \, d\omega \qquad [32]$$

Al ser F(ω) calculada como la transformada de Fourier de la fem, la [32] expresa la respuesta I(t) como transformada en sentido contrario de $F(\omega)/Z(\omega)$.

CONCLUSIONES

La difusión y utilización de la transformada de Fourier no es de las más comunes, es muy habitual, por ejemplo, que se utilice en mayor medida la transformada de Laplace que la transformada de Fourier para hallar la respuesta de un circuito, puesto que la primera no solamente converge para un rango mayor de funciones de excitación sino que además permite la utilización de condiciones iniciales, mientras que la transformada de Fourier se utiliza para los casos en que el comienzo se halle escrito en términos de $t = -\infty$. La transformada de Fourier es más útil que la transformada de Laplace en aplicaciones de teoría de la comunicación y procesamiento de señal.

La transformada de Fourier relaciona la transformada de la respuesta con la transformada de la entrada y la función de transferencia del circuito [14].

Físicamente, la transformada de Fourier suele comprenderse mejor si se la considera como un caso límite de las series de Fourier. Se ha podido apreciar que el módulo de la transformada de Fourier elevada al cuadrado resulta una medida de la densidad de energía en el dominio de la frecuencia, por lo cual permitirá asociar una fracción de la energía contenida en una función con una banda específica de frecuencias.

Las aplicaciones a circuitos no son las únicas, sin embargo, que tiene la transformada de Fourier, ya que se destacan aplicaciones mecánicas para el análisis tiempo-frecuencia en vibraciones, las cuales permiten la detección de fallas en máquinas de tipo rotativa. También pueden enumerarse el estudio de la estabilidad de los sistemas de control utilizados en diversos equipos, como además el análisis de sistemas de control que tienen problemas de estabilidad y diseño de sistemas.

Además, limitándose al área matemática solamente, la Transformada de Fourier es la indicada para el tratamiento de problemas de contorno, cuando las ecuaciones lineales en derivadas parciales tienen coeficientes independientes de x y $-\infty < x < \infty$.

Aún pues, aunque el tema no sea de los más divulgados, al menos no al nivel de otros temas, la aparición y existencia del mismo no se debe solamente a una habilidad

matemática expresada en el manejo de ecuaciones e integrales, sino que se sustenta en los múltiples campos en los cuales presta auxilio y alternativas para el armado de diseños, para estudio de situaciones y para el tratamiento de soluciones.

REFERENCIAS

- Mark A. Pinsk. (2003). *Introducción al Análisis de Fourier y las Ondoletas*. Editorial Thomson. México.
- Michael J. Roberts. (2004). *Señales y Sistemas*. Mc Graw-Hill Interamericana. México.
- Julio Usaola García – Ma. Ángeles Moreno López de Saá. (2003). *Circuitos Eléctricos*. Pearson Prentice Hall. Madrid.
- Peter V. O'Neil. (2004). *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*. Thomson. México. 5º Edición.
- Murray R. Spiegel. (1995). *Transformada de Laplace*. Mc Graw Hill, serie Schaum. México.
- http://www.miscelaneamatematica.org/Misc37/Castillejos.pdf. Obtenido el 23 de marzo de 2014.
- http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Parseval.html. Obtenido el 12 de marzo de 2014.

ALGUNAS NOTAS HISTÓRICAS SOBRE EL CÁLCULO DEL NÚMERO π

Miguel Cruz Ramírez
mcruzr@facinf.uho.edu.cu,
Universidad de Holguín Oscar Lucero Moya, Cuba

José María Sigarreta Almira
josemariasigarretaalmira@hotmail.com
Universidad Autónoma de Guerrero, México

Osvaldo Jesús Rojas Velázquez
orojasv2301@gmail.com
Universidad Antonio Nariño, Colombia

Recibido 25 de Abril de 2014
Aceptado 3 de junio de 2014

ALGUNAS NOTAS HISTÓRICAS SOBRE EL CÁLCULO DEL NÚMERO π

Miguel Cruz Ramírez (ponente)
mcruzr@facinf.uho.edu.cu,
Universidad de Holguín Oscar Lucero Moya, Cuba

José María Sigarreta Almira
josemariasigarretaalmira@hotmail.com
Universidad Autónoma de Guerrero, México

Osvaldo Jesús Rojas Velázquez
orojasv2301@gmail.com
Universidad Antonio Nariño, Colombia

RESUMEN: En el presente artículo se presenta una serie de sucesos históricos asociados al cálculo del número pi. De forma general, se perciben cuatro etapas relacionadas con el cálculo geométrico y cuasi-empírico, luego el cálculo apoyado el método de Arquímedes, seguidamente la aplicación de resultados del cálculo infinitesimal y, finalmente, el apoyo de recursos computacionales. Una vez distinguidas estas etapas es posible tomarlas en consideración durante los cursos de historia de las matemáticas, afines a la formación de matemáticos y también de profesores de esta ciencia.

Palabras clave: Pi, círculo, cálculo aproximado, historia de las matemáticas.

INTRODUCCIÓN

El número π es la razón existente entre el perímetro de una circunferencia y la longitud de su diámetro; o lo que es lo mismo, entre el área de cualquier círculo y el cuadrado del radio correspondiente. Esta segunda definición aparece implícitamente en los «*Elementos*» (Libro XII, Proposición 2), donde Euclides demuestra en el siglo III a. C. el siguiente teorema: "Οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα" (los círculos son entre sí como los cuadrados de sus radios), aunque no intentó calcular la constante correspondiente que no era otra que π. Desde el descubrimiento de esta constante hasta la demostración de su naturaleza trascendente, median dos milenios de esfuerzos por conseguir cálculos cada vez más precisos. Más allá de esto, gracias a herramientas analíticas y estadísticas se erige hoy el cálculo computacional combinado con algoritmos más eficientes y tecnologías de punta.

Las ideas primigenias que atrajeron el interés por el cálculo del número π, provenían de dos cuestiones aparentemente elementales:

1. *Problema de la rectificación de la circunferencia*: dado el radio de una circunferencia, construir un segmento de longitud unitaria.
2. *Problema de la cuadratura del círculo*: dado el radio de un círculo, construir un cuadrado equivalente al círculo.

El segundo de estos problemas es el más conocido y su celebridad se remonta a casi cuatro milenios de intentos infructuosos por resolverlo mediante regla y compás. Muchas generaciones de matemáticos debieron pasar hasta que el misterio vino a ser

aclarado con la demostración de que π es un número trascendente. Seguidamente se incursiona en la fascinante historia de este número, enfatizando los sorprendentes esfuerzos por calcularlo con exactitud cada vez mayor.

DESARROLLO

La letra π es la inicial de la palabra griega περιφερεια (*perifereia*) que significa periferia o circunferencia. El uso de la letra π se supone que fue iniciativa del inglés Oughtred en 1647, quien más tarde sería imitado por su compatriota William Jones, en 1706. Sin embargo, no es hasta 1748 en que "π" alcanza la mayor universalidad al ser utilizada por Euler en su obra «*Introductio in analysin infinitorum*», si bien se sabe que anteriormente utilizaba la letra "p". Impresionante ha sido la historia del cálculo de valores aproximados para la tal vez más célebre de las constantes. A continuación se describen cuatro importantes momentos de este esfuerzo por aprehender las cifras de π.

1. La etapa del cálculo geométrico y cuasi-empírico

Desde el punto de vista numérico, esta constante se identifica originalmente en mediciones babilonias de los años 2200 a. C. Para estos tiempos se calculaba el área del círculo utilizando la fórmula $A = c^2/12$, donde c representa la longitud de la circunferencia, de lo cual se infiere la burda aproximación π=3. Según el papiro de Rhind (2000-1700 a. C.), manuscrito del escriba Ahmés, los egipcios también asumían el valor π = 3, aunque implícitamente. En ocasiones hacían uso de la siguiente regla para la cuadratura del círculo: *"Quítese de un diámetro la novena parte, y con el resto por lado constrúyase un cuadrado que será equivalente al círculo"*. Esto es:

$$A = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2 = \frac{64}{81}d^2,$$

donde d representa la longitud del círculo. De aquí se infiere π = 256/81 ≈ 3,16, para un error inferior a 1/50. No obstante, debe subrayarse que no existe evidencia de que los egipcios hayan identificado de forma explícita al número π, de manera que la estimación posible se hace a partir de deducciones sobre hallazgos geométricos por ellos conocidos.

Según el historiador de la ciencia Otto Neugebauer (1969), un argumento elemental que sirve de base heurística para la regla anterior. Partiendo de la circunferencia de diámetro d (ver Figura 1), se circunscribe el octágono regular *ABCDEFGH* e intuitivamente se observa que el área de dicho octágono constituye una aproximación al área del círculo.

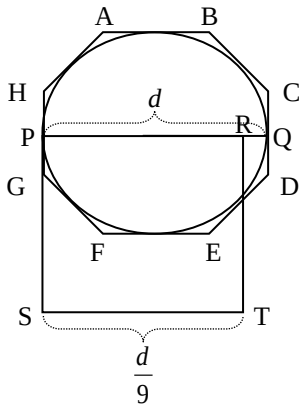


Figura 1. *Argumento geométrico de Neugebaver sobre la regla egipcia para la cuadratura del círculo.*

El área del octágono se calcula fácilmente sustrayendo, del área del cuadrado de lado *d*, el cuádruplo del área de un triángulo rectángulo isósceles de lado *d*/3. Esto es:

$$A = d^2 - 4 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{d}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}d^2 = \frac{63}{81}d^2 .$$

Al sustituir en este resultado el numerador 63 por 64 se encuentra, precisamente, el área del cuadrado cuyo lado es los 8/9 partes del diámetro y que aparece en la antigua regla egipcia.

A partir de inferencias deductivas, puede decirse que los caldeos y los hebreos antiguos también asumían el valor π = 3 en sus mediciones. Por ejemplo, en la Biblia esto aparece implícitamente durante la descripción de la construcción del templo de Salomón en (1 Re, 7:23) y (2 Cr, 4:2), cerca del año 950 a. C. En este último texto dice: *"También hizo un mar de fundición, el cual tenía diez codos de un borde a otro, enteramente redondo (...) y un cordón de treinta codos lo ceñía alrededor"*. Nótese que la estimación π = 3 resulta de la división directa de la longitud del perímetro entre la del diámetro.

De forma similar, en los libros *«Śulba Sūtras»* (fechados aproximadamente entre los siglos VIII a. C. y II d. C.), los matemáticos de la antigua India desarrollaron métodos para construir círculos con aproximadamente la misma área que un cuadrado, lo que conllevó a muchas aproximaciones diferentes del número π. Indistintamente aparecen en estos libros dos constantes diferentes: 3,2 para la relación entre el perímetro y el diámetro, y 3,088 para la relación entre el área del círculo y el área del cuadrado de lado igual a la longitud del radio. Como puede apreciarse, la diferencia tiene su origen en que dicho conocimiento corresponde a una etapa de cálculo geométrico y cuasi-empírico de manera que, incluso la menor exactitud, corresponde a una mayor dificultad para el manejo práctico de las áreas que para el cálculo de longitudes.

2. La etapa de cálculo mediante el método arquimedeano

En la antigua Grecia, las primeras evidencias del problema de la cuadratura del círculo se remontan al siglo V a. C. pues, según testimonio de Plutarco en su ensayo *«Περί φυγής»* (*Sobre el Destierro*), dicho problema ocupó a Anaxágoras de Clazomene (≈ 428 a. C.) mientras estaba en prisión. Paralelemente, alrededor del año 420 a. C., Ippía de Elide ideó la curva trascendente "cuadratriz", usada luego por Dinostrato un siglo después para rectificar la circunferencia. Sin embargo, el primer éxito notable en la estimación de π lo obtiene Arquímedes de Siracusa alrededor del año 250 a. C. En su libro *«Meditación del Círculo»* escribió: *"El perímetro de todo círculo es igual al diámetro triplicado con exceso, que es menor que la séptima parte del diámetro pero mayor que diez septuagésimo primero".* Con ello consigue una aproximación exacta hasta las decenas:

$$3{,}1408\ldots = \frac{223}{71} = 3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} = 3{,}1429\ldots$$

Por estos mismos tiempos, entre los siglos II y I a. C., Herón de Alejandría calcula para π el valor de 3,142 con aproximación similar a la de Arquímedes. Se conoce que poco tiempo después, en el siglo II d. C., Ptolomeo utiliza la aproximación

$3+\frac{8}{60}+(\frac{30}{60})^2=\frac{377}{120}\approx 3{,}1417$, probablemente asociada a sus trabajos sobre el sistema sexagesimal y en conexión con el método de Arquímedes.

El método empleado por Arquímedes fue el mismo que había utilizado Antífone durante los tiempos de Sócrates, aplicado a los polígonos regulares inscritos y circunscritos. Antífone afirmaba que si se inscribe en un círculo un cuadrado y luego, doblando sucesivamente el número de lados se construyen los polígonos regulares inscritos de 8, 16, 32, ... lados (potencias de 2), se llega a un polígono que por la pequeñez de sus lados se aproxima al círculo. Para ello debió valerse del método de exhaución de Eudoxo, así como de la conocida fórmula de duplicación:

$$a_{2n}=\sqrt{2R^2-2R\sqrt{R^2-\frac{a_n^2}{4}}}\ ,$$

donde a_n es el lado del *n*-ágono regular y *R* es el radio. Es natural que, para facilitar los cálculos, debe tomarse $R = 1$. A propósito, el método empleado por Arquímedes para la extracción de las raíces cuadradas no se conoce, ya que en sus trabajos sólo ofrece el resultado final. En esa época no se conocían las fracciones decimales, así que el método seguido por él aparenta ser el más natural. Por ser más simple, Arquímedes utilizó la cota inferior que produce 22/7, aunque la cota superior es más próxima. Varios siglos después la fracción 22/7 fue de uso corriente incluso llegando al contexto escolar contemporáneo, pero a lo largo de 16 siglos la historia apenas registró perfeccionamientos discretos de método de Arquímedes que dan una mejor aproximación de π.

También en el Oriente Antiguo los matemáticos utilizaron en sus cálculos muchas aproximaciones del número π. En China, por ejemplo, en el primer libro de la obra *«Chiu Chang Suan Shu»* (*Nueve Capítulos sobre las Artes Matemáticas*, ≈ 250 a. C.) aparece π ≈ 3 para las mediciones de campos, pero ya en el cuarto libro para cálculos más rigurosos toman π ≈ 27/8. Entre los siglos I y V los científicos chinos encontraron muchas valores cercanos al valor exacto de π. Así, en el año 75 Lin Sing encontró π ≈ 3.1547; en el 125 Chisan Hen tomó $\pi\approx\sqrt{10}$; en el 250 Wang Fu encontró π ≈ 142/45 ≈ 3,16; en el siglo III Liu Hui empezó a inscribir en un círculo un polígono de 192 lados y continuó hasta poder inscribir otro de 3072, así logró calcular π ≈ 3,14159; mientras que en el año 450 Zu Chong Zhi (420-500 d. C.) ya conocía la fracción 355/113 que sería redescubierta un milenio después por Antonius.

Por su parte, los hindúes también obtuvieron algunas aproximaciones del número π, entre ellas 3, 27/8, 243/80, $3\frac{1}{6}$, etcétera. Por ejemplo, en la obra *«Siddhanta Paulicha»*, escrita en el siglo IV, aparece el valor 3927/1250 ≈ 3.1416. En Paliputra (ciudad del Alto Ganges) Aryabhata expresó a π de la siguiente manera en el año 476: *"Sumad 4 a 100, multiplicadlo por 8 y sumad luego 62000. Esto es aproximadamente la circunferencia de un círculo cuyo diámetro es 20000."* De modo que π ≈ 62832/20000 = 3,1416. A mediados del siglo VII, estimando incorrecta la aproximación de Aryabhata, Brahmagupta calcula π como $\sqrt{10}$, similar a Chisan Hen, medio milenio atrás. Mucho más tarde Nilakantha Somatsuvan encontró π ≈ 104348/33215, aproximación exacta hasta la novena cifra. Ya este último matemático especulaba sobre el hecho de que π es inconmensurable.

De acuerdo a varios autores, entre los matemáticos árabes de estos tiempos el resultado más notable corresponde al persa Ghiyath al-Kashi, en el año 1424. Determinando el lado del $3\cdot 2^{28}$-ágono regular él pudo calcular 17 cifras exactas del número π, empleando la base numérica sexagesimal. Respecto a la matemática islámica, ya en el siglo IX Al-Khwarizmi en su *«Hisab al yabr ua al muqabala»* (*Álgebra*), señala que el hombre práctico usa 22/7 como valor de π, el geómetra usa 3, y el astrónomo 3,1416.

Con la introducción de las cifras indoarábicas en los cálculos de la Europa del siglo XII, en su *«Practica Geometriae»*, Fibonacci consigue mejorar la acotación de Arquímedes con la aproximación $3{,}1410 < \pi < 3{,}1427$ y toma $\pi \approx 3{,}141818$. En el año 1585, el holandés Adrian Antonius redescubre para π el valor aproximado $355/113 \approx 3{,}1415929$, con seis cifras decimales exactas. El resultado vio la luz solamente después de la muerte de Antonius, al ser publicado por su hijo Adrian Metzys en 1623, razón por la cual la fracción 355/113 se conoce como "número de Metzys". Metzys comenta que su padre encontró ese valor hallando la media aritmética de los numeradores y denominadores de las fracciones 377/120 (ya conocida desde Herón) y 333/106, valores aproximados de π encontrados con el método de Arquímedes. En relación a esto, Beskin (1987) señala que, probablemente, el método utilizado por Antonius fue el de fracciones continuas, pues las primeras aproximaciones de π mediante fracciones congruentes son: 3, **22/7**, 333/106, **355/113**, 102595/32657, …, aunque desestima cualquier posibilidad de que Arquímedes también lo hiciera. El método de las fracciones continuas revela el secreto matemático, pero no el histórico. Sin embargo, la posibilidad de emplear el método de fracciones continuas anuncia el preámbulo de una nueva etapa en el cálculo del número π, que se corresponde con el desarrollo del concepto de convergencia.

También con el empleo del método arquimedeano, F. Viète consigue nueve cifras decimales exactas, para lo cual requirió de polígonos de $6\cdot 2^{16}$ lados. De forma similar, en 1597 Adriano Romano obtiene 15 cifras decimales exactas con polígonos de 2^{30} lados. Poco después, en 1609 y empleando un polígono de 2^{62} lados, el alemán Ludolf van Ceulen calcula π con una aproximación de 34 cifras exactas que a solicitud suya fueron esculpidas sobre su tumba a manera de epitafio (perdida para la historia), en honor a ello los alemanes llaman a π "número ludofiano" (*die Ludophsche Zahl*).

3. La etapa del cálculo analítico

En el año 1593, Viète encontró nueve cifras decimales exactas de π tras considerar un $3\cdot 2^{17}$-ágono regular. Este matemático italiano no solo fue el primero en expresar su resultado en notación decimal, sino que encontró la primera expresión analítica del número π:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots,$$

lo cual marca un salto cualitativo en la historia del cálculo. No obstante a ello, algunos historiadores señalan que los orígenes del cálculo mediante expresiones infinitas convergentes tuvieron lugar en Kerala (India) en el siglo XV.

Una vez desarrollado el Cálculo Infinitesimal por Newton y Leibniz, las estimaciones de π comenzaron a alcanzar una exactitud nunca antes vista. Por ejemplo, Leibniz y J. Gregory demostraron la igualdad:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

La velocidad de convergencia de esta serie la convierte en poco práctica para el cálculo aproximado. Por ejemplo, si se desea calcular π con un error inferior a 0,001 es necesario efectuar la suma de los primeros 2000 términos.

De forma similar, en 1655 J. Wallis obtuvo otra identidad que conduce al cálculo del número π:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdots}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdots}$$

asimismo, tres años después, Viscout Brounecker encontró la siguiente expresión en fracción continua:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1+}\frac{1^2}{2+}\frac{3^2}{2+}\frac{5^2}{2+}\cdots,$$

y en 1717 Abraham Sharp calculó 72 decimales utilizando la siguiente serie de convergencia rápida:

$$\pi = \frac{6}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3^1 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} - \frac{1}{3^3 \cdot 7} + \cdots\right);$$

La lista de identidades es realmente larga. Matemáticos de la talla de Euler, D' Alembert, S. F. Lacroix y Bernoulli encontraron varias de ellas. Algunas de las identidades más célebres son las siguientes:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots; \qquad \frac{\pi}{4} = \frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{4}{5+}\frac{9}{7+}\frac{13}{9+}\cdots; \qquad \pi = 3 + \frac{1}{7+}\frac{1}{15+}\frac{1}{1+}\cdots;$$

$$\frac{\pi^3}{32} = \frac{1}{1^3} \quad \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} \quad \frac{1}{7^3} + \cdots; \qquad \frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{4}{5} + \frac{9}{7} + \frac{13}{9} + \cdots; \qquad \pi = 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{1} + \cdots;$$

$$\frac{\pi^3}{32} = \frac{1}{1^3} \quad \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} \quad \frac{1}{7^3} + \cdots; \qquad \frac{\pi}{2} = \frac{\ln i}{i}.$$

De forma asombrosa, en la fórmula de Euler $e^{ix} = cos(x) + i\ sen(x)$, al sustituir $x = \pi$ se obtiene $e^{i\pi} + 1 = 0$, lo cual relaciona el número π con *e*, base de los logaritmos neperianos y también con otros números como 1, 0 e *i*, cuyo surgimiento marca momentos importantes en la historia de las matemáticas.

Más adelante, en 1824, el alemán J. Dase obtuvo el valor de π con 200 cifras decimales. En 1850 Richter da 500 y en 1873 el inglés William Shanks encontró 707. Este último se valió de una fórmula deducida por Machin en 1706:

$$\frac{\pi}{4} = 4arctg\frac{1}{5} - arctg\frac{1}{239},$$

de donde resulta la siguiente expresión, a partir del desarrollo en series de Taylor

$$\pi = \frac{16}{5} \cdot \left(1 - \frac{4^1}{3 \cdot 100^1} + \frac{4^2}{5 \cdot 100^2} - \cdots\right) - \frac{4}{239} \cdot \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 57121^1} + \frac{1}{5 \cdot 57121^2} - \cdots\right).$$

Como un hecho notable, conviene señalar que basta efectuar la suma parcial

$$\frac{16}{5}\cdot\left(1-\frac{4^1}{3\cdot 100^1}+\frac{4^2}{5\cdot 100^2}-\frac{4^3}{7\cdot 100^3}\right)-\frac{4}{239},$$

para obtener $\pi \approx 3{,}14159$. En el desarrollo de Leibniz y Gregory sería necesario utilizar los primeros 200000 términos, por tener menor velocidad de convergencia.

Partiendo de los resultados de Shanks, De Morgan observó una rareza estadística, pues encontró que en los últimos 707 dígitos había una sospechosa carencia de sietes. Menciona esto en su *«Budget of Paradoxes»* de 1872 y la curiosidad permaneció hasta que, en 1945, D. F. Ferguson descubrió que Shanks había cometido un error en la posición 528, de modo que la cadena de dígitos subsiguientes era incorrecta.

En la Tabla 1 se ilustran algunos de los cálculos más precisos realizados por matemáticos de diferentes culturas y momentos históricos, desde los tiempos de Arquímedes hasta el siglo XVII.

Tabla 1. *Algunos cálculos precisos del número π en diferentes momentos históricos.*

Matemático	Año	Cultura	Precisión (cifras decimales)
Arquímedes	≈ 250 a. C.	Griega	2
Ptolomeo	≈ 150 a. C.	Greco-egipcia	3
Zu Chongzhi	≈ 450	China	6
Aryabhata	≈ 476	India	3
Al- Khwarizmi	≈ 800	Persa	3
al-Kashi	1424	Persa	14
Viète	1593	Europea	9
Van Ceulen	1600	Europea	17

Según el historiador ruso K. Ribnikov, *"el móvil de semejantes cálculos no respondía al reclamo de exigencias prácticas sino al parecer, primero, a la tendencia vanidosa de mostrar su maestría en el cálculo y segundo, al esfuerzo ingenuo de «agarrar por los cuernos» el problema de la naturaleza aritmética de π"*. Ciertamente, el problema de la irracionalidad y luego de la trascendencia de esta constante, cobra un grado todavía más agudo en especulaciones acerca de la distribución de las cifras en la expansión decimal.

Con respecto a la naturaleza más intrínseca de π, en 1761 J. H. Lambert demuestra su irracionalidad; aunque realmente lo que demostró es que si $x \neq 0$ es un número racional, entonces $tan(x)$ es irracional, y como $tan(\pi/4) = 1$, se concluye que $\pi/4$ no puede ser racional ya que en dicho caso 1 debería ser un irracional. También en relación al tema de la irracionalidad, en 1794 A. M. Legendre probó un resultado algo más fuerte: π^2 también es irracional. Sólo en 1882 el alemán C. L. F. von Lindemann logra demostrar la trascendencia, es decir, π no es cero de ningún polinomio con coeficientes racionales. A partir del año 1946 comenzaron a aparecer muchas investigaciones acerca de la

distribución de los dígitos de π, y también surgieron problemas afines que aún no alcanzan a ser resueltos como determinar la naturaleza aritmética de π+*e*, π/*e* y *ln*(π).

En la Figura 2 se ilustran 900 cifras de π utilizando tonos grises. Puede notarse cuan inextricable resultaría el intento de establecer algún tipo de patrón.

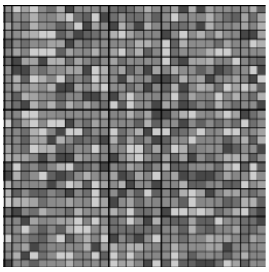


Figura 2. *Primeros 900 dígitos de π representados mediante tonos grises.*

A propósito, la historia recuerda que L. E. J. Brouwer, matemático holandés fundador del intuicionismo, solía "demostrar" la inconsistencia de los razonamientos basados en la abstracción del infinito actual mediante un ejemplo, relativo al desarrollo decimal del número π. Él afirmaba que era imposible decidir si en dicho desarrollo aparecían diez novenas seguidas. Incluso todavía es un problema abierto el denominado "problema de Brouwer": ¿existe alguna posición donde exista una sucesión de mil ceros consecutivos?

Otro móvil para estudiar la expansión decimal de π consiste en analizar si realmente se trata de un número "normal". Conforme a la definición de Borel, son normales en base 10 aquellos números donde cada uno de los diez dígitos tiene la misma probabilidad de aparición en la expansión decimal. A la par de tales problemáticas, sucesivamente se ha desarrollando el cálculo computacional cada vez más exacto del número π, dando apertura a la etapa más reciente en el orden cronológico.

4. La etapa del cálculo computacional

El empleo de las computadoras constituye un salto cualitativamente grande en el cálculo aproximado de π. Ya más arriba se señaló la temprana corrección del cálculo de Shanks, para lo cual Ferguson se valió de la fórmula de W. Morris:

$$\frac{\pi}{4} = 3 \cdot arctg\frac{1}{4} + arctg\frac{1}{20} + arctg\frac{1}{1985}.$$

Incluso dos años después L. B. Smith y J. W. Wrench (utilizando la fórmula de Machin) y el propio Ferguson prolongaron el cálculo de π hasta 808 decimales.

Ya en 1949 se habían podido calcular 2000 posiciones de π. En esta y todas las siguientes expansiones por ordenador, la frecuencia de aparición de la cifra "7" no difiere significativamente de lo esperado, y efectivamente la secuencia de dígitos ha pasado hasta ahora todas las pruebas estadísticas de aleatoriedad, dejando de lado la aparente curiosidad estadística observada por De Morgan.

También en el umbral de la era de la informática, G. W. Reitwiesner calculó en 1949 un total de 2037 cifras decimales utilizando un ordenador electrónico conocido como ENIAC, trabajando durante 70 horas. Con este resultado se confirmaron los anteriores. Ocho años más tarde F. Genuys y G. E. Felton llegaron a calcular de manera

independiente más de 10000 cifras exactas de π. Poco después los norteamericanos D. Shanks (no relacionarlo con William Shanks) y J. Wrench, el 29 de julio de 1961, consiguieron calcular 100265 cifras decimales exactas. El cálculo demoró 8 horas y 43 minutos en una IBM 7090, sin considerar los 42 minutos que demoró el ordenador utilizado en convertir el resultado de binario a decimal. La fórmula utilizada fue:

$$\pi = 24 \cdot arctg\frac{1}{8} + 8 \cdot arctg\frac{1}{57} + 4 \cdot arctg\frac{1}{239},$$

obtenida por C. Stormer en 1896. Al comparar el valor obtenido, con otro conseguido utilizando la identidad de Gauss:

$$\pi = 48 \cdot arctg\frac{1}{18} + 32 \cdot arctg\frac{1}{57} - 20 \cdot arctg\frac{1}{239},$$

pudo experimentarse un resultado idéntico.

En los años subsiguientes, conforme se desarrollaban las tecnologías de hardware, los cálculos se hacían cada vez más precisos y en menos tiempo. Algunos ejemplos ilustrativos se relacionan a continuación. De conjunto, puede observarse que la precisión del cálculo revela un desarrollo de carácter exponencial. En efecto:

1. David y Gregory Chudnovsky de la Universidad de Columbia impusieron un record tras calcular la cantidad de 1011196692 cifras, para ello se valieron de una computadora CRAY-2 y de una IBM 3090. El resultado no solo coincidió en ambos ordenadores, sino que, curiosamente, desde el lugar 762 hasta el 767 descubrieron nada menos que seis "9" consecutivos, vaticinando la posibilidad de un temprano contraejemplo a las especulaciones de Brouwer. Actualmente el grupo de estas seis novenas seguidas del número π se denomina "punto de Feynman". La denominación debe su origen a que en cierta ocasión el físico estadounidense Richard Feynman comentó lo siguiente: *"Me gustaría memorizar todos los decimales de π hasta esa posición para terminar diciendo: …9, 9, 9, 9, 9, 9 y así sucesivamente"*.

2. En diciembre de 2002 Yasumasa Kanada de la Universidad de Tokio calculó 1241100000000 dígitos en 602 horas, mediante un superordenador de 64 nodos Hitachi SR8000 con una memoria de un terabyte, capaz de llevar a cabo dos billones de operaciones por segundo. Ya estos resultados hacen uso de modificaciones de la fórmula de Machin, como la obtenida por K. Takano en 1982.

3. El 20 de mayo de 2013, Ed Karrels, de la Universidad de Santa Clara computó 26 cifras en base-16 (sistema hexadecimal), comenzando por la posición de un cuatrillón. Su resultado es: 8353CB3F7F0C9ACCFA9AA215F2. Para llevar a cabo semejante cálculo, programó un algoritmo sobre el sistema CUDA y se valió de un ordenador con cuatro gráficas NVIDIA GTX 690, otro con dos GTX 680 y 24 equipos más pertenecientes al centro de diseño de su alma máter. El proceso requirió de 35 días en completarse, sumados a 26 días más para comprobar que el resultado era correcto Por medios de algoritmos recientes, Karrels mejora sus cálculos sin comenzar por el principio de la expansión decimal, pues se apoya en la fórmula de Fabrice Bellard:

$$\pi = \frac{1}{2^6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{10n}}\left(-\frac{2^5}{4n+1}-\frac{1}{4n+3}+\frac{2^8}{10n+1}-\frac{2^6}{10n+3}-\frac{2^2}{10n+5}-\frac{2^2}{10n+7}+\frac{1}{10n+9}\right),$$

la cual es una variación de otra expresión similar descubierta por Bailey, Borwein y Plouffe en 1995 que hace posible calcular en el sistema hexadecimal unos pocos dígitos de π sin hallar todos los dígitos previos (algoritmo BBP).

El record de Karrels no se hizo sentir en los medios por coincidir con la aparición del Galaxy S4, y es que de forma general el mejoramiento de las marcas establecidas sirve más para ponderar el desarrollo computacional que el atractivo matemático de explorar intrínsecamente las cifras de π. Gracias a los ordenadores, el número de cifras conocidas es un duro reto para la memoria humana. A propósito, si bien el primer campeón en recordar cifras decimales de π fue el japonés Hiroyoki Gotu, quien con solo 21 años llegó a memorizar 42195 dígitos, la proeza actual corresponde a su compatriota Akira Haraguchi, cuando el 3 de octubre de 2006 recitó 100000 dígitos de memoria, para lo que necesitó 16 horas y media. Para memorizar usó su técnica de rimar los números con palabras japonesas. No obstante, la marca reconocida en el *«Guinnes Book of Records»* es la del chino Lu Chao con 67890 dígitos en 24 horas y 4 minutos, con un error en el dígito 67891 donde dijo "0" en lugar de "5".

La etapa del cálculo computacional no solo representa un estadio de desarrollo tecnológico, sino que también requiere del desarrollo de métodos matemáticos para el cálculo aproximado, así como el desarrollo de algoritmos eficientes. Incluso actualmente se emplean métodos provenientes de la teoría de probabilidades y estadística matemática, tal vez como inspiración renovada sobre las observaciones del matemático inglés Augustus De Morgan. Como ejemplo elemental, a partir de un experimento del naturalista francés Georges Louis Leclerc, Conde de Buffon, publicado en su *«Essai d'Arithmétique Morale»* en 1777, se pueden lograr valores aproximados de esta constante. La idea consiste en lanzar una aguja de longitud l repetidamente sobre una superficie plana en la que se han trazado rectas paralelas equidistantes, distanciadas entre sí en t unidades ($t > l$), y contabilizar los tiros y las veces en que la aguja corta o toca una de las paralelas. Si la aguja se lanza n veces y en x ocasiones cae cruzando una línea, entonces se puede aproximar π usando el método de Monte Carlo, lanzándola gran cantidad de veces hasta obtener $\pi \approx 2nl/xt$.

Aunque matemáticamente se trata de un razonamiento impecable, desde el punto de vista práctico el método no resulta viable. Por ejemplo, para superar la aproximación de Arquímedes se requerirían millones de lanzamientos. Además, el número de lanzamientos crece exponencialmente con el número de dígitos deseados, sin contar además que cualquier error en las mediciones incide significativamente. Como hecho notorio, en muchos libros suele rememorarse un experimento realizado en 1901 por el italiano M. Lazzarini, quien usando una varilla de longitud igual a 5/6 del ancho de las bandas (en cuyo caso la probabilidad teórica de corte es 5π/3), obtuvo en 3408 lances la aproximación 355/113. ¡Nada menos que el número de Metzys! Al respecto B. V. Gnedenko, en su *«The Theory of Probability»* demuestra que la probabilidad de producir este resultado en semejante experimento es menor que 1/30, lo cual suscita serias dudas sobre su autenticidad.

CONCLUSIONES

Esta ha sido una breve incursión en el largo camino del cálculo aproximado del número π. Lo más significativo de este recorrido por la historia lo constituye la presencia visible de cuatro etapas fundamentales, aspecto que puede ser tomado en consideración durante los cursos de Historia de las Matemáticas, tanto en la formación de matemáticos como de profesores de esta ciencia.

Quedan pendientes muchos aspectos interesantes que por motivo de espacio no es posible exponer en este trabajo, como el cálculo sobre otros sistemas numéricos (en binario π = 11,00100100001111110110… y en hexadecimal π = 3,243F6A8885A308D31319…), o bien el estudio de construcciones geométricas que proporcionen valores de mayor exactitud, como los métodos de Kochanski y Mascheroni utilizando solo regla y compás. Todo ello es solo una muestra de la riqueza de ideas que giran en torno al cálculo del número π. Esta constante constituye una proeza de la humanidad y su historia es un asunto de interés indeleble para las nuevas generaciones de matemáticos.

BIBLIOGRAFÍA

Baravalle, H. von (1952). The number π. *Mathematics Teacher*, Vol. XLV, No. 5, pp. 479-487.

Beckmann, P. (2007). *Historia de Pi*. Fondo Cultura Económica, México.

Beskin, N. (1987). *Fracciones maravillosas*. Mir, Moscú.

Gnedenko, B. V. (1976). *The Theory of Probability*. Mir, Moscú.

Gridgeman, N. T. (1960). Geometric probability and the number π. *Scripta Mathematika*, Vol. 25, No. 3, pp. 183-195.

Gupta, R. C. (1988). On the values of π from the Bible. *Ganita Bharati*, Vol. 10, No. 1-4, pp. 51-58.

Jami, C. (1988). Une histoire chinoise du 'nombre π'. *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 38, No. 1, pp. 39-50.

Neugebauer, O. (1969). *The Exact Sciences in Antiquity.* Dover Publications, New York.

Rajagopal, C. T.; Vedamurti, T. V. (1952). A Hindu approximation to pi. *Scripta Mathematika*, Vol. 18, pp. 25-30.

Ribnikov, K. (1991). *Historia de las Matemáticas.* Mir, Moscú

Roy, R. (1990). The discovery of the series formula for π by Leibniz, Gregory and Nilakantha. *Mathematics Magazine*, Vol. 63, No. 5, pp. 291-306.

Trier, P. E. (1989). Pi revisited. *Bulletin of the Institute of Mathematics and its Applications*, Vol. 25, No. 3-4, pp. 74-77.

UNESCO (1988). Perfeccionamiento del valor de pi. *El Correo*, p. 21.

Volkov, A. (1994). Calculation of π in ancient China: from Liu Hui to Zu Chongzhi. *Historia Scientiarum*, Vol. 4, No. 2, pp. 139-157.

EL JUEGO CON FIGURAS GEOMÉTRICAS: UNA ALTERNATIVA DIDÁCTICA EN ALUMNOS CON DÉFICIT INTELECTUAL LEVE

Mayelín Caridad Martínez Cepena
cepena@ucp.ho.rimed.cu
Universidad de Ciencias Pedagógicas "José de la Luz y Caballero"

Miguel Cruz Ramírez
mcruzr@facinf.uho.edu.cu
Universidad de Holguín "Oscar Lucero Moya"

Yohannia Ochoa Ardite
yohannia@ho.ho.rimed.cu
Dirección Municipal de Educación de Holguín.-Cuba

Recibido 25 de abril de 2014
Aceptado 03 de junio de 2014

EL JUEGO CON FIGURAS GEOMÉTRICAS: UNA ALTERNATIVA DIDÁCTICA EN ALUMNOS CON DÉFICIT INTELECTUAL LEVE

Mayelín Caridad Martínez Cepena, Miguel Cruz Ramírez, Yohannia Ochoa Ardite
cepena@ucp.ho.rimed.cu , mcruzr@facinf.uho.edu.cu , yohannia@ho.ho.rimed.cu
Universidad de Ciencias Pedagógicas "José de la Luz y Caballero", Universidad de Holguín "Oscar Lucero Moya", Dirección Municipal de Educación de Holguín.
Cuba

RESUMEN

El presente trabajo tiene como objetivo fundamental proponer una alternativa didáctica a utilizar en las sesiones de *Nociones Elementales de la Matemática*, en la etapa de aprestamiento del primer grado, de escolares con necesidades educativas especiales por déficit intelectual leve. Esta propuesta se desarrolla a través del uso del juego en el reconocimiento de las figuras geométricas básicas. Con la aplicación de dicha experiencia se obtuvieron resultados satisfactorios en el marco del desarrollo de la imaginación y creatividad, así como de otros procesos psíquicos afectados en un grupo de niños y niñas de una escuela especial, donde se demuestra la efectividad de la variante empleada, lográndose además el desarrollo de la educación estética y cultural.

Palabras clave: déficit intelectual leve, geometría elemental, estrategia didáctica, juego, procesos cognitivos, educación especial.

INTRODUCCIÓN

La escuela cubana tiene la difícil misión de formar integralmente a las nuevas generaciones, preparándolas para vivir en una época de avances vertiginosos en la revolución científico técnica, cuyo impacto en la práctica social es tan grande y en ocasiones tan rápido, que se precisa de una concepción que asegure una mayor vigencia de los conocimientos y sus posibilidades de aplicación a nuevas condiciones, para formar un ser creativo, con una mente flexible, abierta a la experiencia. Las personas con necesidades educativas especiales (NEE) también necesitan esa formación, y para lograrlo requieren mayores niveles de educación y atención integral.

En el último lustro, en Cuba, a partir de las nuevas exigencias del proceso de enseñanza-aprendizaje, se han realizado estudios (Sistema de Evaluación de la Calidad de la Educación, Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación, entre otros) acerca del proceso de enseñanza-aprendizaje, cuyos resultados muestran las potencialidades e insuficiencias de dicho proceso, y donde ocupa un lugar destacado la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, asignatura que por su naturaleza permite explicar y entender diversos campos de la realidad, y el hecho de que se presente bajo una forma sumamente abstracta, sólo superficialmente puede encubrir el hecho de que tiene su origen en el mundo exterior (Maza, 2005).

A esta labor docente no ha escapado la Educación Especial que *"como política de integración social (...) constituye un reto para los sistemas educativos y, sobre todo,*

para las instituciones escolares y para los educadores" (López, 2000, p. 5), donde los escolares con déficit intelectual constituyen el 46% de la población infantil con necesidades educativas especiales, labor que se desarrolla con niños y niñas que presentan una condición del desarrollo intelectual en que a causa de una lesión orgánica o funcional del sistema nervioso central, se afecta la conducta adaptativa, y cuya atención parte de una garantía constitucional que *"...presta especial atención al desarrollo de las escuelas especializadas para niños con limitaciones físicas, mentales o con problemas de conducta, a fin de facilitarles en la mayor medida posible y según sus aptitudes individuales, que además de valerse por sí mismos, se incorporen a la vida en sociedad"* (Código de la Niñez y la Juventud, Ley No. 16, Art. 29), estableciéndose además, como documento rector el Plan de Desarrollo de cada Especialidad.

La enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y específicamente el trabajo con las figuras geométricas, en los niños y niñas con déficit intelectual, presenta serias dificultades, donde no solo se observan las derivadas de su condición del desarrollo intelectual, sino también motivacionales y de aplicabilidad. Sin embargo los antecedentes investigativos al respecto son escasos, lo que se constata a través de consultas realizadas en bases de datos y la revisión de las memorias de los eventos del Centro de Referencia Latinoamericano para la Educación Especial (CELAEE).

La geometría como uno de los componentes de las matemáticas, permite al escolar adquirir conocimientos acerca de las figuras geométricas y la relación entre ellas. Estos contenidos son llevados a todos los niveles de enseñanza, y se incluye en los planes de estudio del escolar con necesidades educativas por déficit intelectual. En la etapa de aprestamiento del primer grado, se incluye la identificación de figuras geométricas básicas. Todo esto facilita, durante la educación del alumno con esta necesidad educativa especial, el desarrollo de sus procesos psíquicos y especialmente el estímulo de la orientación espacial y la imaginación.

La etapa de aprestamiento se realiza en las primeras ocho semanas del curso y comprende el trabajo con un conjunto de áreas a estimular, para asegurar que los escolares luego transiten con mayor éxito por el primer grado. Facilita el desarrollo de la motricidad fina, orientación espacial, expresión oral e incluye particularmente un área denominada *Nociones Elementales de la Matemática*, la cual tiene como objetivo el trabajo con conjuntos y el reconocimiento de las figuras geométricas.

Teniendo en cuenta la importancia del conocimiento de las figuras geométricas y el papel que juegan los docentes en la enseñanza-aprendizaje de este componente de las matemáticas, se impone la necesidad de que los docentes valoren su papel en el desarrollo de la cultura y la sociedad, así como la importancia de buscar vías cada vez más eficientes para que el escolar se apropie de este contenido, de forma que repercuta positivamente en su vida adulta. Se reconoce, por tanto, que el desarrollo de habilidades en los docentes de la educación especial, en la selección de métodos y delimitación de procedimientos eficaces para la enseñanza de la geometría no ha alcanzado los niveles de actuación pedagógica en correspondencia con la necesidad de estimulación del desarrollo de los escolares con déficit intelectual; es por ello que en la presente investigación se estudie el problema científico asociado a: *¿Cómo trabajar la identificación de figuras geométricas en escolares con déficit intelectual leve, de forma*

que se potencie los procesos psíquicos afectados? De aquí que el objetivo que sigue consiste en establecer una estrategia didáctica para las clases de la asignatura *Nociones Elementales de la Matemática*, del primer grado de escolares con déficit intelectual leve, de forma que potencien la imaginación y la orientación espacial.

DESARROLLO

Lograr que los escolares se apropien de las herramientas necesarias para la identificación de figuras geométricas básicas, implica que los maestros posean sólidos conocimientos psicopedagógicos y didácticos sobre la temática, así como de las características de los educandos. Esto presupone que cada educador responsabilizado con esta noble y paciente tarea, domine conocimientos relacionados con la Pedagogía y la Psicología General, y que sea capaz de aplicarlos de manera concreta pero a la vez creadora a la Psicología Especial y a la Pedagogía Especial.

Es necesario además reflexionar en concepciones desarrolladoras sobre las necesidades educativas especiales (Egea y Luna, 2000; López, 2000; Schalock y Verdugo, 2007). Esta terminología no corresponde solamente a niños que asisten a escuelas especiales, incluye a todos los educandos que por diversas causas no avanzan en el aprendizaje y su desarrollo general, necesitan apoyo para escalar nuevos peldaños en su desarrollo y cumplir los objetivos educativos propuestos, niños que necesitan más ayuda que la mayoría de ellos y orientación especial. En esencia, se comparte lo humano y lo optimista de la definición asumida, ya que no se centra en las dificultades sino en las potencialidades.

Los escolares con necesidades educativas especiales no conforman una categoría homogénea; incluyen variadas manifestaciones de esta, la que aquí se trata es, precisamente, de tipo intelectual y en especial de los denominados "retrasados mentales", término que es conveniente sustituir por otros de sesgos menos peyorativos como "déficit intelectual". Ante el reto de lograr su integración social, la escuela tiene el propósito de prepararlo para la vida sin exclusión alguna, así que la enseñanza de la geometría es necesaria para ellos ya que es necesaria para la vida. El estudio de la geometría no solo incorpora conocimientos aplicables en la experiencia cotidiana, sino que también contribuye al desarrollo del pensamiento humano y en especial a la imaginación espacial y al razonamiento lógico.

1. Una caracterización psicopedagógica del escolar con necesidades educativas especiales por déficit intelectual leve

Existen diversas definiciones afines a las NEE por déficit intelectual. Por ejemplo, en 1971 se introduce en Cuba el concepto de retraso mental de S. Y. Rubinstein quien lo caracteriza como: *"un defecto estable de su actividad cognoscitiva a consecuencia de una lesión orgánica en el cerebro"* (*sic*, 1986, p. 9), el que fue utilizado por más de dos décadas y la mayoría de las formulaciones y definiciones, posteriores, abordadas por especialistas cubanos, se sustentaron en este concepto. La intensa práctica educativa cubana permitió cuestionar esta definición, por su término estable (del lat. *stabĭlis*), adjetivo que significa que se mantiene sin cambiar o desaparecer, demostrando que esta discapacidad evoluciona, que se mueve en correspondencia con la influencia social y pedagógica que recibe el niño desde las edades más tempranas.

Se defiende la idea de que la mejor terminología para expresar la esencia de su contenido es aquella que permite un tratamiento menos agresivo a la persona y a su familia, en la que no se desconozcan tanto las limitaciones como las posibilidades y que responda a las tareas positivas que tiene ante sí la escuela especial, principalmente aquella dirigida a la formación y desarrollo cultural del niño con déficit intelectual, lo que debe ser comprendido por la comunidad pedagógica. En Cuba, diversos autores han sistematizado los enfoques y concepciones acerca del déficit intelectual, bajo la denominación de "retraso mental" (López, 2000; Torres, 2002; de la Peña, 2005, entre otros).

M. Torres ha descrito el retraso mental como: *"…característica especial del desarrollo donde se presenta una insuficiencia general en la formación y desarrollo de las funciones psíquicas superiores, comprometiendo de manera significativa la actividad cognoscitiva y provocado por una afectación importante del sistema nervioso central en los periodos pre, peri y postnatal"* (2002, p. 4). Refiriendo un mismo concepto, en la presente investigación se sustituyen ambas denominaciones por la terminología "déficit intelectual", a tono con las nuevas concepciones, teorías, clasificación internacional de enfermedades, pero más aún por respeto a lo que organizaciones y la propia voz de los afectados demandan.

Esta manera de abordar el déficit intelectual permite asumir un enfoque diferenciado e individualizado, con respecto al mayor o menor grado de afectación cognitiva y funcional así como a la complejidad de las NEE que presenta el sujeto.

Al analizar la causa del déficit intelectual es preciso reconocer la complejidad de este fenómeno y su carácter multifactorial. La lesión del sistema nervioso central no es el único factor responsable de esta alteración y su intensidad varía en cuanto a profundidad, carácter difuso, asociación a otros aspectos del desarrollo integral de las personas, lo que hace que sus implicaciones sean diferentes. También las condiciones del medio social y cultural donde se desarrolla el niño influye en su desarrollo posterior, agravando o no la situación del menor.

No se trata de optar por una posición extrema al considerar sólo los factores sociales o sólo los biológicos, sino de ver su interrelación dialéctica y dinámica. Sobre este particular Arias afirma que: *"el proceso de construcción y transformación de naturaleza histórico-cultural es posible porque existen mecanismos biológicos que lejos de ser, como postulan los deterministas biológicos, fijos e inmutables, son flexibles y variables, en correspondencia con la multiplicidad de condiciones que el ser humano se encuentra en su ambiente cultural y material"* (1999, p. 130).

Una de las peculiaridades que identifican a estos niños es la capacidad que experimentan para aprender en mayor o menor grado, de forma más o menos generalizada. Esto incidirá prácticamente en todas las facetas del desarrollo, entre ellas la independencia, cognición, comunicación y lenguaje, interacción social, relaciones personales, motricidad y aprendizaje (Rubinstein, 1986).

Al inicio de la etapa escolar continúa siendo para ellos muy importante la actividad de juego. Tienen dificultades para atender a clases, cumplir con las tareas escolares. Aunque en este contexto el sistema de comunicación se amplía, aún es insuficiente. Las

relaciones con sus coetáneos son fundamentalmente en la actividad de juego y no en la del estudio propiamente dicho.

La esfera sensoperceptual refleja afectación en el funcionamiento del analizador visual, relacionado con las alteraciones en la percepción, esta tiene lugar mucho más lentamente que el niño normal, perciben con exactitud una menor cantidad de objetos que sus coetáneos (Shif, 1976; Rubinstein, 1986; Guerra *et al.*, 2005). También hay presencia de dificultades para la percepción simultánea de un grupo considerable de objetos (Shift, 1976; Vlasova y Pevzner, 1979). Como consecuencia de las sensopercepciones imprecisas, incompletas y las grandes dificultades en la fijación, conservación y reproducción, las imágenes que reconstruyen caracterizan solo de forma aproximada el objeto real, siendo muy pobres en ofrecer detalles. Este aspecto es esencial en el análisis de los problemas asociados al aprendizaje de la geometría.

En la memoria se precisa el fácil olvido y la inexactitud en las reproducciones, lo cual está condicionado por el hecho de que estos alumnos perciben el material sin tratar de fijarlo (Rubinstein, 1986, Guerra *et al.*, 2005). En ocasiones muestran imposibilidad de recordar cualquier información, nombres, incluso palabras aisladas en el momento necesario, mientras que después aparecen como si surgieran en la conciencia sin repeticiones complementarias, esto está dado por una inhibición interna de las actividades corticales (García y Arias, 2006). También este aspecto debe tomarse en cuenta en el aprendizaje de la geometría, en el sentido de que la rememoración de conceptos y propiedades enfrenta un serio obstáculo.

En relación con los procesos mnémicos el psicólogo ruso L. S. Vigotsky (1993, p. 261) expresó que *"…en este tipo de niños predomina la memoria mecánica, primitiva, sobre la memoria mediada... aunque, esencialmente, la capacidad de memorizar no ofrece diferencias con las de los niños normales... la función de la memorización activa, es en general, inferior sí se compara con la de los niños normales"*. La memoria involuntaria, en esta etapa, desempeña un importante papel en el proceso de asimilación de conocimientos. Aunque posteriormente logran la retención en la memoria voluntaria, producto de que tienen un mejor autocontrol, aún la memoria involuntaria continúa desempeñando importantes funciones en el proceso de enseñanza aprendizaje.

Generalmente retienen en la memoria mejor los conocimientos verbales que se acompañan de datos visuales. Es importante aprovechar las posibilidades de la memorización involuntaria, pero con apoyo en los medios de la comprensión lógica del material de estudio. Respecto al pensamiento, sus operaciones mentales se desarrollan lentamente. El análisis del material didáctico se realiza fundamentalmente en el plano del pensamiento en acción, los niños se apoyan en los objetos reales o en sus representaciones directas (Vigotsky, 1999). En esta etapa el pensamiento representativo se desarrolla y comienzan a aparecer razonamientos verbales, las conclusiones no se apoyan en argumentos lógicos sino en lo que perciben, existe lentitud en el pensamiento y dificultades en todos sus procesos, especialmente de las generalizaciones (García y Arias, 2006). Las generalizaciones están influidas fundamentalmente por el uso práctico de los objetos. Estos aspectos son importantes pues el razonamiento geométrico requiere del pensamiento representativo y de argumentos lógicos.

Con relación a la atención, predomina la atención involuntaria, pero gradualmente van aprendiendo a dirigir y mantener de forma más o menos estable la atención en lo

necesario y no solo en lo atrayente. No obstante, en esta etapa aún se mantienen las dificultades para distribuir la atención (Shift, 1976; Rubinstein, 1986). Con relación al lenguaje, en esta etapa el escolar con NEE por déficit intelectual leve enriquece su vocabulario y se perfecciona el sistema gramatical (García y Arias, 2006). Para el caso del aprendizaje de la geometría esto también es importante, por cuanto se limita seriamente la argumentación, así como los procesos de control metacognitivo que permiten rectificar los errores.

La afectación en la esfera intelectual provoca inestabilidad en el desarrollo de la esfera emotivo-volitiva, o sea, es una afectación secundaria y en general condicionada por la mediación social y expresa el carácter inmaduro de la personalidad. En ellos no se produce jerarquía motivacional, pues sencillamente cumple con los objetivos que le propone el adulto a corto plazo (Guerra *et al.*, 2005). Los motivos cognoscitivos están limitados y no están bien concientizados. Por ejemplo sabe que debe estudiar para aprobar, sin embargo no hace la tarea o no atiende a la maestra. Sus intereses son inconstantes, son más dependientes de la motivación extrínseca que de la intrínseca y resultan frecuentes las dificultades en el desarrollo de la autovaloración (Guirado, 2004).

En el orden pedagógico, el proceso de enseñanza-aprendizaje en los escolares con diagnóstico de déficit intelectual leve, ocurre bajo las mismas leyes y principios que se ponen de manifiesto con otros educandos, aunque adquiera determinadas peculiaridades, lo que se expresa en la selección y dosificación del contenido de la enseñanza, la selección de métodos que coadyuven al desarrollo del escolar, la variedad de actividades, la especificidad de determinados medios de enseñanza y las adaptaciones curriculares más o menos significativas, incorporando en todo momento la dimensión correctivo-compensatoria y desarrolladora, que es esencial para evaluar la calidad del aprendizaje de estos niños y adolescentes, constituyendo condición y resultado de la labor en la educación especial (Guerra *et al.*, 2005; de la Peña, 2005).

En este sentido, es necesario resaltar que en este escolar existen también puntos fuertes o potencialidades y no todas las áreas en ellos se encuentran afectadas en igual medida, aspecto que resulta de gran utilidad en el proceso de enseñanza-aprendizaje, pues estos niños, adolescentes y jóvenes muchas veces son tan capaces como algunos de sus coetáneos y en algunas esferas son tan o más capaces que sus coetáneos. Muchas experiencias pedagógicas han demostrado que pueden transformarse extraordinariamente, tanto en su desarrollo cognitivo como en lo afectivo y personal, en general a lo largo de sus años de estudio en la escuela especial.

La escuela histórico-cultural aporta elementos importantes para comprender el fin y objetivo de la enseñanza desarrolladora de los alumnos con déficit intelectual. Sobre la base de sus investigaciones, Vigotsky (1995) plantea la necesidad de hallar lo sano, lo intacto, lo que se había conservado, estableciendo una relación entre el defecto primario y los secundarios, referida en su teoría de la estructura del déficit, partiendo del criterio de que algunas deficiencias en el niño con déficit intelectual tienen carácter primario, y otras secundario; así reafirma que las deficiencias primarias tienen un carácter biológico pues están condicionadas por trastornos orgánicos y que las deficiencias secundarias son condicionadas por factores sociales y más fáciles de corregir a través de la intervención educativa.

Estos menores no conforman un único grupo. En efecto, tomando en cuenta el criterio clasificatorio referido al grado de profundidad del déficit intelectual y la adaptación social se observan por lo general tres subgrupos según el déficit intelectual sea leve, moderado y severo. En el presente trabajo se hará referencia a los menores con déficit intelectual de grado leve, que manifiestan dentro de esta categoría las posibilidades más amplias de desarrollo y conforman la mayor matrícula de la escuela específica a que asisten. La concepción del déficit intelectual que se asume, así como las características psicopedagógicas que se presentaron de forma sintética, permiten argumentar la necesidad de un sistema de influencias educativas coherente como elemento que estimule la formación y desarrollo de la personalidad del educando con este tipo de necesidad educativa especial, como una vía de desarrollo cultural.

Las razones expresadas hasta el momento hacen que en el plano educacional se traten de solventar, disminuir en lo posible, las peculiaridades del desarrollo de estos escolares, además se realicen investigaciones dirigidas a estimular todas las áreas de su mundo afectivo y cognoscitivo. Una de estas líneas la constituye el desarrollo de la imaginación y creatividad, que si es importante para cualquier sujeto, para él lo es doblemente, ya que adquiere un carácter correctivo compensatorio, para lograr el objetivo de incorporarlo a la vida sociolaboral lo mejor preparado posible.

2. Alternativa didáctica para el estudio de figuras geométricas en escolares del primer grado de la escuela especial, con necesidades educativas especiales por déficit intelectual leve

Las peculiaridades de la imaginación y la creatividad en los escolares con déficit intelectual leve pueden verse en su relación dialéctica con los procesos anteriores, pues se forma en las condiciones de un conocimiento sensorial diferente, insuficiente desarrollo del lenguaje, actividad práctica limitada, lo que explica que su razonamiento sea predominantemente concreto y su generalización débil. Los argumentos expuestos deben ser tomados en cuenta en toda intervención pedagógica en menores que presenten NEE por déficit intelectual, en función de que debe establecerse estrategias didácticas diferentes y variadas para lograr que se apropien de elementos relacionados con la diferenciación de las figuras geométricas, de forma que se propicie además el desarrollo de la imaginación, creatividad así como la orientación espacial.

La enseñanza de la geometría brinda una utilidad directa para el desarrollo de la orientación espacial, ya que la relación y conocimiento de las figuras geométricas presuponen una representación espacial de las mismas y su asimilación obliga a los alumnos a realizar una actividad mental rigurosa, de esta forma se compensan en el escolar con déficit intelectual leve, algunas esferas psíquicas afectadas. Las razones tratadas hasta este momento fundamentan la propuesta de alternativas para lograr estimular el desarrollo de la imaginación, creatividad y la orientación espacial de escolares con NEE por déficit intelectual leve. Las posibilidades que a continuación se proponen pueden ser empleadas en su totalidad o solo algunas de sus partes, ya que esto dependerá de las características del grupo y de cada uno de los escolares que lo conforma.

En primer lugar, se considera necesario precisar que se ha decidido llamarlas alternativas didácticas ya que las ideas se ofrecen a partir del estudio realizado, es decir, opciones fundamentadas entre varias que pueden existir, su concepción es flexible y

pueden ser utilizadas por el maestro en el proceso pedagógico, en función de las particularidades de los escolares, en ella se evidencian las relaciones entre los componentes del proceso docente-educativo.

La propuesta que se ofrece se sustenta en los principios de la Pedagogía Especial que norma el trabajo con todos los niños con NEE. Estos principios constituyen elementos rectores para todo el que se dedique a buscar vías de influencia sobre cualquier categoría relacionada con algún tipo de necesidad educativa especial.

Esta propuesta incluye tres fases:

- El diagnóstico real de los alumnos sobre la base de sus potencialidades.
- La aplicación de la alternativa de actividades.
- El control de la tarea por parte del maestro.

Para la primera fase es necesaria la observación directa de los estudiantes, con el objetivo de determinar los procesos psíquicos más afectados en los alumnos y la influencia que puede ejercer la alternativa de actividades que se proponen. Esta fase comprende la determinación del estado actual de las insuficiencias y/o potencialidades del escolar con NEE por déficit intelectual leve en relación a los siguientes aspectos que sirven de indicadores para evaluar el desarrollo:

- Cantidad de figuras geométricas que reconoce y nombra.
- Reconocimiento de las figuras geométricas con dos niveles de desarrollo: de forma aislada y cuando forman parte de una representación dada.
- Posibilidad de formar conjuntos con figuras.
- Grado de participación de cada estudiante y su interacción con los demás.

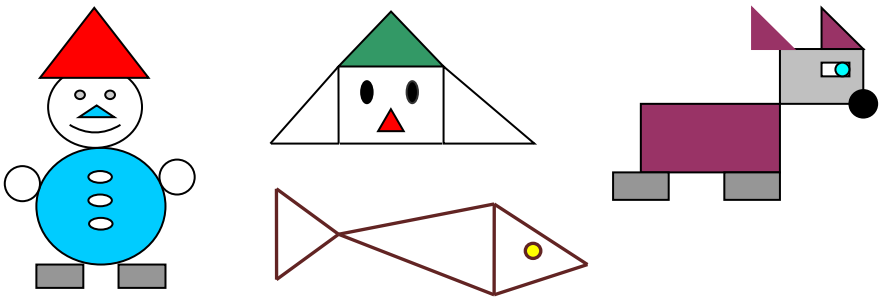
Se debe precisar la posible existencia de alteraciones motrices asociadas o no la NEE. Estas pueden entorpecer tanto la motricidad fina (imprescindible para la modelación de figuras) como la motricidad articulatoria (la que permite expresar adecuadamente los fonemas que comprenden las palabras y que son esenciales para argumentación).

En la segunda fase, donde el escolar con la ayuda del maestro realiza las diferentes actividades, se propicia la estimulación de la zona de desarrollo próximo, ampliando las posibilidades de análisis y razonamiento. En esta se emplean actividades relacionadas con los juegos y otros elementos motivadores, de forma que estimulen al escolar. Durante la aplicación de la alternativa, cuando los alumnos ya conocen las acciones o pasos que deben seguir, el maestro los ayudará a realizar la tarea, a encontrar y corregir sus errores y los de sus condiscípulos.

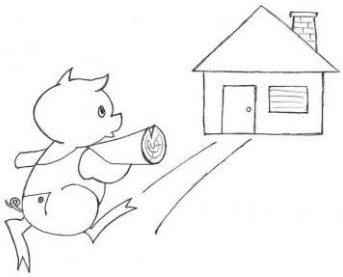
A continuación se describen brevemente tres actividades que puede implementar el maestro, como parte de la fase intermedia. En todos los casos se trata de posibilidades de desarrollo de las nociones básicas geométricas a través del juego:

- Modelar con barro o plastilina las figuras geométricas básicas objeto de estudio en el primer grado de la enseñanza del escolar con déficit intelectual leve (triángulo, círculo, rectángulo, cuadrado y óvalo).

- Desarrollar el juego “Yo veo”. Los alumnos deben encontrar visualmente las figuras geométricas que forman parte del entorno escolar, o que estén presentes en los objetos del aula. Por ejemplo, mural (cuadrado), pizarrón (rectángulo), etcétera.
- Desarrollar el juego “A jugar con las figuras geométricas”, que consiste en rellenar con colores figuras geométricas, previamente recortadas en cartulina blanca. Luego pueden crear figuras de animales, objetos, personas. Siempre tratando que desarrollen su imaginación y hagan sus propias creaciones, a partir de la ubicación espacial de las figuras geométricas. Una vez que concluyan sus creaciones, deben nombrar las figuras geométricas que utilizaron, así como los colores que utilizaron. Se pueden presentar algunas representaciones que sirvan como patrón y que estimulen su imaginación. En este juego son posibles representaciones similares a las siguientes, donde aparecen círculos, cuadrados, triángulos y óvalos:



También es posible el desarrollo de actividades que resultan atractivas y entretenidas para estos escolares. Por ejemplo, la dramatización o narración del cuento *“Los tres cerditos”*, el cual puede llevarse a cabo por los propios alumnos, donde empleen elementos de expresión corporal, así como la música. Se tendrá en cuenta las inclinaciones de los alumnos por algunas de estas manifestaciones artísticas. Una vez concluida la narración se realizan preguntas que conduzcan a tomar decisiones sobre las acciones más correctas y porqué. Por ejemplo: ¿Todos los cerditos eran trabajadores? ¿Qué importancia tendrá ser laboriosos? Junto a estas tareas de carácter educativo es oportuno continuar con la siguiente de naturaleza instructiva y que contiene un aspecto lúdico asociado a nociones elementales de geometría. En efecto, se puede presentar una lámina contentiva del dibujo que sigue:



Las preguntas desarrolladores pueden continuar sucesivamente en forma interactiva. Por ejemplo: En el siguiente dibujo encuentra un triángulo y coloréalo de rojo (…) y ahora un rectángulo y coloréalo de azul (…) ¿Hay otro rectángulo? (…) Coloréalo del mismo color. ¿Qué otra figuras geométricas encuentras? (…) Coloréalas del color que desees.

Finalmente, para la tercera fase el maestro controlará la ejecución de los escolares de forma independiente, lo cual no niega que algunos niños necesiten repetición de lo que deben hacer; esto depende de las características individuales de ellos. En todo caso, es importante tener presente la aplicación de diferentes niveles de ayuda. La tercera fase realmente se lleva a cabo durante todo el proceso de enseñanza-aprendizaje, lo que permite el diagnóstico y la retroalimentación constantes, de forma que se puedan establecer los ajustes curriculares pertinentes. Ya que el control es parte del proceso de evaluación, es una oportunidad para estimular el desarrollo del aprendizaje relacionado con las figuras geométricas. Para potenciar el desarrollo, el control requiere sistematicidad durante todos los momentos de la etapa de aprestamiento.

Los resultados de esta experiencia son aplicados en la escuela especial "Jorge Ricardo Maseti" de la Ciudad de Holguín. Se seleccionan las sesiones de *Nociones Elementales de la Matemática*, en la etapa de aprestamiento del primer grado de escolares con necesidades educativas especiales por déficit intelectual leve, los cuales han sido diagnosticados por el Centro de Diagnóstico y Orientación. En total, se trata de seis niños y cinco niñas, que son atendidos por una maestra y una auxiliar pedagógica.

En una primera etapa se socializa esta propuesta ante el colectivo de maestros del primer ciclo (de primer a tercer grado), con la anuencia del Consejo de Dirección. Después de una discusión sobre las posibilidades de implementación, se decide introducir estos resultados en la docencia. La aplicación de la alternativa didáctica se desarrolló durante el mes de aprestamiento. En general, desde el punto de vista cualitativo, la maestra encargada concluyó que las ideas desarrolladas son innovadoras y sirven para perfeccionar su trabajo, gracias a una mayor motivación y el logro de una mayor concentración, lo cual es muy importante para la atención a las necesidades educativas especiales de estos escolares.

La maestra también sugiere que estas actividades pueden ser adaptadas en dependencia de las particularidades de los alumnos, así como de las adecuaciones curriculares que se realicen en relación con la necesidad educativa de cada escolar y del grado en que se desarrolle. Ella también expresa que, de forma particular, se logra una salida coherente de los contenidos matemáticos a las asignaturas de educación artística y otras manifestaciones del arte, pues se propicia la educación del gusto estético, a la vez que los alumnos se apropian de los contenidos matemáticos y desarrollan sus procesos cognoscitivos.

CONCLUSIONES

- El trabajo con las figuras geométricas constituye una fuente de primordial interés para la educación especial en función de la experimentación de metodologías, estrategias, alternativas que propicien el desarrollo de rasgos de la personalidad, cualidades del pensamiento u otros aspectos en el escolar con déficit intelectual leve.
- La aplicación de un conjunto de juegos y actividades variadas en las clases de *Nociones Elementales de la Matemática*, de la etapa de aprestamiento del primer grado para escolares con déficit intelectual leve, es una alternativa eficaz en el logro de la motivación de los estudiantes y del desarrollo de su pensamiento.
- Mediante la aplicación de la alternativa de actividades propuestas se logra estimular la imaginación, creatividad y la orientación espacial en un grupo de niños y niñas de una escuela especial. Los alumnos son capaces de reconocer las figuras geométricas, así como de identificarlas en el entorno cotidiano.

BIBLIOGRAFÍA

- Arias, G. B. (1999). *Educación, desarrollo, evaluación y diagnóstico desde el enfoque histórico cultural*. La Habana: Material impreso de la Universidad de la Habana.
- Egea, C. y Luna, J. (2000). *El nuevo paradigma del retraso mental: Afinidades y diferencias con visiones anteriores.* DISWEB. Recuperado de http://usuarios.discapnet.es/disweb2000/art/paradigm.htm, el 13 de julio de 2012.
- García, M. T. y Arias, G. (2006). *Psicología especial* (tomo II). La Habana: Editorial Félix Varela.
- Guerra, S. *et al*. (2005). *Selección de lecturas sobre retraso mental*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.
- Guirado, V. del C. (2004). *Modelo secuencial del proceso de enseñanza-aprendizaje de la solución de problemas matemáticos en los escolares con retardo mental*. Tesis doctoral no publicada. Santa Clara: Universidad de Ciencias Pedagógicas "Félix Varela".
- López, R. (2000). *Educación de los niños con necesidades educativas especiales*. *Fundamentos y actualidad*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.
- Maza, R. (2005). *Estimulación del desarrollo del pensamiento de niños retrasados mentales*. Curso preevento de Pedagogía' 2005. La Habana: Instituto Pedagógico Latinoamericano y Caribeño.
- Peña, N. E. de la (2005). *La preparación para la vida cotidiana en alumnos con retraso mental*. Tesis doctoral. La Habana: Instituto Central de Ciencias Pedagógicas.

- Rubinstein, S. Y. (1986). *Psicología del escolar retrasado mental* (material mimeografiado). La Habana: Dirección de Formación y Perfeccionamiento del Personal Pedagógico.
- Schalock, R. L. y Verdugo, M. A. (2007). El concepto de calidad de vida en los servicios y apoyos para personas con discapacidad intelectual. *Siglo Cero*, Vol. 38, No. 4, pp. 21-36.
- Torres, M. (2002). *Definiciones conceptuales en la educación especial*. La Habana: Centro Latinoamericano de Educación Especial (CELAEE).
- Shif, Zh. I. (1976). *Particularidades del desarrollo intelectual de los alumnos de la escuela auxiliar*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.
- Vigotsky, L. S. (1993). Historia del desarrollo de las funciones psíquicas superiores. En A. V. Zaporózhets et al. (Eds.): *Lev Semiónovich Vygotski. Obras Escogidas* (tomo III). Academia de Ciencias Pedagógicas de la URSS.
- Vigotsky, L. S. (1995). Fundamentos de defectología. En: Zaporozhet, A. V. *et al*. (Eds.). *Obras completas* (tomo V). La Habana: Editorial Pueblo y Educación.
- Vigotsky, L. S. (1999). *Imaginación y creación en la edad infantil*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.
- Vlasova, T. A. y Pevzner, M. S. (1979). *Para el maestro sobre los niños con desviaciones en el desarrollo*. La Habana: Editorial de Libros para la Educación.