

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE FACULTAD DE INGENIERÍA

INSTITUTO DE MATEMATICA

CIENCIAS BASICAS EN INGENIERIA

REVISTA DIGITAL SEMESTRAL

 $N^{o} 6 - A\tilde{N}O 3$

DICIEMBRE DE 2011

ISSN N° 1853-1385

CIENCIAS BASICAS EN INGENIERIA

Revista Digital del Instituto de Matemática

Publicación Semestral

Director:

Prof. Antonio B. MAHAVE

Consejo Editor:

Dr. Ing. Jorge V. PILAR
Ing. Gustavo DEVINCENZI
Dr. Rubén CERUTTI
Dr. Juan NAPOLES VALDES
Prof. Cdora. Carmen RESCALA
Ing. Emilio GARCIA SOLÁ
Dr. Ing. Mario E. De BÓRTOLI

Instituto de Matemática – Facultad de Ingeniería – U.N.N.E. Las Heras 727 – Resistencia, Chaco (3500) – Republica Argentina Director: Antonio Mahave – Facultad de Ingeniería – Las Heras 727 Tel. 03722 – 425064; 420076 e-mail: mahave@ing.unne.edu.ar

INDICE

AUTORIDADES

NORMAS PARA LA PRESENTACIÓN DE ARTÍCULOS EN LA REVISTA

COMITÉ DE REFERATO

MANIPULADOR DE DOS ARTICULACIONES, DESDE EL BOSQUEJO HASTA SU CONSTRUCCION-MODELO MATEMATICO Eduardo A. CIRERA, Gerardo A. BRAVO

UN MODELO MATEMÁTICO COMO HERRAMIENTA DE BENCHMARKING EN EL TARGET DE LA CONSTRUCCIÓN Carmen RESCALA, Gustavo DEVINCENZI, Gricela ROHDE, Ma. Liliana BONAFFINI, Gustavo BERNAOLA, Marta GIRAUDO, Hilda MARTÍNEZ

FRACTALES EN ARQUITECTURA Rufino ITURRIAGA, Carina JOVANOVICH

SOBRE EL LÍMITE DE UNA FUNCION Rubén A. CERUTTI, Luis G. ROMERO, Luis F. VILLALBA CANTEROS, Luciano L. LUQUE, Gustavo A. BORREGO

CONSTRUCCION DE VIVIENDAS EN TERRENOS DE RELLENOS CON EL METODO DE PILOTES PERFORADOS Alfredo O. LÓPEZ, Natalia Noemí E. ROMERO

EL VIENTO A TRAVES DE LA MITOLOGIA Y LA REALIDAD COTIDIANA Mario B. NATALINI

CIENCIAS BASICAS EN INGENIERIA

REVISTA DIGITAL DEL INSTITUTO DE MATEMATICA

AUTORIDADES: UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE

Rector:

Ing. EDUARDO DEL VALLE

Vicerrectora:

Prof. MARIA D. VEIRAVE

FACULTAD DE INGENIERIA

Decano:

Dr. Ing. JORGE V. PILAR

Vicedecano:

Ing. JOSÉ L. BASTERRA

Secretario Académico:

Ing. ARTURO A. BORFITZ

Sec. De Asuntos Estudiantiles:

Ing. GUSTAVO O. FISCHER

Sec. Administrativo:

Cdor. DANIEL ASULAY

Sec. De Extensión Universitaria

Ing. JOSÉ ORTIZ

INSTITUTO DE MATEMATICA

Director:

Prof. ANTONIO B. MAHAVE

- RESOLUCION Nº **070/09**RESISTENCIA, 21 ABRIL 2009

VISTO:

El Expte. Nº 27-2008-04196, por el que el Director del Instituto de Matemática solicita la aprobación de las "Normas para las publicaciones en la Revista del Instituto" y acuerdo para la designación de la Comisión de Referato y;

CONSIDERANDO

Que los proyectos elevados por el Director del Instituto, con las modificaciones que oportunamente sugiriera la Comisión de Posgrado de esta Facultad con total acuerdo del primero, se ajustan a las necesidades de organización de las publicaciones periódicas a las que se hace referencia;

Que los antecedentes académicos y científicos de los integrantes propuestos de la Comisión de Referato avalan suficientemente la propuesta;

El Dictamen favorable de la Comisión de Enseñanza e Investigación; Lo aprobado en Sesión Ordinaria del día de la fecha;

POR ELLO:

EL CONSEJO DIRECTIVO DE LA FACULTAD DE INGENIERIA R E S U E L V E :

Artículo 1º.- APROBAR las "Normas para la presentación de artículos" para las publicaciones periódicas, Revista del Instituto de Matemática, ISSN 1850-9827 y "Ciencias Básicas en Ingeniería", Revista Digital, actualmente en preparación, que figura en el Anexo I de la presente Resolución.

Artículo 2º.- PRESTAR acuerdo a la designación de los miembros del Comité de Referato, para las publicaciones referidas en el articulo anterior, que figuran como Anexo II de la presente Resolución.

Artículo 3°.- REGÍSTRESE, comuníquese al Instituto de Matemática y cumplido, archívese.-

hjm.-

\\\...2.-

ANEXO I

NORMAS PARA LA PRESENTACION DE ARTÍCULOS

1) Los artículos se remitirán por correo electrónico al Director de la Revista ó en su defecto por correo postal una copia y CD, a la siguiente dirección:

Revista del Instituto de Matemática – Facultad de Ingeniería – Universidad Nacional del Nordeste.

Las Heras 727 – Resistencia – Chaco C.P. 3500

La presentación de los trabajos deberá contar con:

a) Identificación del(los) autor(es): Nombre completo, Institución a la que pertenece, localidad, dirección de contacto (incluyendo la electrónica)

Pequeño texto de presentación de los autores (cargos actuales, línea de trabajo, contribuciones al campo de estudio, etc.) (Extensión no mayor a media pagina).

- b) Título del artículo; en idioma español.
- c) Resumen: Texto breve (de hasta 100 palabras) de descripción de objetivos, métodos y principales resultados y conclusiones. Ha de presentarse en idioma español, pudiendo opcionalmente hacerlo además en los idiomas ingles o portugués.
- d) Palabras claves: hasta cinco.
- e) Referencias: Se ajustarán a la normativa APA (Manual de publicación, 5º ed, 2001). (http://apastyle.apa.org/)
- f) Tablas, imágenes e ilustraciones: Se incluirán en su lugar correspondiente en un formato compatible con su edición en Internet, identificándolas.
- 2) Los trabajos enviados deberán ser inéditos o con escasa difusión, (informando en este caso que otros mecanismos de divulgación han sido o están siendo utilizados).
- 3) La recepción de un trabajo no implicará compromiso de esta revista para su publicación.
- 4) El Comité Editorial procederá a la selección de los trabajos de acuerdo con criterios formales y de contenidos.
- 5) El envío de un artículo para su publicación, implica la autorización por parte del autor, de la reproducción del mismo por cualquier medio, en cualquier soporte y en el momento en que el Instituto lo considere conveniente, salvo expresa notificación en contrario del autor. En todos los casos la publicación mencionará a su autor(es), y el trabajo no será modificado una vez aprobado.
- 6) Los trabajos se aceptarán en formato WORD 97-2003, WORD 2007
- 7) Los artículos tendrán una extensión de hasta diez (10) páginas, incluidos las tablas, las figuras y los anexos. Como excepción la Revista podrá publicar algún trabajo de mayor extensión. Los trabajos deberán estar escrito con formato en fuente Times New

Roman, tamaño 12 puntos para el cuerpo y 14 en mayúscula negrita para los títulos, interlineado simple, alineación justificado y en hoja tamaño DIN A4. Los márgenes inferior, superior, izquierdo y derecho serán de 3 cm. Todas las páginas deberán estar numeradas en el ángulo inferior derecho. No deberá contener encabezados ni pies de páginas.

- 8) Deberá indicarse el tratamiento de texto utilizado y si incluye símbolos, tablas o gráficos, se especificará el programa de diseño empleado.
- 9) Los artículos enviados para ser publicados serán evaluados en una primera instancia por el Director con los miembros del Comité Editorial, el que podrá rechazarlo; en caso de aceptación previa, enviará el artículo a evaluación externa (Miembros del Comité de Referato). A partir de los informes obtenidos decidirá sobre la publicación del trabajo, la información al autor de las observaciones planteadas por los revisores a los efectos de que considere posibles modificaciones; o su no publicación. En cualquier caso, se informará lo antes posible a los autores, particularmente en el caso de rechazo (y eventualmente, acompañando sugerencias para su posible publicación).

COMITÉ DE REFERATO

Publicaciones periódicas permanentes

Dr. Iran Abreu Mendes

Universidade Federal do Rio Grande do Norte y Universidade Federal do Pará, Brasil.

Dr. Rubén Cerutti

Facultad de Ciencias Exactas Naturales y Agrimensura. UNNE

Dr. Ing. Mario De Bortoli.

Facultad de Ingeniería. UNNE.

Ing. Emilio García Solá

Facultad de Ingeniería. UNNE

Lic. Liliana Koegel

Facultad de Ciencias Económicas. Universidad Nacional de Rosario.

Dra. Luisa Lazzari

Facultad de Ciencias Económicas. Universidad de Bs. As.

Lic. Mgter. Blanca Lezana

Universidad Nacional de Tucumán

Ing. Victor Martinez Luaces

Universidad de la Republica del Uruguay

Dr. Juan Eduardo Nápoles Valdes

Universidad Nacional del Nordeste y Universidad Tecnológica Nacional.

Dr. Ing. Mario Bruno Natalini.

Facultad de Ingeniería. UNNE

Dra. Claudia Lisete Oliveira Groenwald

Universidade Luterana do Brasil, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Campus Canoas.

Dr. Ing. Jorge Víctor Pilar

Facultad de Ingeniería. UNNE

Dr. Ing. Adrian R. Wittwer

Facultad de Ingeniería. UNNE

Ing. Gustavo H. Devincenzi

Facultad de Ingeniería. UNNE

Prof. Mgter Viviana Yaccuzzi Polisena

MANIPULADOR DE 2 ARTICULACIONES, DESDE EL BOSQUEJO HASTA SU CONSTRUCCIÓN. 1.- MODELO MATEMÁTICO

Eduardo A. CIRERA*; Gerardo A. BRAVO+ GETeC – Grupo de Estudio de Tecnologías de Control Facultad de Ingeniería, UNNE * ecirera@ing.unne.edu.ar + gbravo@ing.unne.edu.ar

Docentes de la carrera de Ingeniería Electromecánica, integrantes del Departamento de Electricidad y Electrónica de la FI-UNNE.

RESUMEN.

En distintas entregas de este trabajo se describirán los pasos seguidos para la construcción y puesta en marcha del manipulador de 2 articulaciones conducido por red tendonal, "MANIJA I", desde el primer bosquejo, pasando por la obtención del modelo matemático, diseño mecánico y electrónico, cálculos de velocidades de trabajo, etc., hasta su montaje final y puesta en marcha. En esta primera entrega, y para mayor claridad, se presenta detalladamente el desarrollo del modelo matemático, lo que no se encuentra en ninguna bibliografía del tema.

El prototipo construido obtuvo el 2º puesto en el Concurso de Proyectos Estudiantiles de AADECA (Asociación Argentina de Control Automático) en el año 2006. Algunos resultados parciales han sido publicados como artículos de divulgación.

Palabras clave: Manipulador flexible – Modelo matemático

1.- Introducción.

Como parte de un trabajo de investigación desarrollado en el GETeC, relacionado con aislamiento activo de vibraciones en estructuras flexibles, en el año 2003 se comenzó a trabajar en el diseño de un manipulador conducido por red tendonal, el que en su comportamiento dinámico es asimilable a una "estructura flexible". El uso de este tipo mecanismos se justifica por la enorme ventaja que significa la posibilidad de liberar al manipulador del peso extra que significan los motores y reductores en las articulaciones, y es por ello que son muy utilizados en pequeños robots o partes de ellos (dedos, manos) ya que reducen significativamente el peso de los eslabones. Si a esto se le agrega además el diseño de eslabones cada vez más delgados y livianos, y altas velocidades de trabajo, aparecerán como consecuencia efectos indeseables como vibraciones mecánicas, por lo que para diseñar el control de estos manipuladores es necesario tener en cuenta, entre otros aspectos, la elasticidad de los cables (tendones), las vibraciones estructurales (propias de estos dispositivos), etc.

El desarrollo de las estructuras flexibles tuvo un gran impulso debido, en gran medida, a las aplicaciones aeroespaciales y robóticas, como así también a los nuevos conceptos de diseño utilizados en el campo de la ingeniería civil.

Uno de los objetivos que se trazaron para el Proyecto, era la construcción de una estructura flexible para estudiar los efectos de las vibraciones. Esa estructura flexible sería el manipulador.

Para tratar de comprender si una estructura cualquiera podría ser considerada como una estructura flexible, es preciso acordar una serie de características y condiciones de operación, de uso común y aceptadas por numerosos autores, que nos permita un primer acercamiento para llegar a una definición.

Con estas ideas en mente, se puede afirmar que las estructuras flexibles son aquellas entre cuyas principales características se pueden mencionar:

- •Su comportamiento dinámico está íntimamente relacionado con la presencia de vibraciones, estructurales o de perturbación, que afectan en un alto grado su desempeño.
- •Poseen muy bajo amortiguamiento, y ello se observa en que los polos tienen muy pequeña, o casi nula, componente real.
- •Se consideran como sistemas distribuidos, con infinitos grados de libertad y con infinitas frecuencias de resonancia (Presentan idealmente infinitos picos de resonancia)
- Muchos de sus parámetros (como los factores de amortiguamiento, momentos de inercia, etc.) son desconocidos.
- •Sus picos de resonancia, amplifican las perturbaciones cuyas frecuencias están cercanas a las frecuencias naturales del sistema.
- •Presentan modos de vibración independientes.
- •Para obtener un modelo, como sistemas finito-dimensionales, el modelo en diferencias parciales es reemplazado por un conjunto finito de ecuaciones diferenciales ordinarias, dejando de lado generalmente, las dinámicas de altas frecuencias.

Dentro de esta primera definición de estructuras flexibles, se incluyen muchas que escapan a los objetivos del presente trabajo, tales como los perfiles alares (alas flexibles) y otras estructuras utilizadas en el campo Aeroespacial, como el sistema SSRMS (Space Station Remote Manipulator System), o en los sistemas de grandes antenas parabólicas y de comunicación. En la industria también se pueden observar estas estructuras, por ejemplo, en los manipuladores de grandes dimensiones, ya que la creciente demanda de mayores velocidades y bajo consumo de energía, son las principales motivaciones para el uso de estructuras muy livianas. Este alivianamiento de las estructuras, junto con naturaleza altamente flexible de los manipuladores, a menudo generan un desafío importante a la hora de controlar sus movimientos (trayectorias o punto final). La flexibilidad de la estructura causa vibraciones por la forma delgada de los eslabones y su baja rigidez. Otras estructuras complejas, que poseen accesorios flexibles, presentan el problema del acoplamiento de vibraciones de estos accesorios y los movimientos de los cuerpos rígidos, y son el principal problema que afecta la estabilidad y precisión en el control del sistema.

2.- PRIMER DISEÑO DEL MANIPULADOR.

De acuerdo a los requerimientos que debía cumplir el manipulador, los que fueron expresados en la introducción de este trabajo, el primer diseño surgió del esquema que se muestra en la Fig. 1.

En la misma se puede observar la conducción del manipulador a través de "tendones" (representados por cables con elasticidad K_i) que a su vez son comandados por motores ubicados fuera del área de trabajo. Estas dos características (elasticidad de los cables y peso de motores en la base) le dan al manipulador su comportamiento característico de "estructura flexible".

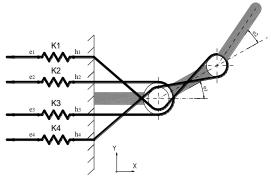


Figura 1 – Primer esquema del manipulador.

3.- PLANTEAMIENTO DEL MODELO.

El objetivo de trabajar con el modelo matemático es encontrar ecuaciones que vinculen las variables de posición y esfuerzos mecánicos en las articulaciones en función del tiempo, para así poder predecir los esfuerzos a controlar y, de esta manera, poder dimensionar los elementos de control y accionamiento del brazo tratando de que el modelo se ajuste lo mejor posible a la realidad evitando así seleccionar elementos que pudiesen resultar inadecuados en una construcción posterior.

- 3.1.- Hipótesis simplificativas: Para obtener el modelo matemático es necesario realizar ciertas simplificaciones, las que facilitan la obtención de las ecuaciones y no agregan grandes errores. Las hipótesis simplificativas utilizadas son:
- -Las masas de cada eslabón se encuentran concentradas en los extremos. En algunos libros se trabaja con la masas concentradas en el centro de masa de cada eslabón, no obstante, cualquiera de estas dos hipótesis inducen a un error, que si bien puede llegar a tener algún efecto no contemplado en el comportamiento del modelo real, es tolerable por la mayor dificultad matemática a la que se enfrenta al tratar los parámetros como distribuidos. De todas maneras lo que se realiza es introducir en el modelo final factores de corrección para contemplarlo.
- -Movimiento plano. No se consideran, en esta primera parte, los movimientos espaciales del manipulador.
- -Estructura rígida. No se consideran deformaciones de los eslabones, ya que escapa al objetivo de este trabajo.
- -Movimiento sin fricción. No se considera fricción en las articulaciones ni en los mecanismos de accionamiento.

Las ecuaciones dinámicas de un robot se pueden obtener partiendo de las ecuaciones del movimiento de Newton, sin embargo, cuando se aumenta el numero de articulaciones aumentan notablemente las complicaciones. El método de Lagrange es, en estos casos más adecuado, y lo constituyen las Ecuaciones de Movimiento de Lagrange.

3.2.- *Cinemática Directa*: La cinemática directa del brazo consiste en encontrar la relación del extremo del brazo con las coordenadas articulares de este. Esto se obtiene analizando geométricamente lo indicado en la *Figura 2*.

Posición del extremo:

$$x = L_2 \cos(\phi_1 + \phi_2) + L_1 \cos(\phi_1) \tag{1}$$

$$y = L_2 \sin(\phi_1 + \phi_2) + L_1 \sin(\phi_1)$$
 (2)

Posición del punto medio:

$$x = L_1 \cos(\phi_1)$$

$$y = L_1 \sin(\phi_1)$$

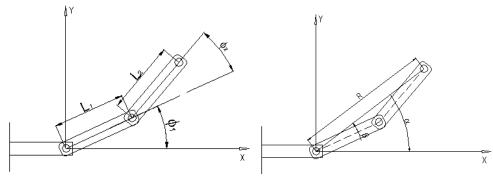


Figura 2 – Esquema del brazo

3.3.- Cinemática Inversa: La cinemática inversa como se intuirá, consiste en encontrar la relación de las coordenadas articulares (ϕ_1, ϕ_2) en función de la posición (x,y) del extremo del brazo. Esto se obtiene también geométricamente y permite definir una trayectoria en función del tiempo $(x,y)=f_{(t)}$ para luego encontrar los ángulos requeridos para dicha trayectoria también en función del tiempo. Por teorema del coseno:

$$R^{2} = x^{2} + y^{2} = L_{1}^{2} + L_{2}^{2} + 2L_{1}L_{2}\cos(\phi_{2})$$

$$\cos(\phi_{2}) = \frac{(x^{2} + y^{2} - L_{1}^{2} - L_{2}^{2})}{(2.L_{1}.L_{2})}$$

$$\phi_{2} = \arccos(\cos(\phi_{2}))$$

$$y = R\sin(\alpha)$$

$$y = \pm \sqrt{(x^{2} + y^{2})}\sin(\alpha)$$

$$\sin(\alpha) = \frac{y}{\pm \sqrt{(x^{2} + y^{2})}}$$

$$\alpha = \arcsin(\sin(\alpha))$$

Se puede ver que tendremos dos soluciones para α .

$$Cos(\beta) = \frac{L_2^2 = R^2 + L_1^2 - 2RL_1 cos(\beta)}{2RL_1} = \frac{(x^2 + y^2 + L_1^2 - L_2^2)}{2RL_1}$$

$$\beta = arc cos (cos(\beta))$$

$$\phi_{11} = \beta + \alpha$$

$$\phi_{12} = \beta - \alpha$$

Trabajaremos con ϕ_{12}

3.4.- Análisis estático: A continuación se plantean las ecuaciones que vinculan los momentos en cada articulación con la posición del extremo del brazo considerando el sistema en cada punto como estático. Esto es, solo cargas estáticas debido al peso del brazo, antebrazo, poleas, ejes y la carga en el extremo. Como se dijo partimos aquí con las masas de los brazos y la carga del extremo concentrados en los extremos.

Momentos actuantes en las articulaciones:

$$M_1 = m_1 g L_1 \cos(\phi_1) + m_2 g \left[L_1 \cos(\phi_1) + L_2 \cos(\phi_1 + \phi_2) \right]$$

$$M_2 = m_2 g L_2 \cos(\phi_1 + \phi_2)$$

En nuestro caso particular los momentos estáticos en las articulaciones tienen un máximo cuando el brazo está completamente extendido, es decir con $\phi_1 = 0 \land \phi_2 = 0$, donde los brazos de palanca son también máximos.

3.5.- Análisis dinámico: Teniendo presentes las ecuaciones (1) y (2), que determinan la posición del extremo del brazo, podremos plantear las ecuaciones de la velocidad en ambos ejes.

$$V_{x} = -L_{1}\sin(\phi_{1})\frac{\partial\phi_{1}}{\partial t} - L_{2}\sin(\phi_{1} + \phi_{2})\frac{\partial(\phi_{1} + \phi_{2})}{\partial t}$$
(3)

$$V_{y} = L_{1} \cos(\phi_{1}) \frac{\partial \phi_{1}}{\partial t} + L_{2} \cos(\phi_{1} + \phi_{2}) \frac{\partial (\phi_{1} + \phi_{2})}{\partial t}$$

$$\tag{4}$$

Realizando en las ecuaciones (3) y (4) operaciones algebraicas sencillas (elevando al cuadrado, sumando miembro a miembro), aplicando relaciones trigonométricas, etc, se llegan a determinar las energías cinética y potencial del manipulador.

Energía Cinética:

$$T = \frac{m_1}{2} L_1^2 \varphi_1^1 + \frac{m_2}{2} \left[\left(L_1^2 + L_2^2 + 2 L_1 L_2 \cos \varphi_2 \right) \varphi_1^2 + L_2^2 \varphi_2^2 + 2 \left(L_2^2 + 2 L_1 L_2 \cos \varphi_2 \right) \varphi_1 \varphi_2 \right]$$
(5)

Energía Potencial:

$$U = m_1 g L_1 \sin \varphi_1 + m_2 g \left[L_1 \sin \varphi_1 + L_2 \sin (\varphi_1 + \varphi_2) \right]$$
 (6)

En estas ecuaciones, ϕ_i representa $\frac{\partial \phi_i}{\partial t}$ a fin de simplificar la notación.

3.6.- Planteo de las ecuaciones para obtener el Lagrangiano: El método de la dinámica de Lagrange es aplicable a un gran conjunto de problemas de partículas y cuerpos rígidos ya que presenta numerosas ventajas sobre los métodos convencionales. Este método en gran parte reduce el campo de la estática y de la dinámica (de partículas y cuerpos rígidos) a un solo procedimiento que implica las mismas etapas básicas, independientemente del número de masas consideradas, del tipo de coordenadas utilizadas, del número de restricciones sobre el sistema, y de que las restricciones y el marco de referencia estén o no en movimiento, por lo que se puede considerar que los "métodos especiales" se reemplazan por un "método general único".

El método considerado está basado, en gran medida, en magnitudes escalares: energía cinética, energía potencial, trabajo virtual, y en muchos casos la función de potencia. Se puede afirmar que, por muy complejo que sea el sistema, los términos de la ecuación de movimiento de Lagrange consisten en las componentes adecuadas de fuerza y aceleración expresadas en el sistema de coordenadas elegido.

Citando textualmente a Wells [4] "Afortunadamente, las ideas básicas empleadas en la deducción de las ecuaciones de Lagrange son sencillas y de fácil comprensión. Si se expresan sin adornos académicos ni terminología rebuscada no presentan dificultades" Por esras razones, es que el modelo se desarrollará utilizando este método.

Lagrangiano: L=T-U

Entonces, se tendrá que:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_{1}} = m_{1}L_{1}^{2} \stackrel{\bullet}{\varphi_{1}} + m_{2} \left(L_{1}^{2} + L_{2}^{2} + 2L_{1}L_{2}\cos\varphi_{2}\right) \stackrel{\bullet}{\varphi_{1}} + m_{2} \left(L_{2}^{2} + L_{1}L_{2}\cos\varphi_{2}\right) \stackrel{\bullet}{\varphi_{2}}$$

$$\begin{split} \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} &= m_2 L_2^2 \varphi_2 + m_2 \Big(L_2^2 + L_1 L_2 \cos \varphi_2 \Big) \varphi_1^{\bullet} \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} &= -m_1 g L_1 \cos \varphi_1 - m_2 g \Big[L_1 \cos \varphi_1 + L_2 \cos (\varphi_1 + \varphi_2) \Big] \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} &= -m_2 L_1 L_2 \sin \varphi_2 \Big(\varphi_1^2 + \varphi_1 \varphi_2 \Big) - m_2 g L_2 \cos (\varphi_1 + \varphi_2) \Big) \end{split}$$

 $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = m_1 L_1^2 \frac{\bullet \bullet}{\varphi_1} + m_2 \left(L_1^2 + L_2^2 + 2L_1 L_2 \cos \varphi_2 \right) \frac{\bullet \bullet}{\varphi_1} - \left(2m_2 L_1 L_2 \sin \varphi_2 \right) \frac{\bullet}{\varphi_1} \frac{\bullet}{\varphi_2} + m_2 \left(L_2^2 + L_1 L_2 \cos \varphi_2 \right) \frac{\bullet}{\varphi_2} - \left(m_2 L_1 L_2 \sin \varphi_2 \right) \frac{\bullet}{\varphi_2} \frac{\bullet}{\varphi_2} + m_2 \left(L_2^2 + L_1 L_2 \cos \varphi_2 \right) \frac{\bullet}{\varphi_2} - \left(m_2 L_1 L_2 \sin \varphi_2 \right) \frac{\bullet}{\varphi_2} \frac{\bullet}{\varphi_2} + m_2 \left(L_2^2 + L_1 L_2 \cos \varphi_2 \right) \frac{\bullet}{\varphi_2} - \left(m_2 L_1 L_2 \sin \varphi_2 \right) \frac{\bullet}{\varphi_2} \frac{\bullet}{\varphi_2} \frac{\bullet}{\varphi_2} + m_2 \left(L_2^2 + L_1 L_2 \cos \varphi_2 \right) \frac{\bullet}{\varphi_2} \frac$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = m_2 \left(L_2^2 + L_1 L_2 \cos \varphi_2\right) \varphi_1 + m_2 L_2^2 \varphi_2 - \left(m_2 L_1 L_2 \sin \varphi_2\right) \varphi_1 \varphi_2$$

Para obtener el modelo, se plantea: $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = \tau_1$ y $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = \tau_2$ donde τ_i son

los torques en las articulaciones

Operando y ordenando se obtiene el modelo del brazo, que en forma de ecuación matricial es:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overset{\bullet}{\varphi_1} \\ \overset{\bullet}{\varphi_2} \\ & &$$

Con el objeto de simplificar la notación, en la ecuación matricial (7) se llamó:

$$\begin{split} M_{11} &= \left(m_1 + m_2\right)L_1^2 + m_2L_2^2 + 2m_2L_1L_2\cos\varphi_2 \quad ; \quad M_{12} = M_{21} = m_2L_2^2 + m_2L_1L_2\cos\varphi_2 \; ; \quad M_{22} = m_2L_2^2 \; ; \\ C &= m_2L_1L_2\sin\varphi_2 \; \Rightarrow C_{11} = -C \; ; \; C_{12} = -C \; ; \; C_{21} = C \; ; \; C_{22} = 0 \end{split}$$

$$N_1 = (m_1 + m_2)gL_1\cos\varphi_1 + m_2gL_2\cos(\varphi_1 + \varphi_2); N_2 = m_2gL_2\cos(\varphi_1 + \varphi_2)$$

 τ_1 y τ_2 son los *Torques* aplicados directamente en las articulaciones, mientras que L_1 y L_2 son las longitudes de los eslabones 1 y 2 respectivamente.

4.- MODELO MATEMÁTICO DE RED TENDONAL.

Según lo presentado por Murray, Li, y Sastry [1], para desarrollar el modelo matemático de este tipo de manipuladores (con el esquema de poleas y tendones) es necesario calcular los torques en las articulaciones como funciones del recorrido, de la elasticidad y de la extensión de los tendones (cables).

Con esta configuración, la dinámica del modelo tiene la siguiente expresión matricial:

$$[M(\varphi)] \cdot \begin{bmatrix} \bullet \\ \varphi \end{bmatrix} + [C(\varphi, \varphi)] \cdot [\varphi] + [N(\varphi, \varphi)] + [P \cdot K(h(\varphi) - h(0))] = [P \cdot K \cdot e]$$

Con la nomenclatura indicada en la figura 1, planteamos:

4.1.- Funciones del Recorrido de los tendones (o extensión debida a los mecanismos).

$$h_1 = L_1 + R_{11} \varphi_1 - R_{12} \varphi_2$$
; $h_2 = L_2 - R_{21} \varphi_1$; $h_3 = L_3 + R_{31} \varphi_1$; $h_4 = L_4 - R_{41} \varphi_1 + R_{42} \varphi_2$ Donde:

 L_i son las *Longitudes Nominales* de cada tendón, cuando $\varphi_i = 0$;

 R_{ij} son los *Radios* de las poleas del *i-ésimo tendón* en la *j-ésima articulación*.

Entonces, teniendo en cuenta la figura, podemos adoptar la siguiente nomenclatura:

$$L_1 = L_4 \Rightarrow = L_{14} \; ; \; L_2 = L_3 \Rightarrow = L_{23} \; ; \; R_{11} = R_{41} \Rightarrow = R_{141} \; ; \; R_{12} = R_{42} \Rightarrow = R_{142} \; ; \; R_{21} = R_{31} \Rightarrow = R_{231} \Rightarrow = R_{231$$

4.2.- Funciones de la Elasticidad de los tendones:

Suponemos que toda la elasticidad del tendón se puede agrupar en un solo elemento elástico (tipo resorte) de constante $k_i > 0$ y se puede construir la Matriz de Rigideces del sistema:

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_4 \end{bmatrix}$$

4.3.- Funciones de la Extensión de los tendones (debidas a los actuadores).

En primer lugar, se obtiene la Matriz de Acoplamiento "P":

$$P = \left[\frac{\partial h}{\partial \varphi}\right]^T = \begin{bmatrix} R_{141} & -R_{231} & R_{231} & -R_{141} \\ -R_{142} & 0 & 0 & R_{142} \end{bmatrix}$$
 Luego, se obtiene la *Nueva Matriz de Acoplamiento "Q"*:

$$Q = P \cdot K = \begin{bmatrix} K_1 R_{141} & -K_2 R_{231} & K_3 R_{231} & -K_4 R_{141} \\ -K_1 R_{142} & 0 & 0 & K_4 R_{142} \end{bmatrix}$$

Hallamos las diferencias en la extensión debidas a los *mecanismos* $h_{(\varphi)} - h_{(0)}$:

$$h_{(\varphi)} - h_{(0)} = \begin{bmatrix} R_{141} & -R_{142} \\ -R_{231} & 0 \\ R_{231} & 0 \\ -R_{141} & R_{142} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$$

Luego, la Matriz de Rigidez Total "S" se obtiene:

$$S_{(\varphi)} = PK(h_{(\varphi)} - h_{(0)}) = \begin{bmatrix} R_{141}^2(K_1 + K_4) + R_{231}^2(K_2 + K_3) & -R_{141}R_{142}(K_1 + K_4) \\ -R_{141}R_{142}(K_1 + K_4) & R_{142}^2(K_1 + K_4) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$$

Finalmente, la ecuación de la dinámica del brazo de dos articulaciones, con tendones elásticos queda de la siguiente forma:

$$[M(\varphi)] \cdot \begin{bmatrix} \bullet \\ \varphi \end{bmatrix} + [C(\varphi, \varphi)] \cdot \begin{bmatrix} \bullet \\ \varphi \end{bmatrix} + [N(\varphi, \varphi)] + [S] \cdot [\varphi] = [Q] \cdot [e]$$

Donde las e_i serán las extensiones producidas por los actuadores, y pueden ser asimiladas a las señales de control ui.

Operando, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{split}
& \left[\left(m_{1} + m_{2} \right) L_{1}^{2} + m_{2} L_{2}^{2} + 2 m_{2} L_{1} L_{2} \cos \varphi_{2} \right] \cdot \overset{\bullet}{\varphi}_{1} + \left[m_{2} L_{2}^{2} + m_{2} L_{1} L_{2} \cos \varphi_{2} \right] \cdot \overset{\bullet}{\varphi}_{2} - \\
& - \left[m_{2} L_{1} L_{2} \sin \varphi_{2} \right] \cdot \left[\overset{\bullet}{\varphi}_{1} \cdot \overset{\bullet}{\varphi}_{2} + \overset{\bullet}{\varphi}_{2} \cdot \left(\overset{\bullet}{\varphi}_{1} + \overset{\bullet}{\varphi}_{2} \right) \right] + \left[\left(m_{1} + m_{2} \right) g L_{1} \cos \varphi_{1} + m_{2} g L_{2} \cos (\varphi_{1} + \varphi_{2}) \right] + \\
& + \left[R_{141}^{2} (K_{1} + K_{4}) + R_{231}^{2} (K_{2} + K_{3}) \right] \cdot \varphi_{1} - \left[R_{141} R_{142} (K_{1} + K_{4}) \right] \cdot \varphi_{2} = \\
& = \left[K_{1} R_{141} \right] \cdot e_{1} - \left[K_{2} R_{231} \right] \cdot e_{2} + \left[K_{3} R_{231} \right] \cdot e_{3} - \left[K_{4} R_{141} \right] \cdot e_{4}
\end{split} \tag{8}$$

$$\left[m_{2}L_{2}^{2} + m_{2}L_{1}L_{2}\cos\varphi_{2}\right] \cdot \overset{\bullet}{\varphi}_{1} + \left[m_{2}L_{2}^{2}\right] \cdot \overset{\bullet}{\varphi}_{2} + \left[m_{2}L_{1}L_{2}\sin\varphi_{2}\right] \cdot \overset{\bullet}{\varphi}_{1} + \left[m_{2}gL_{2}\cos(\varphi_{1} + \varphi_{2})\right] - \left[R_{141}R_{142}(K_{1} + K_{4})\right] \cdot \varphi_{1} + \left[R_{142}^{2}(K_{1} + K_{4})\right] \cdot \varphi_{2} = -\left[K_{1}R_{142}\right] \cdot e_{1} + \left[K_{4}R_{142}\right] \cdot e_{4}$$
(9)

5.- MODELO EN VARIABLES DE ESTADO.

Para que el modelo matemático obtenido pueda ser útil a los fines de control (Ogata, Kuo [2] y [3]), a las expresiones (8) y (9) debemos transformarlas asignando "variables de estado", las que resultan:

$$x_1=\varphi_1$$
 ; $x_2=\varphi_1$; $x_3=\varphi_2$; $x_4=\varphi_2$; $u_i=e_i$

de esta manera, se obtiene:

•
$$x_1 = x_2$$
; $x_2 = \varphi_1$; $x_3 = x_4$; $x_4 = \varphi$

y el modelo queda conformado en variables de estado:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12} & M_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11}x_4 & C_{12}(x_2 + x_4) \\ C_{21}x_2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_1(x_1, x_3) \\ N_2(x_1, x_3) \end{bmatrix} + \\
+ \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} \\ Q_{21} & 0 & 0 & Q_{24} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$
(10)

Expresando la ecuación matricial (10) en forma de ecuaciones, se llega a:

$$-N_1(x_1,x_3)-S_{11}x_1-S_{12}x_3$$

Con el único propósito de simplificar la notación, en estas expresiones, se definen:

$$MM = M_{11}M_{22} - M_{12}^2;$$

$$AA = Q_{11}u_1 + Q_{12}u_2 + Q_{13}u_3 + Q_{14}u_4 - C_{11}x_4x_2 - C_{12}(x_2 + x_4)x_4 - N_1(x_1, x_3) - S_{11}x_1 - S_{12}x_3 \ ;$$

$$BB = Q_{21}u_1 + Q_{24}u_4 - C_{21}x_2^2 - N_2(x_1, x_3) - S_{21}x_1 - S_{22}x_3$$

Se despejan las derivadas de x_2 y x_4 , se restan miembro a miembro, y se llega a las expresiones:

$$\overset{\bullet}{x_2} = \frac{M_{22}}{MM} \cdot [AA] - \frac{M_{12}}{MM} \cdot [BB] \; ; \; y \; \overset{\bullet}{x_4} = -\frac{M_{12}}{MM} \cdot [AA] + \frac{M_{11}}{MM} \cdot [BB]$$

Finalmente, el modelo en variables de estado, adopta la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \overset{\bullet}{x_1} \\ \overset{\bullet}{x_2} \\ \overset{\bullet}{x_3} \\ \overset{\bullet}{x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{M_{12}S_{21} - M_{22}S_{11}}{MM} & \frac{M_{12}C_{21}x_2 - M_{22}C_{11}x_4}{MM} & \frac{M_{12}S_{22} - M_{22}S_{12}}{MM} & -\frac{M_{22}C_{12}(x_2 + x_4)}{MM} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{M_{12}S_{11} - M_{11}S_{21}}{MM} & \frac{M_{12}C_{11}x_4 - M_{11}C_{21}x_2}{MM} & \frac{M_{12}S_{12} - M_{11}S_{22}}{MM} & \frac{M_{12}C_{12}(x_2 + x_4)}{MM} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{M_{22}}{MM} & \frac{M_{12}}{MM} \\ 0 & 0 \\ \frac{M_{12}}{MM} & -\frac{M_{11}}{MM} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{M_{22}Q_{11} - M_{12}Q_{21}}{MM} & \frac{M_{22}Q_{12}}{MM} & \frac{M_{22}Q_{13}}{MM} & \frac{M_{22}Q_{14} - M_{12}Q_{24}}{MM} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{M_{11}Q_{21} - M_{12}Q_{11}}{MM} & -\frac{M_{12}Q_{12}}{MM} & -\frac{M_{12}Q_{13}}{MM} & \frac{M_{11}Q_{24} - M_{12}Q_{14}}{MM} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

6.- Conclusiones.

El objetivo de esta primera entrega, expresado en la introducción, y que consistía en hallar el modelo matemático del manipulador se ha logrado. Este modelo ha sido presentado de una manera útil para los fines de control, expresado en variables de estado y donde quedan de manifiesto las variables de entrada y salida que nos permitirán aplicar las leyes de control deseadas. Por otra parte, se destaca que el desarrollo minucioso y paso a paso de este modelo no se encuentra disponible en la bibliografía, lo que constituye una interesante herramienta didáctica a los fines de la enseñanza de la ingeniería electromecánica (y otras ramas afines).

7.- Bibliografía.

- [1] Murray, R; Li, Z; Sastry, S. "A mathematical introduction to robotic manipulation". CRC Press, 1994.
- [2] Ogata, Katsuhiko "Ingeniería de Control Moderna". Editorial Prentice Hall, 1995.
- [3] Kuo, Benjamin C. "Sistemas de Control Automático". Editorial Prentice Hall, 1995.
- [4] Wells, Dare A. "Dinámica de Lagrange". Editorial McGraw Hill, 1972.

UN MODELO MATEMÁTICO COMO HERRAMIENTA DE BENCHMARKING EN EL TARGET DE LA CONSTRUCCIÓN

Rescala, Carmen¹; Devincenzi, Gustavo¹; Rohde, Gricela¹; Bonaffini, Ma.Liliana¹; Bernaola, Gustavo²; Giraudo, Marta¹; Martínez, Hilda¹

Universidad Nacional del Nordeste¹ – Universidad Tecnológica Nacional² (1) Avenida Las Heras 727-Resistencia-Chaco 03722-422155-425064

<u>carmenrescala@yahoo.com.ar</u>, <u>gdevin@ing.unne.edu.ar</u>; <u>grohde@eco.unne.edu.ar</u>; <u>mbonaffini@eco.unne.edu.ar</u>; <u>gustavo@edesycc.com.ar</u>; <u>marta_giraudo@yahoo.com.ar</u>; <u>hmuller@eco.unne.edu.ar</u>

Colaboración: becaria alumna de la Fac. de Ciencias Económicas, Srta. Rita Pavón.

Eje Temático: MATEMÁTICA APLICADA

Palabras claves: DEA-Eficiencia – Benchmarking-Empresas Constructoras- Gestión de

Administración

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es mostrar cómo el DEA (Análisis Envolvente de Datos) es un modelo matemático para el benchmarking de empresas constructoras, permitiendo la confrontación de sus eficiencias relativas en el manejo de los inputs utilizados para la obtención de sus outputs.

Este trabajo es continuación de investigaciones realizadas por el equipo de los Proyectos PI 054/07 y M001/10 "Modelos Matemáticos y Estadísticos para la Gestión de Administración de Empresas Constructoras Primera y Segunda Etapa".

Metodología: es científica cuantitativa y sirvió para analizar los datos correspondientes a distintos ejercicios contables de dos empresas, considerados las unidades de toma de decisiones a comparar (DMU's). El modelo DEA se aplicó en sus versiones CCR (rendimientos constantes a escala) y BCC (rendimientos variables a escala) y se seleccionaron dos variables de entrada o inputs: Activo Corriente y Bienes de Uso y una variable de salida u output: Resultado Total.

Mediante la aplicación del modelo matemático elegido se pudo diagnosticar qué período y de qué empresa fue el más eficiente.

Se desarrolló además un aplicativo en VBA-Excel para estos modelos, que permitió contrastar resultados con otros aplicativos y disponer asimismo de una herramienta con posibilidades de expansión.

INTRODUCCIÓN

Las empresas constructoras de Resistencia, deben conseguir un posicionamiento, una imagen que les permita diferenciar su oferta y liderar en el mercado de la industria de la construcción chaqueña.

Para alcanzar esa meta deben ser eficientes, esto significa que las eficiencias relativas de sus procesos productivos deben permitirles el nivel de competitividad deseado.

Nada pueden lograr las empresas si no conocen y mejoran sus eficiencias relativas en el uso de sus recursos. La importancia del presente trabajo radica en colaborar con ellas en mejorar los procesos de gestión de administración y optimizar la toma de decisiones.

Al mejorar sus eficiencias, las empresas podrán alcanzar mayor rentabilidad y el crecimiento de su productividad, creando valor económico. Para ello las empresas deben contar con una administración estratégica científica, la que les posibilitará desarrollar dinámicas productivas y competitivas. Colaborando con la administración científica de las organizaciones, aparecen los modelos matemáticos que muestran las mejoras potenciales para las eficiencias relativas.

Este trabajo fue realizado con el objetivo de mostrar la utilidad del modelo Análisis Envolvente de Datos (DEA) en la confrontación de las eficiencias relativas de dos empresas constructoras de Resistencia, Chaco, para reflejar una situación de benchmarking permitida por esta herramienta de análisis.

La metodología, científica cuantitativa y la información brindada por las empresas seleccionadas, las que aportaron los Balances Generales y los Estados de Resultados, permitieron establecer las correspondientes similitudes y diferencias en las eficiencias de la utilización de sus insumos para la obtención del resultado. En la aplicación del modelo DEA, se trabajó con orientación hacia los outputs (salidas), porque las empresas constructoras, al igual que otras empresas, buscan la manera de ampliar proporcionalmente las cantidades de sus salidas sin alterar las cantidades de sus entradas, esto significa priorizar el criterio de utilidades.

Se analizaron los datos económicos y financieros correspondientes a seis ejercicios de la empresa 1 (E1) y cuatro ejercicios de la empresa 2 (E2), mediante el modelo matemático elegido, *Análisis Envolvente de Datos (DEA) con los métodos CCR*¹ y BCC² orientados a los Outputs. Los softwares utilizados fueron Frontier Analyst y un desarrollo en MS-Excel – VBA.

Los datos obtenidos y procesados provienen de los Estados Contables correspondientes a los ejercicios económicos considerados, (aporte de las empresas ante las solicitudes del equipo de investigación).

MARCO TEÓRICO

El DEA es un enfoque no paramétrico de programación matemática; tiene la particularidad, sobre cualquier ratio (indicador financiero), que las ponderaciones que utiliza son determinadas endógenamente por la propia técnica de la medición. Las mismas se obtienen, al igual que la tasa de eficiencia, mediante la resolución de un modelo de programación lineal, cuya formulación pone de manifiesto el carácter relativo de la medida de la eficiencia obtenida. En efecto, la tasa de eficiencia suministrada por el método DEA es el resultado de comparar la actividad productiva de cada organización evaluada con las de otras técnicamente homogéneas o de una misma organización en distintos períodos, tal como se presenta en este trabajo.

¹ CCR (Charnes, Cooper y Rhodes) con tecnología lineal y rendimientos a escala constante.

²BCC (Banker, Charnes y Cooper), con rendimientos variables a escala.

El modelo DEA posee distintas orientaciones:

- ✓ Orientado hacia los Inputs.
- ✓ Orientado hacia los Outputs.
- ✓ Orientación Inputs Outputs.

El modelo DEA permite comparar cada unidad ineficiente con aquella unidad eficiente con igual combinación de outputs e inputs, la que actúa como referente.

La tasa de eficiencia comprende, simultáneamente, distintos aspectos de los resultados y la actividad, ofreciendo más detalles que el análisis financiero, por lo que puede resultar mucho más útil en la gestión.

DEA aporta junto con la medida o indicador de eficiencia, la siguiente información complementaria:

- Mediante el indicador de ineficiencia informa de la medida en que es posible mejorar los resultados de una empresa reduciendo proporcionalmente todos sus inputs o aumentando proporcionalmente todos sus outputs, respectivamente.
- ii) A través de las intensidades del dual, identifica el conjunto de empresas (unidades) eficientes con las que ha sido directamente comparada la empresa a la hora de obtener la evaluación de su eficiencia.
- iii) Mediante el valor positivo de las variables de holgura, informa acerca de los inputs específicos que están siendo sobreutilizados o de los outputs que están subproducidos.
- iv) Permite el examen de características particularidades del proceso de transformación de los inputs en outputs (rendimientos variables a escala, escala más productiva, tasas de transformación entre outputs y entre inputs, etc.)

La eficiencia de las empresas depende de dos aspectos principales: del uso que se haga de los insumos y del costo de los mismos.

Al evaluar los resultados, DEA informa de la eficiencia de una empresa en la utilización de sus recursos, y que al ser evaluada según este último aspecto, es el que se conoce como eficiencia técnica y relaciona los insumos utilizados en razón de los productos que se genera.

Posteriormente se analizó un año ineficiente para cada una de ellas, reflejándose este aspecto en la DMU (unidad de decisión) 2008 (de ambas) para el análisis cuantitativo indicado por los modelos. Para concluir, se compararon las DMU elegidas.

ESTUDIO DE CASO:

Para el análisis se utilizó la metodología conocida como estudio de caso, con el siguiente orden:

- 1. se tomaron los datos provenientes de un análisis anterior en el que se determinó las eficiencias relativas de la empresa 1 con respecto a las variables consideradas.
- 2. de forma similar se analizaron los datos de la empresa 2 para la determinación de las eficiencias relativas con los métodos BCC y CCR.
- 3. selección y confrontación de una DMU ineficiente por los métodos CCR y BCC para las dos empresas.
- 4. conclusiones

Las variables seleccionadas, aconsejadas por quienes tienen la misión de conducir la empresa y alcanzar los objetivos propuestos y los que conforman el Nivel Ejecutivo de la Empresa 2, son:

- ✓ variables de entrada: Activo Corriente y Bienes de Uso;
- ✓ variables de salida: Resultado Total

1. EFICIENCIAS RELATIVAS DE LA EMPRESA 1

En el siguiente cuadro se reflejan los resultados de estas variables para la Empresa 1.

DMU Empresa 1 (E1)	(I) Activo Cte.	(I) Bienes de Uso	(O)Resultado Total
2004	151	197	92
2005	231	268	100
2006	581	235	238
2007	741	409	357
2008	1085	418	301
2009	1739	631	545

Cuadro 1

Aplicando los métodos CCR y BCC se obtuvieron los siguientes ratios de eficiencia:

CCR

Unit name	Score	Efficient
2004	100,0%	√
2005	74,0%	
2006	100,0%	✓
2007	100,0%	✓
2008	71,1%	
2009	85,3%	

BCC

Unit name	Score	Efficient
2004	100,0%	V
2005		
2006	100,0%	~
2007	100,0%	V
2008	79,5%	
2009	100,0%	~

Fig. 1. Eficiencias en el método CCR

Fig. 2. Eficiencias en el método CCR

2. EFICIENCIAS RELATIVAS DE LA EMPRESA 2

A continuación se muestran los resultados de los inputs y outputs elegidos para la Empresa 2.

DMU Empresa 2 (E2)	(I) Activo Cte.	(I) Bs de Uso	(O) Resultado Total
2005	863	83	321
2006	564	136	90
2007	1181	226	311
2008	1241	333	193

Cuadro 2

Utilizando los mismos métodos que en la Empresa 1 y a partir de los datos del Cuadro 2, se obtuvieron los siguientes ratios de eficiencia:

CCR

Unit name	Score	Efficient
2005	100,0%	V
2006	43,0%	
2007	70,7%	
2008	41,8%	

Fig.3. Eficiencias con el método CCR

BCC

Unit name		Efficien
2005	100,0%	~
2006	100,0%	~
2007	96,7%	
2008	60,1%	

Fig.4. Eficiencias con el método BCC

3. SELECCIÓN Y CONFRONTACIÓN DE UNA DMU INEFICIENTE POR LOS MÉTODOS CCR Y BCC PARA LAS DOS EMPRESAS.

La confrontación se realizó por dos procedimientos:

- I) Analizando las unidades ineficientes DMU 2008-1 y DMU 2008-2
- II) Analizando las eficiencias relativas de las DMU 2005, 2006, 2007 y 2008 para ambas empresas

I) Análisis de las unidades ineficientes DMU 2008-1 y DMU 2008-2

Se selecciona una unidad ineficiente para la evaluación y comparación, en este caso, las DMU 2008.

A continuación se comparan las ineficiencias y los conjuntos de referencia de las DMU seleccionadas 2008-1 y 2008-2.

DMU	Eficiencia Técnica	Co	Conj. de Ref.			λ	
2008-1 CCR	0,711018	2005-1	-	-	1	-	-
2008-2 CCR	0,418110	2005-2	-	-	1,43800695		
2008-1 BCC	0,795344	2006-1	2007-1	2009-1	0,48783772	0,089262445	0,422899835
2008-2 BCC	0,601246	2005-2	-	-	1	-	-

Cuadro 3

Se observa que las eficiencias de la Empresa 1 en ambos métodos son mayores que las eficiencias de la Empresa 2. El método BCC arroja mayores valores de eficiencia que el método CCR, en ambas empresas. La Empresa 1 con el método BCC cuenta con un conjunto de referencia compuesto por tres DMU a diferencia del resto que sólo posee una unidad.

Lambda (λ) es un coeficiente que describe la magnitud asignada por el modelo a cada una de las DMU que forman parte del grupo de referencia. Por tanto, cada DMU, a la hora de adoptar medidas correctivas con la perspectiva de lograr una situación eficiente debe prestar especial atención a las prácticas productivas que se desarrollan en las unidades que forman parte de su conjunto de referencia, principalmente aquéllas en las que los valores de λ han sido superiores.

La intensidad del conjunto de referencia es menor que la unidad solamente para la Empresa 1 en el método BCC.

Se analizan a continuación las mejoras potenciales de cada DMU. Estas mejoras son las que las empresas deberían realizar en forma práctica para obtener un mejor posicionamiento y alcanzar su propio potencial.

DMU	Innuta/Outnut	Valor	Valor	Mejo	ras Potencial	es
DMU	Inputs/Output	Observado	Objetivo	M. Radial	M. Holgura	%
	(I)Act Cte	1085,00	1085,00	-	•	•
2008-1 BCC	(I) Bs uso	418,00	418,00	-	-	-
	(O) Rtdos T.	301,00	378,45	77,45	•	25,73
	(I)Act Cte	1085,00	1033,00	-	-51,56	-4,75
2008-1 CCR	(I) Bs uso	418,00	418,00	-	ı	•
	(O) Rtdo T.	301,00	423,34	122,34	-	40,64
	(I)Act Cte	1241,00	863,00	-	-378	-30,45
2008-2 BCC	(I) Bs uso	333,00	83,00	-	-250	-75,13
	(O) Rtdo T.	193,00	321,00	128,00	•	66,27
	(I) Act. Cte	1241,00	1241,00	-	•	•
2008-2 CCR	(I) Bs. Uso	333,00	119,35	-	213,65	-64,20
	(O) Rtdos T.	193,00	461,60	268,60		139,06

Cuadro 4

Analizando las DMU 2008-1 y 2008-2 la tabla refleja que mediante la utilización del método BCC, la DMU 2008-1 tiene que realizar mejoras sólo en el output (25,73%) para una mejora práctica y alcanzar su propio potencial, y que proviene del incremento radial (77,45).

La DMU 2008-2, además de realizar mejoras (66,27%) en el output derivadas del incremento radial (128,00), también debe modificar el consumo de los inputs Activo Corriente (-30,45%) y Bienes de Uso (-75,13%) ya que presenta una excedencia en la utilización de los inputs.

La tabla para el método CCR con las DMU 2008-1 y 2008-2 muestra que la DMU 2008-1 tiene que realizar mejoras en el output (40,64%) para una mejora práctica que le permita alcanzar su propio potencial. Esta mejora proviene del incremento radial (122,34). La cantidad (-4,75%) indica que la utilización del input Activo Corriente debe reducirse en un 4, 75%.

La DMU 2008-2, además de realizar mejoras (139,06%) en el output derivadas del incremento radial (268,60), también debe modificar el consumo del input Bienes de Uso (-64,20%) ya que presenta una excedencia en la utilización del mismo.

Eficiencias de Escala

La sigla ETG indica Eficiencia Técnica Global y ETP la Eficiencia Técnica Pura:

DMU	ETG (CCR)	ETP (BCC)	EE	EE'	k_0	Rendim.
2008-1	0,711018	0,795344	0,893976	1,118597	-0,201510	decrecientes
2008-2	0,418110	0,601246	0,695406	1,438006	-1,662264	decrecientes

Cuadro 5

La razón entre las medidas de eficiencia ETG (CCR) y ETP (BCC) se define como la medida de eficiencia de escala EE : ETG = ETPxEE y $EE = \frac{ETG}{ETP}$.

Su relación inversa $EE' = \frac{1}{EE}$ (que corresponde a la orientación output del mode-

lo DEA con el que estamos trabajando), expresa el aumento adicional de los outputs que se debe realizar para que la empresa opere con rendimientos constantes a escala en el largo plazo.

Esta medida permite detectar las fuentes de las ineficiencias, es decir, si la ineficiencia es causada por operaciones incorrectas, por ejemplo consumo excesivo de recursos (ETP según el modelo BCC) o por la dimensión de la producción de la DMU la que puede estar por debajo o por encima de su capacidad productiva (ETG según el modelo CCR).

La relación
$$EE = \frac{ETG}{ETP}$$
 será siempre ≤ 1 .

La constante k_0 indica la tipología de los rendimientos a escala:

 $k_0 > 0$ indica rendimientos crecientes a escala

 $k_0 = 0$ indica rendimientos constantes a escala

 $k_0 < 0$ indica rendimientos decrecientes a escala

Las dos empresas tienen una ineficiencia de escala debido a:

- un manejo incorrecto de los recursos sobre los cuales se trabajó, valor de ineficiencia obtenido con el método BCC. En el cuadro 5 se refleja un valor negativo de la constante k_0 , lo que significa una tipología de rendimientos decrecientes a escala.
- condiciones de desventaja en el nivel de producción de la DMU indicado por la eficiencia determinada por el método CCR.

La negatividad de la constante k₀ nos indica que los rendimientos de las unidades son decrecientes a escala, es decir, al variar la cantidad utilizada de inputs en una determinada proporción, el output obtenido varía en una proporción menor.

En el cuadro siguiente se exponen las relaciones antes explicadas:

DMU	Valor Observado Output (1)	Valor Objetivo en CCR (2)	Valor Objetivo en BCC (3)	(3) x EE'	(EE'-1) x (3)=(2) -(3)
2008-1	301	423,34	378,45	423,34	44,88
2008-2	193	461,6	321	461,60	140,60

Analizamos las eficiencias relativas de las DMU 2005, 2006, 2007 y 2008 para I) ambas empresas

Eficiencias obtenidas del análisis de las DMU de las empresas seleccionadas para el estudio:

Unit name	Score	Efficient
2005-1	89,9%	
2005-2	100,0%	~
2006-1	91,8%	
2006-2	39,2%	
2007-1	100,0%	~
2007-2	66,7%	
2008-1	62,8%	
2008-2	37.6%	

Unit name	Score	Efficient
2005-1	100,0%	~
2005-2	100,0%	~
2006-1	98,7%	
2006-2	100,0%	~
2007-1	100,0%	*
2007-2	92,3%	
2008-1	84,3%	
2008-2	55,4%	

Fig. 5. Eficiencias de las dos empresas en Fig.6. Eficiencias de las dos empresas en

A continuación se comparan las ineficiencias y los conjuntos de referencia de las DMU seleccionadas 2008-1 y 2008-2.

DMU	W_0	Efic. Técn.= 1/W ₀	Conj. de Ref.		λ		\mathbf{k}_0
2008-1 BCC	1,18604	0,84313	2007-1		1		- 1,18489
2008-2 BCC	1,806255	0,55363	2005-2	2007-1	0,23312	0,76687	- 1,61482
2008-1 CCR	1,592483	0,62795	2005-2	2007-1	0,45931	0,92904	-
2008-2 CCR	2,658740	0,37611	2005-2	2007-1	0,89512	0,63241	-

Las mejoras potenciales de cada DMU, son las que las empresas deberían realizar en forma competitiva para obtener un mejor posicionamiento en el mercado que comparten.

En la siguiente tabla se muestran las mejoras determinadas por los métodos BCC y CCR, que deben realizar las dos empresas para salvar las ineficiencias detectadas.

DMU	Inputs/Output	Valor	Valor	Mejoras Potenciales		
DMU		Observado	Objetivo	M. Radial	M. Holgura	%
2008-1	(I)Act Cte	1.085	1085,00	-	-	-
BCC	(I) Bs uso	418	409,00	-	-9,00	-2,15
	(O) Rtdos T.	301	357	56	-	18,60
2008-1	(I)Act Cte	1085	1085	-	-	-
CCR	(I) Bs uso	418	418	-	-	-
	(O) Rtdo T.	301	479,34	178,34	-	59,24
2008-2	(I)Act Cte	1574,00	788,79	-	-785,21	-49,89
BCC	(I) Bs uso	333,00	333,00	-	-	-
	(O) Rtdo T.	193,00	348,61	155,61	-	80,63
2008-2	(I) Act. Cte	1241	1241	-	-	-
CCR	(I) Bs. Uso	333	333	-	-	-
	(O) Rtdos T.	193	513,14	320,14	-	165,88

Cuadro 8

Para el método BCC con las DMU 2008-1 y 2008-2 observamos que la DMU 2008-1 tiene que realizar mejoras en el output (18,60%) derivadas del incremento radial para una mejora competitiva y alcanzar su propio potencial y adicionalmente, debe reducir el consumo del input Bienes de Uso (2,15%).

La DMU 2008-2, además de realizar mejoras (80,63%) en el output derivadas del incremento radial (155,61), también debe modificar el consumo del input Activo Corriente (-49,89%) por presentar una excedencia en la utilización de este recurso.

Para el método CCR con las DMU 2008-1 y 2008-2 observamos que la DMU 2008-1 tiene que realizar mejoras solo en el output (59,24%) mientras que la DMU 2008-2 debe incrementarlo en un valor mucho mayor (165,88%).

4. DESARROLLO DE UN APLICATIVO

La cantidad de problemas de programación lineal que se deben plantear y resolver en esta metodología, la necesidad de rápidas respuestas, la posibilidad de implementar nuevos modelos matemáticos, tornan imprescindible la utilización de programas informáticos específicos para su resolución.

Si bien existen en el mercado varios productos, tanto en versiones comerciales como de libre uso, no encontramos en la bibliografía ni con buscadores en Internet ningún desarrollo que sea abierto, con el código fuente disponible, de manera tal que se pueda no solo conocer el algoritmo de resolución sino también poder incorporar rutinas o procedimientos conforme se desarrollan o investigan nuevos modelos sobre el DEA.

Esto motivó la decisión de realizar un desarrollo tendiente a disponer de un programa que nos permita resolver en principio los modelos básicos, contrastar los resultados obtenidos con los otros productos utilizados y permitirnos incorporar progresivamente nuevos modelos.

Se eligió como plataforma de trabajo al Sistema operativo Windows (XP o superior) y en él a la planilla Excel (versiones 2007 o superior), por considerar que están ampliamente difundidos (sistema operativo y planilla electrónica), la planilla brinda un entorno de carga de datos amigable, dispone de un muy completo lenguaje de desarrollo (VBA-Excel) y tiene capacidades gráficas adecuadas para este proceso.

Se trabajó entonces en el diseño de la Interfase, la forma de carga, la rutina de programación lineal, los procedimientos para los modelos DEA a implementar y las salidas numéricas necesarias.

Por brevedad no se mencionará en este trabajo cuál fue el proceso de evolución de este desarrollo, sino el estado actual del mismo.

El programa se carga como un complemento de Excel (archivo .xlam que se corresponde con las versiones 2007 / 2010). Esto permite disponer del programa independientemente de la hoja de carga de datos. Agrega una nueva ficha en la cinta de opciones que disponen estas versiones de Excel como menús.

La carga de datos se realiza en la hoja de trabajo y luego, ejecutando el programa, un formulario pide se definan cuestiones como: lenguaje de los mensajes (español o inglés), etiquetas de las DMU, etiquetas de los inputs, etiquetas de los outputs, matriz de los inputs, matriz de los outputs, modelo a resolver (orientación, tipo, frontera, etc.).

Respecto a la rutina de programación lineal, la última implementación utiliza la librería dinámica*lpsolve*(se la puede encontrar en http://lpsolve.sourceforge.net/5.5/, siendo la versión al momento de este desarrollo la 5.5.2.0). La misma cuenta con muy buena documentación y resultó ser eficiente, superando las limitaciones que tiene el complemento Solver con que viene el Excel (existe una versión comercial de este complemento que también superaría esas limitaciones). Esta rutina fue desarrollada por Michel Berkelaar, Kjell Eikland y Peter Notebaert y se encuentra disponible bajo licencia GNU LGPL (Lesser General Public Licence).

En cuanto a los modelos implementados actualmente se dispone de:

Orientación:	a los Inputs	a los Outputs		
Modelos:	Multiplicativo	Envolvente		
Fronteras:	CCR(constante a escala)	VCR (variable a escala)		
Súper eficiencia:	No	Si		

Las salidas son totalmente numéricas y se realizan en nuevas hojas del libro de trabajo, conforme los modelos solicitados.

5. CONCLUSIONES

Analizadas las DMU 2008 de la Empresa 1 y 2 se determinó:

- Los niveles de ineficiencias relativas para los inputs y outputs considerados en las dos empresas analizadas.
- Las mejoras, tanto prácticas como competitivas a llevar a cabo para lograr la eficiencia de las unidades de decisión.
- En la confrontación de ambas empresas se observaron los niveles de competitividad, siendo en la Empresa 2 mayor el rendimiento decreciente a escala, lo que indica que, para las variables consideradas, y en esos años, esta DMU es menos competitiva que la Empresa 1.

• Las dos empresas tienen ineficiencia de escala debido al manejo incorrecto de los recursos trabajados, valor arrojado por el método BCC y condiciones de desventaja en el nivel de producción de las unidades, ineficiencia determinada por el método CCR.

Este trabajo fue puesto a consideración de los responsables de la gestión de administración de las dos empresas con el objeto de verificar la consistencia del modelo y su pertinencia con el objetivo buscado. Así pudo establecerse que el modelo desarrollado es el que mejor reflejó el grado de eficiencia de dichas empresas en el período considerado en el contexto de la industria de la construcción chaqueña.

Por lo expresado en el inicio, los resultados obtenidos deberán ser considerados por las Empresas analizadas para replantear sus gestiones de administración y buscar las estrategias que corrijan las ineficiencias detectadas, para que, en un permanente feedback, puedan optimizar todos los aspectos de sus procesos productivos.

El equipo de investigación de los mencionados proyectos, autores de este trabajo, sugieren la aplicación del modelo matemático DEA como herramienta para la gestión de planificación, organización, dirección y control del planeamiento estratégico del nivel jerárquico superior de las empresas constructoras de Resistencia, Chaco, opinando que el mismo alcanza ribetes no sólo de indispensable sino que también indica una conjunción de ciencias exactas y de administración, de creatividad y arte para desenvolverse en un mundo altamente complejo para las organizaciones productivas.

Asimismo la disponibilidad de una herramienta propia nos permite la incorporación de nuevos modelos, los que posibilitarían representar realidades con otros comportamientos.

6. BIBLIOGRAFÍA

- -Charnes, A.; Cooper, W.W. y Rhodes, E. (1978) "Measuring the efficiency of decision making units". European Journal of Operational Research, Vol. 2, No 6, pp. 429-444.
- -Charnes, A.; Cooper, W.W. Y Rhodes, E. (1981) "Evaluating program and managerial efficiency: "An application of dea to program follow through". Management Science, Vol. 27, N° 6, pp. 668-697.
- -Charnes, A.; Cooper, W.W.; Golany, L. Seiford, L. and Stutz, J. (1985) "Foundations of data envelopment analysis for Pareto-Koopmans efficient empirical production functions". Journal of Econometrics, N° 30, pp. 91-107.
- -Cooper, William W.; Seiford, Lawrence M. y Zhu, Joe. (2004). "Handbook on Data Envelopment Analysis". USA. Kluwer Academic Publisher."
- -Cooper, William W.; Seiford, Lawrence M. y Tone, K. (2007). "Data envelopment analysis a Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software Second Edition". USA. Editorial: Springer ISBN-13: 978-0387-45281-4
- -Rescala, C.; Devincenzi, G.; Rohde, G.; Bonaffini, M.L.; Bernaola, G.; Giraudo, M. y Martínez, H. (2009). ¿Qué modelo matemático elegir para el benchmarking de las empresas constructoras de la Provincia del Chaco?. Revista del Instituto de Matemática, 5 (10), 09-14. Facultad de Ingeniería. UNNE. ISSN 1850-9827.
- -Rescala, C.; Devincenzi, G.; Rohde, G.; Bonaffini, M.L.; Bernaola, G.; Giraudo, M. y Martínez, H. (2010). Utilización de un modelo matemático para la determinación de factores de eficiencia en una empresa constructora de la ciudad de Resistencia. Revista del Instituto de Matemática, 6 (12), 89-98. Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional del Nordeste. ISSN 1850-9827.

FRACTALES EN ARQUITECTURA.

Rufino Iturriaga¹

Carina Jovanovich²

Palabras clave: FRACTALES – ARQUITECTURA.

RESUMEN

Presente desde hace más de veintitrés siglos, la geometría clásica de Euclides de Alejandría ha servido a cada construcción y a cada proyecto de la arquitectura y sigue haciéndolo.

La capacidad del hombre de pulir sus trabajos y sus ideas le ha permitido, en la segunda parte del siglo XX, el desarrollo de la geometría fractal, caracterizada por la irregularidad en las magnitudes, descripta por algoritmos recursivos y utilizados por arquitectos de todo el mundo en sus propuestas y creaciones.

Se pretende desde este trabajo, mostrar las posibilidades de conexión entre la geometría fractal y el diseño arquitectónico de una manera informativa, sin profundizar en los desarrollos y detalles matemáticos del tema, más allá de los puntos esenciales necesarios para su entendimiento y correcta interpretación.

INTRODUCCIÓN.

Hacia finales del s.XIX el parlamento inglés necesitó redefinir sus fronteras. En el debate un Lord preguntó en voz alta cuál era la longitud de la costa de Gran Bretaña; como la pregunta no obtuvo respuesta, se encargó a un joven cartógrafo una la gran empresa de medir toda la costa.

El joven cartógrafo empezó la medición. Utilizó una cinta de 50 metros de largo y tardó 10 años en medir la costa y realizar el informe para la cámara. Su veredicto fue tajante: "La costa tiene 2000Km de longitud". Los parlamentarios satisfechos tomaron nota, pero uno preguntó sobre la técnica que había utilizado para medir. El ya no tan joven cartógrafo expuso la técnica que aplicó a la medición. Casi escandalizado, el Lord dijo: "una medición de 50 metros no tiene en cuenta las posibles entrantes y salientes del mar. Debe de medirse con una regla de 10 metros."

El cartógrafo, resignado, emprendió su segundo viaje por la costa de la isla midiendo cada 10 metros. Invirtió otros 10 años y midió los acantilados y las playas del país. De nuevo en el parlamento, habló sobre los resultados de su medición: "La costa mide 2800Km". Todos se sorprendieron por la diferencia entre esa medición y la anterior, se tomó buena nota y se propuso pasar al siguiente punto. Satisfecho por el trabajo realizado, el cartógrafo se disponía a marcharse cuando alguien en la sala objetó lo siguiente: "una regla de 10 metros es demasiado larga para medir la costa, existen rocas y pequeños salientes que no se han tomado en cuenta, debe ser medida con una regla de 1 metro."

¹ Ing. Rufino Iturriaga - UNNE, Avenida Las Heras 727, Resistencia, Chaco-rufinoit@yahoo.com.ar

² Esp. Lic. Ethel Carina Jovanovich -UNNE, Avenida Las Heras 727, Resistencia, Chaco - UTN-FRRe, French 414, Resistencia, Chaco, carijovanovich@yahoo.com.ar

Por tercera vez, el cartógrafo se dispuso a medir la costa que tan bien conocía y durante 10 años y algunos achaques en la espalda, midió cada metro, cada roca y cada saliente de costa. En la exposición de sus conclusiones ante el parlamento inglés mostró la nueva medición, 3600Km.

Es así pues, el pobre cartógrafo estaba condenado para toda la eternidad a medir la costa de su país utilizando cada vez unidades más pequeñas y sin encontrar dos medidas iguales.

Esta se puede considerar una de las bases de los fractales. En el capítulo 5 de su obra "La Geometría Fractal de la naturaleza", el matemático Benoit Mandelbrot³ trata detalladamente el ejemplo de la costa de Gran Bretaña⁴.

DESARROLLO.

El término fractal es un vocablo derivado del latín, *fractus*, que significa quebrado o fracturado y se lo utiliza para designar a objetos semigeométricos cuya estructura básica se repite a diferentes escalas.

No es sencillo encontrar una definición rigurosa para los fractales, de hecho no existe aún una definición universalmente aceptada por el mundo matemático. Los mencionados objetos presentan dos propiedades ineludibles a considerar, en el intento de una definición: la autosimilitud y la dimensión extraña.

El término autosimilitud, que también puede ser entendido como autosemejanza, está relacionado a la propiedad de un objeto de presentar en sus partes la misma forma o estructura que el todo, aunque pueden presentarse a diferentes escalas y pueden estar deformadas ligeramente. Algunos autores mencionan la existencia de tres tipos diferentes de autosimilitud:

- Autosimilitud exacta: es el tipo más restrictivo y exige que el fractal parezca idéntico a diferentes escalas (sistemas de funciones iteradas). Ej: conjunto de Cantor, triángulo de Sierpinski, copo de nieve de Von Koch y otros.
- Cuasiautosimilitud: exige que el fractal parezca aproximadamente idéntico a diferentes escalas (fractales definidos por relaciones de recurrencia). Ej: conjunto de Julia, conjunto de Mandelbrot y otros.
- Autosimilitud estadística: es el tipo más débil y exige que el fractal tenga medidas numéricas o estadísticas que se preserven con el cambio de escala (fractales aleatorios). Ej: el vuelo de Levy, paisajes fractales, árboles brownianos y otros.

Considérese en primer término un triángulo equilátero que no contenga "huecos" en su interior; entiéndase como tal un triángulo "lleno" (Fig 1). Cada uno de los lados del

³ BENOIT B. MANDELBROT nació en 1924 en Varsovia, Polonia, en el seno de una familia judía que emigró a París en 1936. Su tío Szolem Mandelbrot, reconocido profesor de Matemática en el Colegio de Francia, se ocupó de su educación y fue el mismo quien en 1945 le recomendó que leyera la tesis de doctorado que Gaston Julia (1883-1978) había publicado en 1918 sobre iteración de funciones racionales. En 1977, durante su trabajo en el Laboratorio de IBM de Yorktown Heigths, New York, Mandelbrot pudo demostrar como el trabajo de Julia constituye la fuente de los fractales más hermosos conocidos hasta el momento. En 1982 publicó su libro *Fractal Geometry of Nature*, en el que explicaba sus investigaciones en este campo. En 1985 recibió el premio "*Barnard Medal for Meritorious Service to Science*". En los años siguientes recibió la "*Franklin Medal*". En 1987 fue galardonado con el premio "*Alexander von Humboldt*"; también recibió la "*Medalla Steindal*" en 1988 y muchos otros premios, incluyendo la "Medalla Nevada" en 1991. Fue profesor en la Universidad de Harvard, Yale, el Colegio Albert Einstein de Medicina y otros. Falleció en octubre de 2010 en Cambridge, Massachusetts, Estados Unidos.

⁴ Estas ideas fueron expuestas originalmente en su trabajo "How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension", Science: 156, 1967, 636-638

triángulo tiene su punto medio; si los mismos son unidos por medio de segmentos, se notará que dentro del triángulo inicial quedan formados cuatro triángulos más pequeños, de los cuales se eliminará el del medio (el que está invertido respecto de los otros).

Si en cada uno de los tres triángulos llenos que han resultado del proceso descripto, se repite el procedimiento, se notará que resultan nueve triángulos más pequeños.

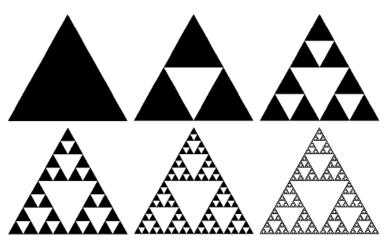


Fig.1 - El triángulo de Sierpinski. Secuencia de generación. Imagen: http://batchdrake.wordpress.com

Realizando una nueva iteración, el número de triángulos llenos llega a veintisiete y se puede seguir procediendo de la misma manera, obteniendo como resultado número creciente de triángulos cada vez más pequeños. Nótese además que, por cada iteración que se efectúe aparecen diferentes tamaños en los triángulos vacíos. Está claro que el proceso es infinito, sin embargo a partir de las iteraciones de orden cuatro o cinco se puede

tener una idea de cómo será la figura límite. Si se continúa iterando será difícil distinguir las diferencias a simple vista entre un paso y el siguiente.

Si se observa con detenimiento, se pueden apreciar en el dibujo muchísimas copias de sí mismo en el interior y por ello se puede afirmar que se encuentra formado por muchas copias de sí mismo, las cuales se encuentran reducidas y cambiadas de posición. Esto es lo que se llama autosimilitud, que es la primera de las propiedades que se ha mencionado. Es posible afirmar que se trata de una noción muy sencilla e intuitiva, pues seguramente todas las personas en algún momento la han percibido en diferentes contextos naturales, como ser nubes, olas, vegetales, etc.

El triángulo estudiado se conoce con el nombre de triángulo de Sierpinski⁵. De manera similar se pueden estudiar otros fractales muy conocidos, el pentágono de Dürer, la alfombra de Sierpinski, el copo de nieve de Von Koch y muchos más, en todos ellos se percibe en mayor o menor grado que el todo es igual a sus partes, salvo un factor de escala.

Desde los primeros años de educación matemática se aprende que un punto tiene dimensión 0, que una línea tiene dimensión 1, que las figuras planas tienen dimensión 2 y que las espaciales tienen dimensión 3. Estas dimensiones que corresponden a números enteros y son invariantes ante homeomorfismos, son conocidos con el nombre de dimensión topológica y refiere precisamente al concepto habitual de dimensión que se tiene incorporado.

Recuérdese que, si x e y son espacios topológicos y f una función de x a y, f es un homeomorfismo si se cumple que:

⁵ Waclaw Sierpinski (1882id – 1969): matemático polonés nacido en Varsovia. Fue uno de los fundadores de la escuela matemática moderna polaca y contribuyó al progreso de la teoría de conjuntos y de la topología; favoreció la consolidación de los fundamentos lógicos de la matemática. Uno de los cráteres de la Luna lleva su nombre.

- f es una biyección.
- f es continua.
- la inversa de f es continua.

La dimensión topológica no es la única que existe. Tomando un cuadrado, el mismo puede ser dividido en cuatro cuadrados congruentes y decir que el factor de ampliación es 2, o de manera similar, si se descompone en nueve triángulos congruentes al cuadrado inicial, se dice que el factor de ampliación es 3. Como generalidad se puede expresar que el cuadrado se puede descomponer en n² copias de sí mismo. Si se hace un razonamiento análogo a partir de un cubo, el mismo se puede descomponer en n³ partes iguales.

De manera que se puede generalizar en la fórmula: $n^D = N$

n: factor de ampliación.

N: el número de copias.

D: dimensión.

Si se aplican propiedades de logaritmos, se obtendrá: $D = \frac{\ln N}{\ln n}$

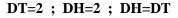
en la cual, claramente:

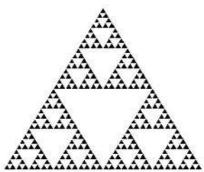
N: número de copias semejantes a la figura original.

n: factor de ampliación que se debe aplicar para obtener la figura original.

La cual se conoce como dimensión fractal y que corresponde a una simplificación del concepto de dimensión que utilizó Haussdorf⁶.







DT=1; $DH\sim2$; DH>DT

Fig.2 – Comparación de dimensiones. http://www.dma.fi.upm.es/sonia/practicas/clasics-I/sierpinski.html

La definición de Mandelbrot: "un fractal es un conjunto cuya dimensión de Hausdorff es estrictamente mayor que su dimensión topológica" es ampliamente aceptada, sin embargo el mismo autor señaló que no resulta una definición lo

_

⁶ Felix Hausdorff (1868-1942): matemático de origen judío, profesor en Universidad de Bonn y uno de los responsables de la fundación de la topología moderna, célebre por su trabajo en el análisis funcional y la teoría de los conjuntos. En 1918 introdujo la dimensión de Hausdorff que se utiliza para medir las dimensiones fraccionarias de los conjuntos fractales. En 1942, a punto de ser enviado a un campo de concentración nazi, se suicidó junto a su esposa. El día anterior, Hausdorff escribió a un amigo: "Perdónanos. Te deseamos a ti y a todos nuestros amigos mejores tiempos" Muchos de los enfoques utilizados para calcular la dimensión de Hausdorff en relación con conjuntos complicados, fueron formulados por el matemático ruso Abram Besicovitch (1891-1970), por lo cual a veces se utiliza el término "dimensión de Hausdorff-Besicovitch."

suficientemente general. Es que la misma presenta el inconveniente de excluir conjuntos que claramente debieran ser reconocidos como fractales. (Fig 2)

Como generalidad se acuerda en no definir un fractal, aunque es posible enumerar sus propiedades características:

- Los fractales son demasiado irregulares para ser descriptos con la geometría tradicional de Euclides.
- Los fractales tienen una cierta forma de auto-semejanza, quizás aproximada o estadística.
 - Por lo general, la dimensión fractal es mayor que la dimensión topológica.
- En muchos casos, el fractal se define en forma muy simple, por lo general, recursiva.

Desde su nacimiento las aplicaciones de los fractales han crecido exponencialmente y se expandió a diferentes ramas de las artes y las ciencias, hay teorías basadas en fractales que regulan el enorme tráfico de las comunicaciones, comprimen las señales de audio y vídeo, explican el crecimiento de determinados tejidos biológicos, analizan el comportamiento de las ondas sísmicas, los movimientos bursátiles y de mercado y más. Son ampliamente conocidas las pinturas de fractales e incluso hay música surgida de ellos.

Todos los fractales tienen algo en común, ya que todos son el producto de la iteración, repetición, de un proceso geométrico elemental que da lugar a una estructura final de una complicación aparente extraordinaria (Fig 3). La utilización de los algoritmos como herramienta de diseño, brinda los beneficios de la profundidad y amplitud y permiten abordar los procesos con una escala y complejidad, que pueden generar permutaciones infinitas, que serían inviables a través de un enfoque manual. Sus proyectos tratan de explorar los algoritmos y la computación como una herramienta de

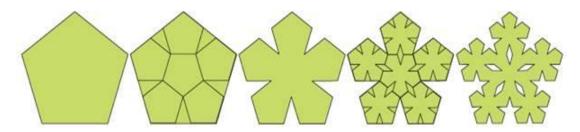


Fig 3 - El pentágono de Dürer. Fractal definido por un sistema de funciones iteradas. Imagen: http://personales.unican.es/alvareze/estalmat

diseño generativo, combinados a los actuales procesos de diseño produciendo una nueva e inusual forma arquitectónica, que nos atreveremos a denominar "Arquitectura Fractal".

La esponja de Menger o cubo de Menger (Fig. 4), fue descripta por primera vez por el matemático austríaco Karl Menger⁷, en el año 1926. Para efectuar la construcción del mismo, se parte desde un cubo lleno y se los divide en 27 cubos idénticos, que resultarán más pequeños lógicamente; luego se quitan el cubo central y los seis que

⁷ KARL MENGER (Viena, Austria, 1902 – Chicago, EE.UU. 1985). Se doctoró en Matemática en la Universidad de Viena y debido a sus fuertes intereses en aspectos filosóficos, se unió al llamado círculo de Viena, integrado por filósofos lógico-empiristas. Su contribución matemática más popular es la esponja que lleva su nombre.

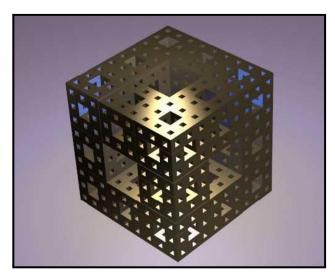


Fig. 4 – La esponja de Menger. Imagen: http://www.ceticismoaberto.com/ciencia/ 2139/fractais-uma-nova-viso-da-natureza

comparten caras con él, de manera que quedan 20 cubos. Por cada iteración que del proceso mencionado el número de cubos aumentará en 20ⁿ, de manera que rápidamente se llegará a un número muy alto.

La forma este fractal hace pensar sin duda en el cubo mágico. La esponja de Menger muestra propiedades geométricas de gran interés, a medida que se aumentan las iteraciones la superficie aumenta hasta tender al infinito, al mismo tiempo que encierra un volumen que tiende a cero. Presenta una dimensión fractal entre un plano y un sólido de 2,73.

Dentro de la arquitectura, el cubo de Menger deja vislumbrar las relaciones llenovacío, de aplicación a la parte estructural y a los espacios como se puede notar en el proyecto que se muestra en la figura, que corresponde a una de las propuestas finalistas para el Centro de Artes Escénicos de Taipei (China)⁸, la cual logró una mención especial aunque finalmente no fue la seleccionada para la construcción (Fig 5).



Fig. 5 – Centro de Artes Escénicos Taipei (China) Imagen: http://www.plataformaarquitectura.cl/2009/03/05

_

⁸ El principal requisito en el concurso del "Centro de Artes Escénicos" consistía en el diseño de un centro capaz de acoger exposiciones estándares y también eventos internacionales; además era el primer paso para impulsar a Taipei como la ciudad "Capital de las Artes". Participaron los estudios más importantes del mundo: OMA, Zaha Hadid, Morphosis, NL Architects, SURV Associates, Jacob+Mc Farlane, MVRDV y otros.

La obra, de la que se muestran figuras, fue presentada por el estudio NL Architects a través de sus responsables Pieter Bannenberg, Walter van Dijk y Kamiel Klaasse que se basa en un espacio combinado de escala urbana, que busca lograr un espacio verdaderamente público, definido por el mismo, para lo cual se apuesta a la perforación del interior del mismo originando una estructura permeable para los peatones. El edificio logra una identidad; la plaza interior es un espacio abierto que permite el fluir de la vida urbana en todas las direcciones a través del mismo, parcialmente protegido de los agentes meteorológicos.

El bloque, de amplias medidas, se puede considerar una mesa de cuatro patas en la cual, los tres principales elementos programáticos están situados a diferentes alturas. El espacio Proscenium Playhouse se ubica en la parte más ancha del edificio, sobre el hall principal. El Multiform Theatre se encuentra encima del anterior, mientas que el Grand Theatre está suspendido bajo la estructura horizontal principal, flotando sobre la gran plaza abierta.

Cualquier objetivo dentro del edificio se puede alcanzar mediante el uso de varios caminos alternativos, los cuales resultan interesantes para inducir al encuentro y la interacción social, contando con instalaciones de bares, pasillos, restaurantes, salas de música y otras.

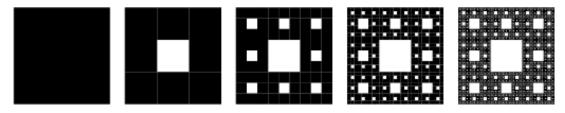


Fig 6 - Alfombra de Sierpinski hasta el cuarto orden de iteración. Imagen: http://personal.telefonica.terra.es/web/mundofractal.html

En cada una de las caras del cubo de Menger quedará formada la alfombra de Sierpinsky (Fig 6), la cual se puede apreciar en la figura en sus primeros órdenes de iteración. Siguiendo la relación con la esponja de Menger se puede establecer que la alfombra tendrá una superficie que tiende a cero cuando se incrementen las iteraciones y una longitud que tiende a infinito. La misma resulta útil para el tratamiento de relaciones lleno-vacío dentro de la estructura general de las ciudades, morfologías básicas, patios de parcela y manzana, circulaciones interiores y aperturas de fachada o estructuras de máxima envergadura y mínimo peso, característico de las formas arquitectónicas y urbanas.

El concepto de fractal, arquitectónicamente, puede apreciarse en estilos como el gótico, donde el arco apuntado era el elemento determinante; son ejemplos, las catedrales góticas, las cuales aún se conservan, como las de Reims, Colonia, Amiens y otras. En el Castillo del Monte, contemporáneo con las catedrales, manifiesta un estilo fractal basado en octógonos. También se puede establecer un paralelismo entre la empaquetadura de Sierpinski y la muy famosa Torre Eiffel, construida muchos siglos a posteriori que castillos y catedrales góticas.

Existen en la arquitectura otras aplicaciones de fractales. Serapio Nono, arquitecto de prestigio y amante de las matemáticas, diseñó una amplia urbanización de viviendas siguiendo la curva de Hilbert. La geometría fractal tiene una afinidad particular con el urbanismo, estableciendo una relación entre los enfoques, analítico y propositivo, de

una manera atractiva y sugerente. Las ciudades, en sus diferentes tamaños, presentan una clara autosimilitud a diferentes escalas, barrios, manzanas, casas, la cual primero fue advertida de forma intuitiva y de una manera teórica y más profunda después. Las similitudes formales entre los tejidos urbanos primitivos de regiones áridas (Sahara y Etiopía) y el suelo craquelado o entre un circuito impreso y un centro comercial, revelan

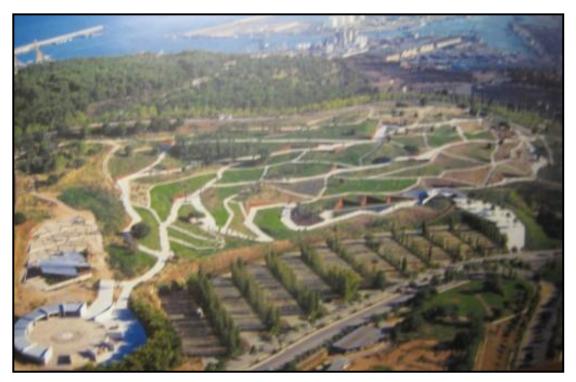


Fig. 7 – Jardín Botánico de Barcelona Foto: http://gutierrezcabrero.dpa-etsam.com/

que la comparación formal entre organismos y artefactos, a distintas escalas, es autosimilar en el orden formal.

El árbol binario de Pitágoras en su forma equilibrada, permite pensar en la distribución de espacios que se van separando a partir de una clasificación de temas o subtemas. La Cruz de Von Koch y el copo de nieve de Von Koch en sus primeros órdenes de iteración pueden aplicarse en el diseño primario de plantas de edificaciones para sistemas carcelarios y también para galerías artísticas.

El Jardín Botánico de Barcelona (Fig 7) asume la división fractal de la naturaleza misma, siendo el ejemplo más famoso que existe del rubro. Para su construcción el equipo de arquitectos ha tenido en cuenta dos consideraciones fundamentales: está relacionada con la estructuración de la vegetación, pues se debían proyectar las plantaciones siguiendo una ordenación geográfica, de manera que las plantas quedaran agrupadas según las cinco regiones mediterráneas existentes en el mundo, y dentro de estas zonas, se agruparan por afinidades ecológicas, es decir, representando los paisajes naturales. En segundo lugar, se hacía necesario que el proyecto permitiera a la misma montaña ofrecer las condiciones topográficas tanto para los espacios de plantaciones como para el diseño de la red de caminos, aprovechando el relieve natural y de este modo evitar grandes movimientos de tierras.

Como resultado de estas dos premisas, se optó por adaptar una malla triangular sobre el terreno, que descansaría sobre el basamento topográfico de la montaña y a su

vez delimitar los 71 espacios necesarios para poder representar las principales familias vegetales de las regiones del mundo con clima mediterráneo. La estrategia espacial utilizada para estructurar las colecciones del jardín es una red de triangulación, inspirada en Topografías Técnicas.

La geometría fractal del plan de triangulación se reinterpreta en la escala más pequeña, en la forma de zigzag, en el diseño de las facetas del sistema de ruta, en la acera, que se divide en pequeñas formas trapezoidales y en los "rotos" de los volúmenes del edificio de entrada.

En toda la superficie del jardín se establece el fuerte contraste y la tensión dinámica entre la formalidad y la materialidad de los caminos y las paredes y en la evolución de las plantaciones, salvajes y aparentemente anárquicas. Se tienen diferentes escalas de percepción:

- A escala de ciudad, pues proporciona puntos de vista abiertos sobre el Skyline de Barcelona.
- A escala del proyecto, marcada por puntos de vista general de los lugares estratégicos del jardín. A escala imaginativa, cuando se observan los diferentes phytoepisodes y la mente se traslada a Australia o los paisajes de Sudáfrica, al encontrar especies de estas lejanas zonas del mundo con clima mediterráneo.
- A escala íntima, cuando el lugar permite abstraerse del mundo exterior y perderse en la contemplación de una floración o transportarse por la percepción de un aroma.

CONCLUSIONES.

En el avance que presenta desde su reciente aparición (con ese nombre), la geometría fractal encuentra aplicaciones en el diseño arquitectónico desde el punto de vista de las formas surgidas de los diferentes conjuntos y los alcances de cada uno (volúmenes, plantas, distribuciones, etc.) muchas de las cuales se encuentran ya plasmadas en obras dispersas por todo el mundo y otras, que aparecen como nuevas propuestas, manifestando una tendencia en expansión cuyo crecimiento se vislumbra a diferentes escalas, aprovechando los actuales recursos técnicos que permiten los cálculos de estructuras que acompañen al diseño.

Los avances tecnológicos, popularizados en la más reciente década, han posibilitado a la arquitectura contemporánea tomar un camino de tendencia (observable claramente aún dentro de la libertad conceptual asumida y desplegada por los arquitectos actuales) en el que los proyectos se basan en modelos, funciones matemáticas y estructuras fractales, fortaleciendo los vínculos entre las disciplinas y abordando complejidades que no se habían registrado en otras épocas.

La aplicación del concepto fractal en disciplinas como arquitectura y urbanismo abarca diferentes épocas de la humanidad, desde las edificaciones medievales (y aún anteriores) hasta el reciente y cercano Centro Cívico del Bicentenario emplazado en la ciudad de Córdoba, poniendo de manifiesto la convivencia del arte con los fractales y el vínculo directo entre los mismos.

BIBLIOGRAFÍA

- Mandelbrot, Benoit (2003). *La Geometría Fractal de la Naturaleza*. Barcelona (España). Editorial Tusquets.
- Mandelbrot, Benoit (2006). Los Objetos Fractales. Forma, Azar y Dimensión. Barcelona (España). Editorial Tusquets.
- Spinadel, Vera W de Perera, Jorge G. Perera, Jorge H. (2007). *Geometría Fractal*. Buenos Aires. Ed. Nueva Librería.
- Sabogal, Sonia Arenas, Gilberto (2008). *Una Introducción a la Geometría Fractal*. Bucaramanga (Colombia). Universidad Industrial de Santander.
- http://fractovia.org/es
- http://www.freakarq.es/esponja-menger-taipei-nl/
- http://daac-arquitectos.com
- http://www.dmae.upm.es/cursofractales
- http://www.ceticismoaberto.com/ciencia/2139/fractais-uma-nova-viso-da-natureza

SOBRE EL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

CERUTTI, Rubén Alejandro^{1,2}. ROMERO, Luis Guillermo¹. VILLALBA CANTERO, Luis Fernando². LUQUE, Luciano Leonardo¹. DORREGO, Gustavo Abel^{1,2}

¹Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura. Universidad Nacional del Nordeste. Av. Libertad 5600. (3400) Corrientes. Argentina. ²Facultad de Humanidades. Universidad Nacional de Formosa. Av. Gutnisky 3200. (3600) Formosa. Argentina.

Resumen

En este breve trabajo de divulgación se presentara el muy conocido concepto de límite de una función en diferentes contextos. Después de una corta exposición histórica del concepto desde la idea intuitiva de los griegos hasta su formalización en la época de la algebrización del Análisis se abordara el límite de una función real de una variable real para luego continuar con el límite de una función real de varias variables reales. También se presentara el límite de una función en un espacio métrico y por ultimo, para finalizar este trabajo, se presentara el concepto en espacios topológicos. Íntimamente vinculado con el concepto de limite de una función esta el de continuidad. También será estudiado y se presentaran resultados clásicos.

Palabras Clave: Espacios métricos y topológicos. Límite funcional. Continuidad.

I. CONSIDERACIONES HISTORICAS

Nada mejor que un clásico para comenzar. "La definición (ε, δ) de limite es el resultado de mas de un siglo de aciertos y errores, encerrando en unas pocas palabras los persistentes esfuerzos para colocar este concepto sobre una sana base matemática. Los conceptos fundamentales del Calculo, la derivada y la integral, pueden definirse únicamente mediante pasos al limite." Expresan Courant y Robints en su muy conocido libro Que es la Matemática. Y continúan diciendo "Una dificultad, al parecer insuperable, cerro durante mucho tiempo el camino a la comprensión clara y las definiciones precisas de estas cuestiones."

Comencemos analizando un problema físico que podría ayudar a comprender mejor las dificultades en torno a la definición de este concepto que es fundamental en el Calculo y cuya formalización, acaecida en el Siglo XIX, es posterior al concepto de derivadas o de diferenciales ya considerados en el Siglo XVII. Más aún podría decirse que el concepto de límite de una función surgió para dar una justificación rigurosa a toda la estructura del cálculo desarrollada de un modo cuasi empírico en el Siglo XVIII.

En sus principios el Cálculo fue una teoría sobre el cambio. Se estudiaban procesos en los cuales los móviles se movían con suavidad cambiando de posición en el espacio de un modo continuo e ininterrumpidamente. No había saltos bruscos ni huecos en el espacio. Uno de los ejemplos más sencillos de este tipo de movimiento continuo, suave y que no se detiene esta dado por el movimiento de los planetas.

El cambio de posición puede ser visto como cambio en la distancia y cambio en el tiempo. Tanto la distancia como el tiempo pueden ser representados por números. Luego puede tenerse además de una representación grafica, una descripción funcional en la cual la distancia es representada en función del tiempo.

Si la distancia y el tiempo son conocidos puede determinarse la velocidad ya que ella es la proporción o razón entre la distancia recorrida por un móvil y el tiempo empleado. Así podría tenerse entre los tiempos t_0 y t_1 y los espacios $f(t_0)$ y $f(t_1)$ la relación

$$\frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$$
 o bien

$$\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$$

Parece evidente que si se quiere saber la velocidad instantánea en el instante t_0 bastaría tomar el incremento del tiempo h igual a cero, de manera que el intervalo se reduzca al instante t_0 y aplicar la expresión anterior.

Pero en ese caso, al hacer h=0 se llega a una expresión carente de sentido pues se tiene cero /cero.

El Calculo o el Análisis Matemático comienza cuando se pregunta por la velocidad del móvil en un momento determinado, es decir su velocidad instantánea, su velocidad justo en ese momento, su velocidad ahora. Con un razonamiento análogo al expuesto en el párrafo anterior se llega nuevamente a cero/cero.

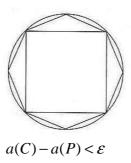
Sin embargo si se toman valores de h cada vez más pequeños, la velocidad media se aproxima cada vez más a un número, a una cantidad fija. Luego debe determinarse de modo univoco e indubitable esa cantidad fija a la que se aproxima la función, que en el caso considerado es el cociente $\Delta f/\Delta t$, aun cuando esa cantidad no se pueda calcular sustituyendo el punto en la función, por encontrarse una expresión carente de sentido en nuestro caso.

Esa cantidad es la que actualmente definimos como *limite* de una función cuando su variable tiende a un determinado valor usando la expresión formal en términos de ϵ y δ . Fácilmente puede observarse que en el Análisis Matemático se tratan procesos infinitos. Sin embargo ellos hicieron su aparición en la Matemática muchos siglos antes de que se formulara lo que conocemos como Calculo Diferencial e Integral, incluso antes de que las ideas físicas de movimiento tuvieran cabida en ella y aun antes de tener una definición precisa de función. Ideas intuitivas de lo que hoy denominamos paso al limite existieron en la mente de los matemáticos desde la antigüedad.

La matemática griega en el periodo de la escuela pitagórica era esencialmente una matemática discreta en el sentido de que las magnitudes usadas eran conmensurables, es decir siempre era posible representarlas por medio de números naturales o por medio de razones entre ellos. El ideal pitagórico era precisamente: "*Todas las cosas son número*". Esta matemática basada fundamentalmente en procesos finitos, se desarrolló dentro de una concepción del mundo que no admitía, en su marco referencial filosófico, procesos infinitos ni actuales ni potenciales.

Mas adelante con el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables y el intento de calcular longitudes de figuras curvilíneas, áreas y volúmenes se incorporaron procedimientos necesariamente infinitos. Para cualquiera de esos cálculos se requiere un proceso de aproximación potencialmente infinito, pues a pesar de obtenerse aproximaciones cada vez mas ajustadas, los resultados obtenidos siempre diferían de la cantidad buscada en otra, que se hacia mas pequeña cuando el numero de pasos del proceso aumentaba . Casi nunca podía obtenerse exactamente el valor buscado al cabo de un número finito de pasos.

Ejemplo de ese proceso lo da el cálculo del área de un círculo por aproximaciones sucesivas. Para ello se inscribían en él polígonos regulares, se aumentaba el numero de lados de modo que los polígonos, en el limite eshaustaran al circulo. Para no usar procesos explícitamente infinitos, los matemáticos griegos decían que la diferencia entre el área del circulo y las de los polígonos inscritos podía hacerse menor que cualquier magnitud prefijada.



Por otra parte la filosofía griega impregnada de concepciones atomisticas que les hacían pensar en los cuerpos geométricos como formados de *átomos* indivisibles, por definición, pero con dimensiones impidió que ideas como las que muchos siglos después exploraría Cavalieri en principio no prosperaran en su matemática.

En el Siglo XVII Fermat tanto en el cálculo de tangentes como en el calculo del área bajo una curva utilizo un razonamiento en el cual estaba subyacente el concepto de *limite*.

Estos diferentes métodos, que arrojaron resultados aceptablemente buenos en la aproximación y otros exactos, funcionaban como métodos separados unos de otros sin tener una teoría unificadora que los contuviera a todos. Para alumbrarse esa teoría faltaban transcurrir algunos siglos aún.

Retomando el ejemplo introductorio en el cual la velocidad instantánea se reduce al simple cálculo de una derivada, pues, a la luz de los conocimientos actuales, la velocidad instantánea no es más que la derivada del espacio respecto del tiempo en el instante dado. Pero no se conocido de esta manera en los trabajos de Newton. No

obstante eso Newton intuyo que detrás del concepto de fluxión introducido por el se hallaba el mas primitivo de limite, aunque solo lo señalo de manera rudimentaria. En su obra *Philosophiae Naturales Principia Mathematica* se encuentra en la Sección I del Libro I el siguiente Lema

Las cantidades y las razones de cantidades, que en cualquier tiempo finito tienden continuamente a la igualdad, y antes de terminar ese tiempo se aproximan una a otra mas que por ninguna diferencia dada, acaban haciéndose en última instancia iguales.

Con este Lema Newton buscaba justificar el concepto de *incrementos evanescentes* con el que pretendía evitar el uso de las cantidades infinitesimales en el desarrollo del concepto de fluxión. Fue consciente de la debilidad del concepto de cantidad infinitesimal concebido como un número infinitamente pequeño pero sin llegar a ser cero, para justificar su calculo. Así lo indicaba al escribir

Pero como la hipótesis de los indivisibles parece de alguna manera mas ruda ,...., he preferido reducir las demostraciones de las proposiciones. A las primeras y últimas razones de cantidades nacientes y evanescentes, es decir a los <u>límites</u> de esas razones.

Cuando habla de razones ultimas esta refiriéndose al límite como actualmente se entiende.

En el Siglo XVIII de la mano de D Alembert en la Encyclopedie y en un artículo titulado *Límite* se encuentra una definición formalmente imprecisa pero más sugestiva que la de Newton

A una cantidad se la llama limite de una segunda cantidad variable si la segunda puede aproximarse a la primera hasta diferir de ella en menos que cualquier cantidad dada, sin llegar nunca a coincidir con ella.

Esta imprecisión formal hizo que la definición fuera poco usada por sus contemporáneos.

En el primer cuarto del Siglo XIX se dio el impulso significativo que culmino con la definición precisa de la idea y del concepto de limite para formar el fundamento riguroso que el Calculo diferencial había estando necesitando durante siglo y medio. Fueron dos los matemáticos que contribuyeron aportando definiciones similares. Cronológicamente el primero de ellos fue el checo Bernhard Bolzano y luego el frances Auguste Cauchy. Bolzano precedió a Cauchy en la elaboración y en la publicación de sus trabajos pero su obra paso desapercibida en su tiempo por una sencilla razón geográfica. Bolzano estaba , escribió y publico sus trabajos en Praga y Cauchy lo hizo en Paris. Podría decirse que, esencialmente, ambos aritmetizaron la idea de D Alembert.

En su libro *Course d Analyse de l Ecole Politechnique*, editado en 1821, Cauchy en la pagina 4 definió

Cuando los sucesivos valores atribuidos a una variable aproximan indefinidamente a un valor fijo tanto que al final difieren de el tanto como uno desea, esta última cantidad es denominada el límite de todas las otras.

Esta definición le permitió dar una expresión rigurosa de cantidad infinitesimal

Cuando los sucesivos valores de una variable disminuyen indefinidamente, de tal forma que llegan a ser menores que cualquier cantidad dada, esa variable es lo que denominamos un infinitésimo. El límite de esa variable es cero.

Puede observarse que Cauchy considera los infinitésimos como variables en lugar de cantidades fijas.

Respecto de la notación, en la página 13 del Cours d' Analyse se encuentra

Cuando una cantidad variable converge hacia un límite fijo, es frecuentemente útil indicar ese límite por medio de una notación particular; es lo que nosotros hacemos, poniendo la abreviatura

lim.

delante de la cantidad variable.

Puede observarse que en esta notación no está indicada la variable ni tampoco la tendencia de la misma.

Finalmente fue Karl Weierstrass quien aporto la definición de límite tal y como hoy se conoce.

Weierstrass elimina los elementos imprecisos de la definición de Cauchy tales como "aproximan indefinidamente" y los sustituye por la clásica expresión algebraica epsilon y delta.

El límite de una función f(x) vale L cuando x tiende a x_0 si para cualquier cantidad positiva ε mayor que cero existe otra cantidad positiva δ mayor que cero de manera que para todo punto x verificando $o < |x - x_0| < \delta$ y donde la función este definida se tiene que $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Esta ultima definición, que en este trabajo presentamos escrita en notación actual, es una expresión desprovista de connotaciones físicas dinámicas, hace referencia solamente a la localización de la variable y de los correspondientes valores de la función en ella. Podría decirse usando lenguaje actual que Weierstrass y su discípulo Heine

utilizan ideas de proximidad de la variable x respecto del punto x_0 , es decir ideas métricas. Esto permitiría mas adelante estudiar el limite de una función en espacios métricos y posteriormente, con un grado diferente de abstracción en espacios dotados de una topología

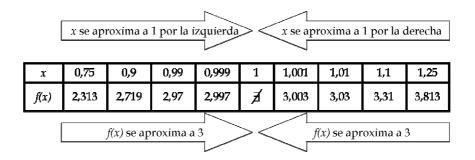
Frente a la definición usual de limite de una función real de una variable real que suele ser al menos sorprendente y a veces poco comprendida por quienes se enfrentan con ella debe tenerse en cuenta que, como sucede con otros conceptos matemáticos es el resultado de siglos de refinados pensamientos que permitieron arribar a ella.

II. Límite funcional en una variable real

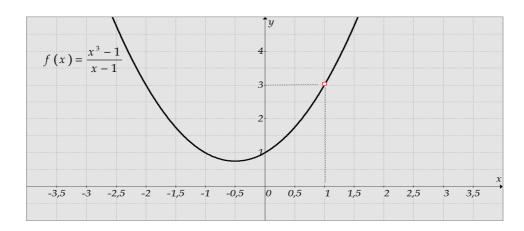
Noción de límites

Supongamos que se desee dibujar la gráfica de la función $f: R \to R$ dada por $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$, donde $Dmf = R - \{1\}$, o sea f no está definida en x = 1.

Para obtener una idea del comportamiento de la gráfica de f cerca de x = 1 se pueden usar dos conjuntos de valores de x, uno que se aproxime a 1 por la izquierda y otro que lo haga por la derecha como se muestra en la tabla.



y cuyo gráfico es:



Como se muestra en la figura, la gráfica de f es una parábola con un hueco en el punto (1;3). A pesar que x no puede ser igual a 1, se puede acercar tanto como se quiera a 1 y, en consecuencia, f(x) se acerca a 3 de la misma manera. Utilizando la notación que se emplea con los límites, se podría escribir $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$ y se lee "el

límite de f(x) cuando x tiende a 1 es 3".

Nótese que la función no está definida en x = 1 y aun así f(x) parece aproximarse a un límite a medida que x se aproxima a 1.

La existencia o inexistencia de f(a) no guarda relación con la existencia de límite de f(x) cuando x tiende a a.

Definición formal de límite

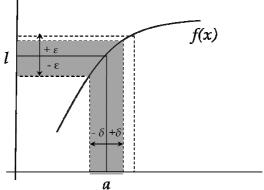
Examinando la noción de límite dada, si f(x) se acerca de manera arbitraria a un número l a medida que x tiende a a por cualquiera de sus lados, se dice que el límite de f(x) cuando x tiende a a es l, y se escribe: $\lim_{x \to a} f(x) = l$

Podríamos considerar a esta como una descripción muy técnica, sin embargo es aun informal porque no deja en claro a las frases "f(x) se acerca de manera arbitraria a un número l" y "x tiende a a".

La primera persona en asignar un significado matemático riguroso a estas dos frases fue Augustin-Louis Cauchy y puede expresarse en la siguiente

Definición: Sea $f: A \rightarrow R$ una función definida en A un subconjunto de R, y sea $a \in A$ un punto de acumulación de A. Se dice que $l \in R$ es el límite de f cuando x tiende a a si y solo si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in A : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$
 (1)



Lo que viene a expresar esta formulación matemática es que si x está suficientemente cerca de a, entonces su imagen f(x) también está muy próxima a l. Observemos además que en ningún momento se menciona lo que pasa con la función en el punto a.

Es a partir de esta definición que se pueden demostrar las propiedades que enunciaremos en breve y permite probar la existencia de límites.

Una definición equivalente fue establecida por Heine y lo hizo mediante convergencia de sucesiones, y expresa:

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \iff \forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A : \quad a_n \to a \Rightarrow f(a_n) \to l \quad (2)$$

Nótese que la función f(x) no tiene límite l con x tendiendo a a si se verifica una de las siguientes condiciones:

- $\exists \varepsilon_0 > 0 / \forall \delta > 0 : \exists x \in A / 0 < |x a| < \delta \land |f(x) l| \ge \varepsilon_0$
- $\exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A / \quad a_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} a \land f(a_n) \underset{n \to \infty}{\not \sim} l$

Límites laterales

Cuando estudiamos la noción de límites, nos hemos aproximado a *a* por izquierda y por derecha, pero es posible y necesario en algunas oportunidades estudiar y calcular los llamados límites laterales, es decir que se consideren valores aproximados a *a*, pero solo con valores menores o solo con valores mayores. Dichos límites se definen están dados por las siguientes:

Definición: Sea $f: A \rightarrow R$ una función definida en A un subconjunto de R, y sea $a \in A$ un punto de acumulación de A. Se dice que $l \in R$ es el límite lateral a izquierda de f cuando x tiende a a y simbolizamos

$$\lim_{x \to a^{-}} f(x) = l \text{ si y solo si } \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in A : a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Y en forma análoga definimos límite lateral a derecha como:

$$\lim_{x \to a^{+}} f(x) = l \text{ si y solo si } \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in A : a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Es evidente que para que una función f(x) tenga límite en un punto a es necesario y suficiente que existan ambos límites laterales y coincidan.

Álgebra de límites

Dadas las funciones $f: A \rightarrow R$ y $g: A \rightarrow R$, A un subconjunto abierto de R y $a \in A$, si existen $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} g(x)$ se verifican las siguientes propiedades:

1.
$$\lim_{x \to a} (f+g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

2.
$$\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

3. Si
$$\lambda \in R$$
, $\lim_{x \to a} (\lambda \cdot g)(x) = \lambda \cdot \lim_{x \to a} g(x)$ (3)

4. Si
$$\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$$
, $\lim_{x \to a} (f/g)(x) = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$

Límites infinitos y límites en el infinito

De forma muy parecida a lo hecho en las secciones anteriores, daremos las siguientes definiciones para estos casos particulares y muy útiles en el estudio de las funciones.

Límites infinitos

Sea $f: A \rightarrow R$ una función definida en A un subconjunto de R, y sea $a \in A$ un punto de acumulación de A. Se dice que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \text{ si y solo si } \forall K > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in A : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > K,$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \text{ si y solo si } \forall K > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in A : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow -f(x) > K$$

Y en forma más general definimos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \text{ si y solo si } \forall K > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in A : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > K$$

Límites en el infinito

Sea $f: A \rightarrow R$ una función definida en A un subconjunto de R, se dice que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \text{ si y solo si } \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 / \forall x \in A : x > M \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon,$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l \text{ si y solo si } \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 / \forall x \in A : x < -M \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Y en forma más general definimos:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l \text{ si y solo si } \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 / \forall x \in A : |x| > M \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Definiremos además que:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \text{ si y solo si } \forall K > 0, \exists M > 0 / \forall x \in A : x > M \Rightarrow |f(x)| > K$$

Para este último caso podemos considerar también la siguiente equivalencia:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{1}{f(x)} = 0$$

Continuidad

La idea intuitiva de función continua en un punto es bien sencilla. Una función continua en un punto es aquella que no "da salto", aquella que se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel.

Matemáticamente, definimos función continua como:

Sea $f: A \rightarrow R$ una función definida en A un subconjunto de R, y sea $a \in A$ un punto de acumulación de A. Se dice que f es continua en a si y solo si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \qquad \textbf{(4)}$$

Si tenemos en cuenta la definición de límite, podemos escribir:

$$f$$
 es continua en $a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in A : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ (5)

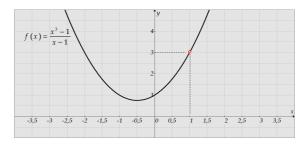
Son funciones continuas en todo su dominio, por ejemplo, las polinómicas de cualquier grado, las logarítmicas, las exponenciales y las funciones seno y coseno.

También, como consecuencia del álgebra de límites serán continuas las sumas, productos y cocientes de funciones continuas, excluyendo en esta última el caso en que el divisor de la expresión valga cero en el punto que se estudia.

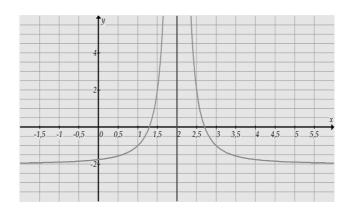
Tipos de discontinuidades

Los posibles casos que se pueden dar cuando una función no es continua en un punto, es decir, los tipos de discontinuidades que existen son:

Evitables: Existe el límite $\lim_{x\to a} f(x)$, pero no coincide con f(a).



Esencial: No existe un número real l que sea $\lim_{x\to a} f(x)$



Cálculo de límites

En el caso en que una función es continua, el límite se calcula como la imagen, puesto que éstos coinciden.

En caso en que probablemente la función no sea continua, ya sea porque no conozcamos el carácter de la función en dicho punto o no está siquiera definida en él, podemos tener como muy útil al siguiente teorema:

Sea a un número real y $E'(a,\delta)$ un entorno reducido donde se cumple que f(x) = g(x). Si existe $\lim_{x \to a} g(x)$, entonces existe también $\lim_{x \to a} f(x)$ y:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$$

Este teorema es sumamente útil porque es el fundamento teórico para reemplazar las funciones con "complicaciones" por otra continua que coincide en todos los puntos, excepto en *a*.

III. Límite de funciones de varias variables

Al tratar el tema de límite de una función de varias variables se hace necesario encontrar una función real no negativa definida en Rⁿ que juegue un rol análogo al que cumple la función valor absoluto en R y permita considerar entornos o vecindades de puntos.

Como Rⁿ es un caso particular de espacio vectorial, estudiaremos una función como la buscada pero definida en un espacio vectorial cualquiera. Así se tiene la siguiente:

Definición: Dado V un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Norma de un vector de V es toda función $////!:V \rightarrow R_0^+$ que verifique las siguientes condiciones

i.
$$\|x\| \ge 0 \quad \forall x \in V \text{ y además, } \|x\| = 0 \iff x = 0$$

ii.
$$||kx|| = |k| ||x|| \forall x \in V, \forall k \in K$$
 (6)

iii.
$$||x + y|| \le ||x|| + ||y|| \quad \forall x, y \in V$$

Ejemplos:

Para $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ pueden definirse, por ejemplo, las siguientes funciones que resultan ser una norma:

- 1. $||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$, esta es llamada "norma euclideana".
- 2. $||x||_s = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$, esta se denomina "norma de la suma".
- 3. $||x||_M = \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\}$, esta recibe el nombre de "norma del máximo".

Teniendo esto, pasemos ahora a definir el límite.

Definición: Sea $f: A \rightarrow R$ una función definida en A un subconjunto de R^n , y sea $a \in A$ un punto de acumulación de A. Se dice que $l \in R$ es el límite de f cuando x tiende a a si y solo si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in A : 0 < ||x - a|| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$
 (7)

Notación: $\lim_{x \to a} f(x) = l$

Si a es un punto aislado, se define

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Puede observarse que esta definición es formalmente análoga a la dada en la expresión (1); en la expresión (7) interviene la nueva función norma y (7) es claramente coincidente con (1) cuando n, la dimensión de Rⁿ, es uno.

Las propiedades y el álgebra para los límites de funciones de varias variables son totalmente análogas a las de funciones en una variable.

Límites direccionales

Sea $f: A \rightarrow R$ una función definida en el conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$. Sea a un punto de A y sea un vector no nulo $v \in \mathbb{R}^n$. Sea $L = \{x \in \mathbb{R}^n : x = a + tv, -\infty < t < \infty\}$ una recta que pasa por a y tiene dirección paralela a la de v.

Consideremos la restricción de f a L, es decir la función $f_L: A \cap L \to R$ definida por $f_L(x) = f(x)$ para todo $x \in A \cap L$.

Se dice que f tiene límite l en a según la recta r o según la dirección de r si f_r tiene límite l en a.

Limites iterados o sucesivos

Trabajemos ahora en \mathbb{R}^n , n = 2.

Sea
$$f: A \rightarrow R$$
, $A \subset \mathbb{R}^2$, y sea $(x_0; y_0) \in A$.

Fijando la variable x en f(x; y), esta se convierte en una función de una variable $f(x; y) = f^*(y)$, por lo que podríamos calcular $\lim_{y \to y_0} f^*(y)$

Si este límite existe define una función de la variable que habíamos fijado

$$\lim_{y\to y_0} f^*(y) = \varphi(x)$$

y tiene sentido calcular

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y) \quad (1)$$

Análogamente se puede fijar en primer lugar y con lo cual obtendríamos

$$\lim_{y \to y_0} \psi(y) = \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) \quad (2)$$

(1) y (2) se llaman límites iterados o sucesivos.

Para que se pueda considerar (1), la función $\varphi(x)$ debe estar definida para todos los puntos de un entorno reducido de $x = x_0$.

Para poder considerar (2), $\psi(y)$ debe estar definida para todos los puntos de un entorno reducido de $y = y_0$.

Teorema: Sea $f: A \rightarrow R$, $A \subset \mathbb{R}^2$, y sea $(x_0; y_0) \in A$. Supongamos que existe

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$$

y existe la función

$$\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \varphi(x)$$

para todo x en un entorno reducido de x_0 .

Entonces

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = l$$

Análogamente, supongamos que existe la función

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y) = \psi(y)$$

para todo y en un entorno reducido de y_0 .

Entonces

$$\lim_{y\to y_0} \psi(y) = l$$

Continuidad

Del mismo modo que se ha hecho para el caso de funciones reales de una variable real, recordamos la definición de función continua en un punto, concepto en el cual interviene el de límite de una función. En efecto, se tiene la siguiente:

Definición: Sea $f: A \rightarrow R$ una función definida en un conjunto $A \subset R^n$, y sea $a \in A$. Se dice que f es continua en a si y solo si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad (8)$$

Teniendo en cuenta la definición de límite, puede escribirse: f es continua en a si y solo si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in A : ||x - a|| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$
 (9)

Puede observarse que tanto en (9) como en (7) las definiciones están, vinculando entornos de los puntos f(a) y a. Puede verse que, las imágenes de los puntos que pertenecen a un entorno E(a) del punto a, caen en un entorno de f(a); es decir,

$$f(E(a)) \subset E[f(a)]$$
 (10)

IV Límite en Espacios Métricos

Como en el caso de funciones reales de variable real, para el estudio de límites y continuidad de funciones en espacios más abstractos es necesario tener una forma de medir la distancia entre dos puntos. Generalizando las propiedades básicas de la distancia entre dos puntos de la recta o del plano se tiene la siguiente noción abstracta de distancia.

Definición:

Sea X un conjunto, una distancia en X es una función $d: X \times X \to R_0^+$ que posee las siguientes propiedades:

- I. $\forall x, y \in X : d(x, y) \ge 0$
- II. Para $x, y \in X : d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- III. $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$ (simetría)
- IV. $\forall x, y, z \in X : d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y)$ (Designaldad triangular)

Un conjunto X sobre el que se ha definido una métrica d, se denomina espacio métrico y se nota por (X,d).

Definimos a continuación las nociones de bola abierta, conjunto abierto, conjunto cerrado y punto de acumulación:

Bola abierta: Dados $x \in X$ y r > 0, se define la bola abierta de centro x y radio r como $B(x,r) = \{ y \in X : d(x,y) < r \}$.

Conjunto abierto: Se dice que un conjunto $A \subset X$ es abierto si $\forall x \in A, \exists r > 0/B(x,r) \subset A$.

Conjunto cerrado: Se dice que un conjunto B es cerrado si su complemento X - B es abierto.

Punto de acumulación: se dice que un punto $x \in X$ es de acumulación del conjunto $M \subset X$ si $\forall \varepsilon > 0 : [B(x,\varepsilon) - \{x\}] \cap M \neq \emptyset$.

Estamos ahora en condiciones de definir las nociones de límite y continuidad en espacios métricos.

Definición:

Sean (X,d), (Y,d') espacios métricos, $M \subset X, a \in M$ y la aplicación $f: M \to Y$. Se dice que f tiene límite $l, l \in Y$, en a si y solo si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in M : d(x,a) < \delta \Rightarrow d'(f(x),l) < \varepsilon$$

Notación:

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

Definición:

Sean (X,d), (Y,d') espacios métricos, $M \subset X, a \in M$ y la aplicación $f: M \to Y$. Se dice que f es continua en a si y solo si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in M : d(x, a) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

Se dice que una función es continua cuando lo es en todo punto de su dominio.

Proposición:

Sean (X,d), (Y,d') espacios métricos, $M \subset X$, $l \in Y$, a punto de acumulación de M y la aplicación $f: M \rightarrow Y$. Son equivalentes:

- a) f tiene límite l en el punto a.
- b) Dada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M / x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} l$

Propiedades:

1) Si existe $\lim_{x\to a} f(x)$, es único.

Ésta es una consecuencia de la unicidad del límite de sucesiones.

2) Sean (X,d), (Y,d') espacios métricos, $f:E\to Y$, $g:E\to Y$ funciones. Se definen:

$$f + g : E \to Y / \forall x \in E \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$f \cdot g : E \to Y / \forall x \in E \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\lambda f : E \to Y / \forall x \in E \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x) .$$

Si
$$g(x) \neq 0$$
, $\forall x \in E$, $f/g: E \to Y/\forall x \in E$ $\left(f/g\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Si a es un punto de acumulación de E y existen $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$, entonces las

funciones f + g, $f \cdot g$, $\lambda \cdot f$, f / g, tienen límite con $x \to a$ y además se cumple que:

I.
$$\lim_{x \to a} (f+g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$
II.
$$\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$
III.
$$\lim_{x \to a} (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \lim_{x \to a} f(x)$$

II.
$$\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

III.
$$\lim_{x \to a} (\lambda f)(x) = \lambda \lim_{x \to a} f(x)$$

IV.
$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g} \right) (x) = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$

Estas propiedades son consecuencia de las propiedades del límite de sucesiones. Haremos la demostración solo para el caso de la propiedad 1).

Demostración:

$$\overline{\text{Sea}(x_n)_{n\in\mathbb{N}}} \subset E/x_n \to a$$

Por hipótesis existen $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x_n)$ y $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{n \to \infty} g(x_n)$.

Como, por definición de suma de funciones, $\forall n \in \mathbb{N} : (f+g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n)$, $\lim_{n \to \infty} (f+g)(x_n) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) + \lim_{n \to \infty} g(x_n)$

Por lo tanto, $\lim_{x \to a} (f + g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$.

Se deja como ejercicio demostrar las restantes propiedades.

Proposición:

Sean (X,d),(Y,d') espacios métricos, y la aplicación $f:X\to Y$. Entonces f es continua si y solo si $f^{-1}(U)$ es abierto para todo abierto $U\subset Y$.

Demostración:

Supongamos sea f continua y sea $U \subset Y$ abierto.

Tomamos $y_0 = f(x_0) \in U$, con $x_0 \in X$.

Como U es abierto existe un entorno de $y_0 = f(x_0)$ incluido en U, es decir, $\exists \varepsilon > 0/B \big(f(x_0), \varepsilon \big) \subset U$. Pero como f es continua, y en particular en x_0 , existe un entorno de x_0 tal que su imagen por f es un subconjunto de U. En otras palabras, $\exists \delta > 0/f \big(B(x_0, \delta) \subset B \big(f(x_0, \delta) \big) \subset U$.

Finalmente se tiene que $B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(f(B(x_0, \delta))) \subset f^{-1}(U)$, y como x_0 es un punto cualquiera de $f^{-1}(U)$, resulta $f^{-1}(U)$ abierto.

Supongamos ahora que $f^{-1}(U)$ es abierto para todo abierto $U \subset Y$. Probaremos que f es continua.

Sean $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$. Como $B(f(x_0), \varepsilon)$ es un conjunto abierto en Y, por hipótesis $f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$ es un abierto en X, es decir $\exists \delta > 0/B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon));$ entonces $f(B(x_0, \delta)) \subset f(f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))) \subset B(f(x_0, \delta)).$

Luego la función es continua en un punto x_0 cualquiera de X, por lo tanto la función es continua en X.

V. Un breve estudio de espacios topológicos

Los espacios topológicos resultan ser espacios que generalizan a los anteriormente estudiados, en efecto, todo espacios métrico es topológico, sin embargo, no todo topológico es métrico. De aquí que las funciones que estudiemos en espacios topológicos pueden resultar distintas a las de los métricos.

Comencemos definiendo lo que es un espacio topológico.

Definición:

Dados el conjunto X y T una colección de subconjuntos de X. Diremos que T es una topología sobre X si se cumplen las siguientes condiciones:

- i. $\phi \in T, X \in T$.
- ii. La unión arbitraria de elementos de T pertenece a T.
- iii. La intersección finita de elementos de T pertenece a T.

El par (X, T) se denomina espacio topológico y los elementos de T se llaman abiertos.

Ejemplos

1) Los espacios topológicos mas sencillos son los inducidos por una métrica, en efecto, dado X espacio métrico y $x_0 \in X$; la familia de conjuntos

$$T = \{B(x_0, r) : r > 0\} \cup \{\phi\}$$

es una topología sobre X.

- 2) Dado X conjunto, consideremos el conjunto de partes P(X) del conjunto X. La familia dada por T = P(X) es una topología sobre X. dicha topología recibe el nombre de "topología discreta".
- 3) Dado el conjunto X. La familia de conjuntos

$$T = \{X, \emptyset\}$$

es una topología sobre X y se llama topología indiscreta.

4) Dado el conjunto X. La familia de subconjuntos de X dada por

$$T = \left\{ A \subset X : \left| A^c \right| < \infty \right\} \cup \left\{ \phi \right\}$$

es una topología sobre X y recibe el nombre de topología de los complementos finitos.

Continuidad

Otro concepto de gran importancia en el estudio de los espacio topológicos es el de continuidad de una aplicación entre dos espacios topológicos, que esta dado por la siguiente **Definición:** Dados los espacios topológicos (X, T_1) y (Y, T_2) , y la aplicación $f: X \to Y$. Diremos que la aplicación f es continua si y solo si $f^{-1}(U) \in T_1$ para todo $U \in T_2$.

Si estudiamos a Rⁿ o a los espacios métricos en general, a través de la topología inducida por la métrica, podemos probar que las definiciones dadas en los parágrafos anteriores son equivalentes a esta, pues se sabe que las bolas abiertas efectivamente son conjuntos abiertos.

Ejemplos de aplicación

- 1) Sea la función $f:(X,T_{discreta}) \to (Y,T)$. Estudiemos las funciones continuas de esta forma.
- Sea $U \in T$, luego $f^{-1}(U) \in P(X)$ y por lo tanto $f^{-1}(U) \in T_{discreta}$. Como U es un abierto cualquiera, resulta que toda función es continua.
- 2) Sea la función $f:(X,T) \to (Y,T_{indiscreta})$. Los abiertos de $T_{indiscreta}$ son $Y y \phi$.

$$f^{-1}(Y) = X \in \mathsf{T}$$

$$f^{-1}(\phi) = \phi \in T$$

Luego toda función de esta forma resulta continua.

3) Sea la función $f:(X,T_{cf}) \to (Y,T_{indiscreta})$, donde T_{cf} denota la topología de los complementos finitos.

 $f^{-1}(Y) = X \in T_{cf}$, pues $|X^c| = |\phi| = 0 < \infty$. Además $f^{-1}(\phi) = \phi$ luego si $|\phi^c| = |X| < \infty$, $f^{-1}(\phi) \notin T_{cf}$ y toda función es continua; si $|\phi^c| = |X| = \infty$, $f^{-1}(\phi) \notin T_{cf}$ y ninguna aplicación de este tipo resulta continua.

BIBLIOGRAFIA

- 1. Bartle, R; Sherbert, D. Introducción al análisis matemático de una variable. Limusa. 1996.
- 2. Cauchy, A. L. Cours d' Analyse de L' Ecole Royale Polytechnique. Ed. Imprimerie Royale. Paris. 1821.
- 3. Courant, R. Robbins, H. Que es la Matemática. Editorial ALDA. Buenos Aires. 1954.
- 4. De Burgos, J. Cálculo infinitesimal de una variable. Mc Graw Hill. 1996.
- 5. De Burgos, J. Cálculo infinitesimal de varias variables. Mc Graw Hill. 1995.
- 6. Larson, R. Hostetler, R. Cálculo y Geometría Analítica. Mc Graw Hill. 1999.
- 7. Newton, I. Principios matemáticos de la Filosofía natural. Traducción al español. Ed. Altaya. Barcelona. 1993.

CONSTRUCCIÓN DE VIVIENDAS EN TERRENOS DE RELLENO CON EL MÉTODO DE PILOTES PERFORADOS

Ing. López, Alfredo Omar ing_alfredolopez@yahoo.com.ar

Ing. Romero, Natalia Noemí Elisabeth ing_nataliaromero@yahoo.com.ar

RESUMEN

El presente trabajo aborda la problemática de la capacidad de sostén del relleno de la Laguna Argüello, para la construcción de un complejo habitacional.

Para la realización del trabajo se realizaron actividades de búsqueda de información, relevamiento de datos, relevamientos fotográficos y recorridos por los sectores del **Área de la Laguna Arguello.**

La fundación que se adoptó para transmitir las cargas del complejo habitacional hacia el suelo de relleno analizado es Pilotes Perforado. Se eligió este tipo en base a criterios técnicos conocidos.

Del resultado obtenido, concluimos que sobre el terreno de relleno analizado, se puede materializar el Complejo Habitacional de tres plantas, cuyas características técnicas se describieron en el presente informe, utilizando el sistema de fundación de Pilotes Perforados.

1. INTRODUCCIÓN

El presente trabajo aborda la problemática de la capacidad de sostén del relleno de la Laguna Argüello, ubicada sobre la calle Patrón entre Saavedra y Av. Paraguay, Villa Don Rafael para la construcción de un complejo habitacional. El mismo se encuadra dentro del Curso de Posgrado "Metodología de la Investigación" que fue desarrollado en la Facultad de Ingeniería dependiente de la Universidad Nacional del Nordeste, de la ciudad de Resistencia, provincia del Chaco, Argentina.

Para la realización del trabajo se realizaron actividades de búsqueda de información, relevamiento de datos, relevamientos fotográficos y recorridos por los sectores del **Área de la Laguna Arguello** donde se vislumbra la problemática analizada.

El área Metropolitana del Gran Resistencia se encuentra emplazada en la planicie de inundación del río Paraná. A este contexto geomorfológico se le suman una serie de lagunas semilunares – antiguos meandros - que completan el sistema fluvio – lacustre, directamente regulado por las fluctuaciones del Paraná, afectados en la actualidad por el proceso intenso de urbanización. En general estos terrenos son anegadizos y con escasa pendiente.

La ciudad de Resistencia fundada oficialmente en 1878, comienza a crecer aproximadamente desde 1920 y en 1947 rebasa los límites propuestos para la primera colonia y se realizan los primeros rellenos de lagunas con el consecuente impacto sobre el entorno natural. Antiguamente se pensaba que las lagunas se podían y debían ser rellenadas ya que eran espacios inservibles, y no se tuvo en cuenta el valor útil y paisajístico de las mismas, de las masas boscosas que la circundaban y de la fauna existente. Como resultado hoy solo quedan 28 lagunas dentro del sistema de defensa interno que resguarda de las crecidas del Río Negro, de las 70 que existían en el área Metropolitana.

Por falta de planificación las lagunas no se integraron a la trama urbana, y quedaron como vacíos en áreas centrales o semicentrales. Entre la década del 60 y fines de los 70 grandes sectores marginales se han asentado a los bordes de la lagunas, arrojando basuras y todo tipo de desperdicios a fin de obtener mayor espacio para su uso residencial, sin condiciones mínimas de habitabilidad colaborando a la vulnerabilidad ambiental de nuestro sistema hídrico.

Uno de los problemas ambientales del Gran Resistencia es la diversidad de uso del suelo y la velocidad con el que este se da, aumentando las incidencias del mismo. Cada uso genera un impacto negativo o proceso degradante particular en el paisaje y en sus recursos (agua, suelo, aire, bosque, etc.) por la mala planificación del manejo de éstos.

El crecimiento descontrolado del uso del suelo dio como resultado la ocupación y relleno indiscriminado de lagunas que tenían la función de actuar como receptoras de los excesos pluviales, por lo que la ciudad se ve vulnerable ante las copiosas y frecuentes precipitaciones (aún cuando no superan los 50 mm).

La urbanización genera una impermeabilización de los terrenos, lo que produce un impacto negativo en el proceso de absorción del agua de lluvia.

La Laguna Argüello a mediados de la década del 30 cubría una superficie de 30 hectáreas, en la actualidad solo alcanza a cubrir 9,5 hectáreas, rodeada de viviendas precarias, con condiciones de insalubridad permanente.

Esto ocurrió debido al sostenido crecimiento demográfico, la creciente edificación y la especulación inmobiliaria, ya que estas tierras adquieren mayor cotización por su proximidad al casco céntrico de Resistencia – a menos de 1,5 km- fomentando una ocupación (previo relleno) de los espejos de agua.



ÁREA DE ESTUDIO

Se ha escogido como área de estudio a un sector de villa Don Rafael, ubicada sobre la calle Patrón entre Saavedra y Av. Paraguay.



Esta laguna esta rodeada de viviendas precarias de mampostería, cuentan con conexiones de agua y energía eléctrica, no tiene sistema de cloacas, con condiciones de insalubridad permanente.



VISTA POSTERIOR (paralela a calle Patrón)

La incipiente construcción de viviendas ha sido acompañada por una fuerte transformación del paisaje. Estas viviendas fueron construidas sobre relleno, lo que determinó la limitación del escurrimiento e endicamiento del excedente hídrico resultantes de las precipitaciones, inundando terrenos que no sufrían estas limitaciones.



VIVIENDAS UBICADAS SOBRE CALLE PATRÓN



El descontrolado crecimiento urbano del Área Metropolitana de Resistencia ha producido otras muchas consecuencias negativas, el sostenido avance anárquico del uso del suelo y, la ocupación indiscriminada de las riberas de las lagunas del AMGR, la escasez de espacios verdes adecuados para recreación y esparcimiento de la población y el deterioro ambiental creciente (materializada por rellenos incontrolables de las lagunas

para el asentamiento de viviendas precarias), nos están dando la pauta de lo que hemos estado haciendo mal.

Es por ello que nos planteamos si un terreno de relleno soportaría un complejo habitacional de tres niveles con una fundación del tipo Pilote Perforado. Siendo nuestro objetivo aprovechar al máximo el relleno ya existente sobre la Laguna Arguello evitando así continuar con estas prácticas antinaturales.

Por todo lo expresado, consideramos se hace necesaria una ocupación planificada del suelo, a través de un trazado urbano digno para la población, con la simultánea revalorización del sistema fluvial lacustre, y mejorando así la calidad de vida tanto en lo social, como en la salud y la educación. El saneamiento legal de una vivienda propia con condiciones dignas de habitabilidad, con infraestructuras, equipamientos adecuados y una efectiva planificación territorial. Como así también deberá centrarse en alternativas de zonificación, que determinen y delimiten áreas de reserva de espacios verdes con el fin de contribuir al bienestar social.

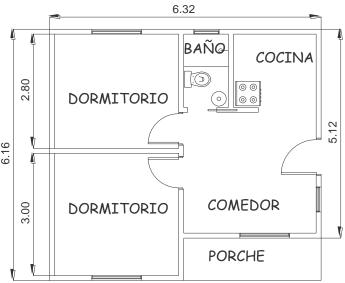






2. DESARROLLO

La Planta General Tipo del Complejo Habitacional se detalla en la siguiente figura.



PLANTA TIPO -Esc. 1:100

Imágenes de Obras en Construcción



La elección de los distintos tipos de fundaciones que se conocen, surgen de la interacción de:

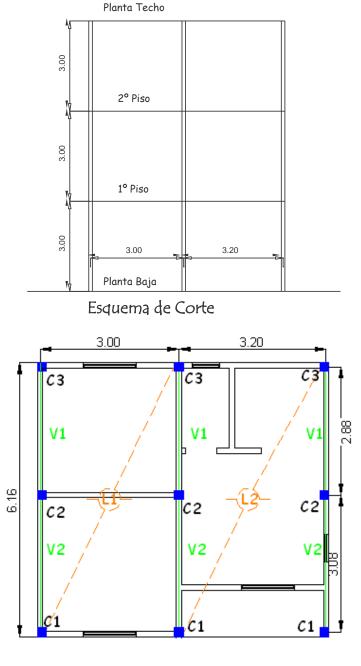
- las propiedades mecánicas del suelo,
- el tipo de cargas,
- la intensidad de cargas,
- las deformaciones producidas por la interacción de suelo-cimiento-carga estructural.

La fundación que se adoptó para transmitir las cargas del complejo habitacional hacia el suelo de relleno analizado es Pilotes Perforado. Se eligió este tipo en base a criterios técnicos conocidos.

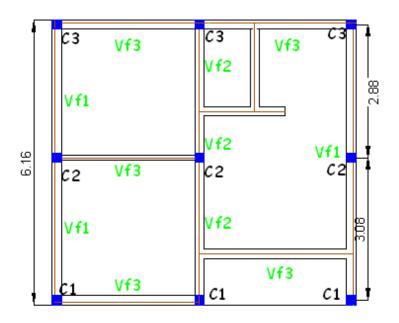
Se cuenta con un Análisis de Estudio de Suelo, próximo al área estudiada, el mismo proporciona las características de Tensión admisible del Suelo, valor que define el tipo de fundación para las cargas actuantes.

3. Procedimiento de Cálculo:

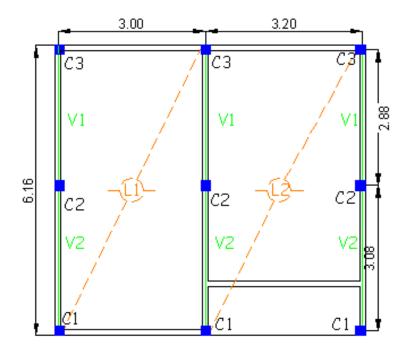
En función de la Planta tipo adoptada se plantea el siguiente Esquema Estructural:



PLANTA ESTRUCTURA Nivel 1° 2° Esc. 1:100



PLANTA ESTRUCTURA Nivel Fundaciones Esc. 1:100



PLANTA ESTRUCTURA Nivel Platea Esc. 1:100

4. CONCLUSIONES

Del resultado obtenido, concluimos que sobre el terreno de relleno analizado, se puede materializar el Complejo Habitacional de tres plantas, cuyas características técnicas se describieron en el presente informe, utilizando el sistema de fundación de Pilotes Perforados.

Proponemos este tipo de Cimentación ya que tiene varias ventajas como ser:

- Economía si el número de pilotes es reducido.
- Posibilidad de alcanzar grandes profundidades (hasta 40 m)
- Se adaptan bien a las reparaciones bajos obras y el refuerzo de cimentación.
- En general el Pilote Perforado tiene la ventaja de ejecutarse rápidamente.

Esto permitirá:

- aprovechar al máximo el relleno ya existente sobre la Laguna Arguello evitando así continuar con la ocupación indiscriminada de las riberas de las lagunas del AMGR.
- revertir las consecuencias negativas del sostenido avance anárquico del uso del suelo, principalmente la escasez de espacios verdes adecuados para recreación y esparcimiento de la población y el deterioro ambiental creciente (materializada por rellenos incontrolables de las lagunas para el asentamiento de viviendas precarias
- realizar un trazado urbano digno para la población, lo cual beneficiara la revalorización del sistema fluvial lacustre, y mejorara los estándares de vida tanto en lo social, como en la salud y la educación, eliminándose áreas de conflictos en múltiples aspectos

Debemos dejar aclarado, que nuestro fin con este trabajo de investigación es materializar el Complejo Habitacional solo en las lagunas que han sido rellenadas y no pueden ser recuperadas.

No queremos que se considere con este trabajo que las lagunas deben ser rellenadas para proporcionar una solución habitacional.

Consideramos que la influencia del ecosistema a la hora de proyectar la urbanización debe ser un factor preponderante.

5. BIBLIOGRAFÍA

- ➤ MELLI PIRALLA, Roberto. Diseño Estructural de Cimentaciones. Editorial Limusa.
- ➤ CALAVERA RUIZ, José. Calculo de Estructuras de Cimientos. Editorial Internac.
- ➤ CIRSOC 101. Cargas y Sobrecargas Gravitatorias para el Calculo de las Estructuras de Edificios. Julio 1982. Buenos Aires: INTI-1996
- ➤ JUAREZ BADILLO, Eulalio. Mecanica de Suelos Tomo I segunda edición, Limusa. México 1979.
- ➤ DUNHAM, C. W. Cimentaciones de Estructuras. Segunda edición, Mc Graw Hill, Madrid 1968.
- Popolizio, Eliseo (1989). Algunos elementos geomorfológicos condicionantes de la organización espacial del NEA. Geociencias XVII. Centro de Geociencias Aplicadas. Facultad de Ingeniería y Humanidades. UNNE. Resistencia. Chaco
- > Paginas web:

www.ecoportal.net/Contenido/Temas Especiales/Agua/Laguna Arguello Historia de la Ciudad. (16/05/2009)

www.chaco.gov.ar/APA/institucional/amgr/Arg%c3%Bcello.pdf (16/05/2009)

EL VIENTO A TRAVES DE LA MITOLOGIA Y LA REALIDAD COTIDIANA

Mario Bruno Natalini *

* Instituto de Estabilidad, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional del Nordeste

RESUMEN

El viento, ese fenómeno de la naturaleza que muchas veces nos brinda una suave brisa y otras revolucionan el hábitat produciendo daños materiales, siempre ha sido objeto de interés por parte del ser humano. Generalmente se lo endiosaba y aquí se describe su inclusión en las distintas mitologías .Pero hoy se destaca más por los daños que ocasiona y es bueno conocer su peligrosidad y se dan algunos ejemplos de su accionar.

I. INTRODUCCION

Desde los orígenes de la civilización, el viento ocupó un lugar preponderante en las mitologías de los pueblos. Llama la atención que en Grecia se lo considerara como un elemento peligroso, que era utilizado por los dioses para producir daño, mientras que en los demás países se lo tenía en cuenta como un Dios e inspiraba respeto. Es posible que se trataba de alagarlo para que no fuera demasiado violento y siempre el ser humano necesitó un Dios fuerte a quien adorar.

Hoy, el viento ha dejado de ser un ente divino, pero igualmente se lo recuerda en la poesía y en la música (Pablo Neruda:" El viento en la isla", Doménico Modugno :"La distancia es como el viento", Giuseppe Verdi en la Opera Rigoletto: "La donna è mobile qual piuma al vento...")

Actualmente se lo considera, junto al sismo, como una amenaza latente contra la vida del ser humano y su entorno. Lamentablemente, es difícil predecir cuando actuará. Según Walter [1] "se tiene que los daños atribuibles a fenómenos relacionados a vientos fuertes son similares o mayores a los que se producen por acción sísmica. Por ejemplo, de acuerdo a la base de datos EM-DAT [2], tomando el período 1900-2010, en América el 21% de las pérdidas económicas se deben a terremotos, y el 71% a tormentas."

II. DE LAS MITOLOGIAS

1.- Mitología griega

En la antigua Grecia, Zeus le dio el poder a EOLO, hijo de Hipotes ,(Fig. 1 y 2) para que controlara los vientos , prisioneros en un sótano Solamente podían ser liberados cuando Eolo lo decidiera. Controlaba las tempestades e incluso ayudaba a diversos personajes incluidos en la Eneida, a cumplir sus misiones.



Fig.1.- Represntación de Eolo soplando contra un árbol [Ref.3]



Fig. 2.-Representación de Eolo lanzando el viento contra una nave [Ref.3]



Fig.3.- Torre de los vientos [Ref.3]

En el ágora romana de Atenas, Andrónico de Cirro construyó la llamada Torre de los vientos (50 a.c.) (Fig.3).

Era de planta octogonal y cada cara representaba un viento, orientado a los ocho puntos cardinales: Bóreas (N), Kaikias (NE), Euro (E), Apeliotas (SE), Noto (S), Lips (SO), Céfiro (O), y Skiron (NO)

Medía 12 m de alto por 8 m de diámetro y fué construida en mármol . Funcionaba como reloj de sol, reloj de agua y poseía en el tejado una veleta que marcaba la dirección del viento



Fig.4.- Reloj de agua [Ref.3]

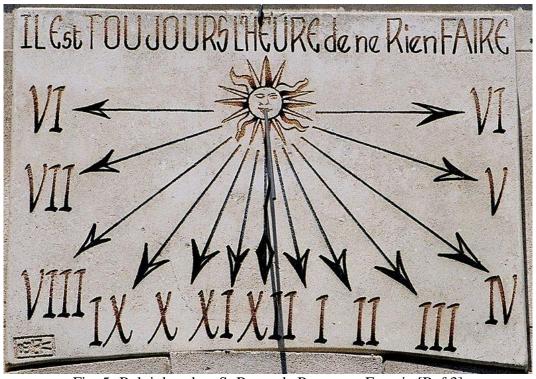


Fig. 5.-Reloj de sol en St Remy de Provence, Francia [Ref 3] (El cartel dice "siempre es la hora de no hacer nada")

2. Mitología china

En China no existía una verdadera mitología pero si diversos dioses, uno de los cuales era Feng Bo (風伯), en su forma humana, porque tenía también una forma animal llamada Fei Lian (fig. 6) Era el dios del "buen viento" y se lo denominaba también "rey del viento" o "Tío viento" y se decía que llevaba el viento envuelto en una piel de cabra,



Fig.6.- Fei Lian (500 a.c.) [Ref.3]

3. Mitología egipcia

También Egipto adoraba el viento. AMON, (fig 8), era el "Padre de todos los vientos".

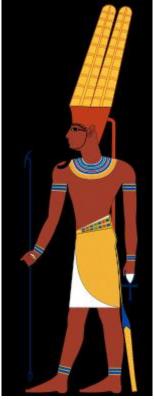


Fig. 8.- AMON [Ref.3]

Esta deidad originaria de Tebas, conocida como "El rey de los Dioses", alcanzó gran importancia bajo la XII dinastía. Su nombre significa "El secretísimo" o "El misterioso". Era conocido como "Padre de todos los vientos", "alma del viento" y en muchas embarcaciones se grababa su nombre en el timón.

4. Mitología hindú

El hinduismo le daba especial importancia al viento, en realidad al aire, por cuanto entre los 5 elementos fundamentales figura el mismo. En la versión china, los 5 elementos eran: hierro, madera, agua, metal y fuego). Pero en la versión hindú son los siguientes:

• Prithuí o bhumi: tierra

• Apa o yala: agua

• Agní o teyas: fuego

Vaiú: aireAkasha: éter

El concepto Vaiú es fundamental como Mukhia Vaiú ('viento principal') o Mukhia Prana ('aire vital principal'), formado por un grupo de cinco divinidades, conocidas como Prana, Apana, Viana, Udana y Samana que controlan la vida, el aliento vital, el viento, el tacto, la digestión y la excreción (Fig.9).



Fig. 9.- Representación de VAIU [Ref.3]

5. Mitología japonesa

En el Japón también existía un dios dedicado al viento, denominado Shina Tsu-Hiko"Shinatsuhiko-no-kami (志那都比古神[?] en el *Kojiki*) o Shinatsuhiko-no-mikoto (級長津彦命[?] en el *Nihonshoki*) es el *kami* del viento, dentro de la mitología japonesa. Según el *Kojiki*, es hijo directo de Izanagi e Izanami; en cambio en el *Nihonshoki* relata que nació del soplido de la niebla matutina por Izanami, y surgió junto con Shinatobe, considerada su hermana. Esta deidad se le rinde tributo, junto con Shinatobe, en el santuario Kaza-hi-no-miya, en el complejo de *Naikū* del Santuario de Ise; y en el santuario Kaza-no-miya, en el complejo de *Gekū* del Santuario de Ise." (Fig. 10)



Fig.10 Santuario Kaza-hi-no-miya, en el Santuario de Ise, dedicado a Shinatsuhiko [Ref.3].

III. EL VIENTO COMO ENEMIGO

Pero la realidad cotidiana nos indica que huracanes, tornados, vientos fuertes, etc. azotan la superficie terrestre produciendo caos y destrucción, con el agravante de ser un fenómeno aleatorio que da poco margen a su predicción.

El viento es el movimiento de una masa de aire en la atmósfera. Es "la compensación de las diferencias de presión atmosférica entre dos puntos" Las dos causas principales de la circulación atmosférica a gran escala son el calentamiento diferencial de la superficie terrestre según la latitud, y la inercia y fuerza centrífuga producidas por la rotación del planeta." [3]Cuando su velocidad es baja, puede ser agradable y refrescante. Pero si la velocidad aumenta, comienza a convertirse en un fenómeno que puede provocar daños importantes. Es conocida la Escala de Beaufort, modificada, (la original Escala, preparada por el almirante Beaufort solamente se refería a daños en el mar). (Tabla I)

Tabla I Escala de BEAUFORT

Grado	Velocidad del	Descripción del Viento	Efectos del Viento
	Viento	F 1 1 = 111	
	(m/seg)		
	Km/hora		
0	0 - 0.5	calma	nulos
	0 - 1,8		
1	0,5-1,7	aires suaves	el humo sube
	1,8- 4,42		verticalmente
2	1,7 – 3,3	brisa suave	el viento acaricia el rostro
	4,42-11,88		
3	3,3 – 5,2	brisa apacible	las hojas se mueven
	11,88- 18,72		
4	5,2 – 7,4	brisa moderada	pequeñas ramas se
	18,72- 26,64		mueven flamean las
	5 4 0 0		banderas
5	7,4 – 9,8	brisa fresca	se mueven las ramas
	26,64- 35,28	1	grandes
6	9,8 – 12,4	brisa fuerte	se mueven los renuevos
	35,28- 44,64	4 2 119	
7	12,4 – 15,2	ventarrón debil	ramas gruesas se encorvan. se siente el
	44,64- 54,72		viento en edificios
8	15,2 – 18,2	ventarrón moderado	Problemas con peatones.
0	54,72- 65,52	ventarion moderado	Se rompen ramas
	34,72-03,32		pequeñas. Oscilan troncos
			de árboles
9	18,2 – 21,5	ventarrón robusto	El viento desplaza objetos
	65,52-77,44		livianos. Se rompen ramas
			gruesas y renuevos
10	21,5 – 25,1	ventarrón fuerte	Arboles desarraigados. Se
	77,44- 90,36		rompen postes de luz
11	25,1 – 29	ventarrón destructivo	Daños severos
	90,36-109,4		
12	29 o mas	huracanes	Desastres
	109,4 o mas	tornados	
L			

Los vientos de grado 12 son los más destructivos por las velocidades que alcanza. .El Huracán, no está presente en el hemisferio sur de América, dado que se forma cuando la temperatura del mar alcanza los 28° C ,cosa que no sucede Las velocidades pueden llegar a 250 Km/h. Ejemplo es el Huracán Goes 12 que se formó en el Caribe el 20 de octubre de 2005 (Fig.11)

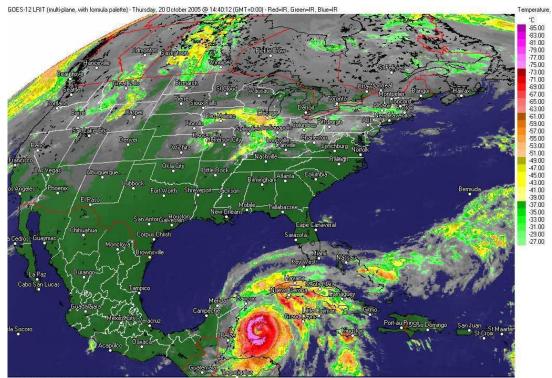


Fig. 11.- Foto obtenida por el Goes12 a las 14.40 utc(11.40 hora argentina), del Jueves-20-de octubre de 2005 en el Caribe [Ref 3]

El otro viento de grado 12 que si se forma en el hemisferio sur es el Tornado, aunque con mucho menos frecuencia que en el hemisferio Norte.(fig 12.) En este caso, las velocidades pueden llegar a 500 Km/h de velocidad tangencial y 300 Km/h de velocidad de ascenso.



Fig. 12. Aspecto de un tornado, [Ref. 3]

Pero aun a baja velocidad, el viento puede producir efectos desagradables en los peatones:

- a La obstrucción del flujo de aire cuando existe un edificio alto rodeado por otros bajos puede producir corrientes descendentes fuertes hacia el nivel de la calle
- b Entre los edificios altos puede provocarse un efecto Venturi con aceleración brusca del viento.
- c Pueden producirse remolinos en las esquinas de los edificios y cuando hay efecto de vecindad se crean vórtices a nivel del suelo

Veamos algunos accidentes ocurridos en obras importantes producidos por vientos fuertes.

1. Anfiteatro Transito Cocomarola – (Corrientes)

Era un reticulado estéreo construido con barras de hierro redondo ,cubierto por placas de hormigón con forma de conoide abierto en el frente y cerrado atrás, que colapsó el 28 de abril de 1992.-(Fig. 13,14,15)

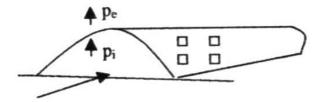


Fig.13.- Esquema del anfiteatro [Ref. 4]

Un viento fuerte, pero que no superaba el valor de calculo, ingresó en forma directa por la parte abierta, quedando embolsado y creando presiones internas importantes que se sumaron a las succiones exteriores. En un instante literalmente explotó la estructura, derribándose.



Fig. 14 – Escenario del anfiteatro. Vista de la estructura desde el sector de bancos antes que ocurriera el fenómeno meteorológico [Ref.4].



Fig.15 Estructura metálica destruida por el temporal. [Ref.4]



Fig. 16 – Sector de la estructura vista desde el acceso al anfiteatro – Placas de hormigón que formaban la cubierta. diseminadas sobre el terreno circundante [Ref.4].

2. Polideportivo Regional Provincial Jaime Zapata - Resistencia-Chaco

En Fig.17 se observa el corte transversal de la tribuna techada, construida a fines del año 2002 y colapsada el 22 de diciembre de 2003.

En la Fig.18 se ve la tribuna con el techo girado hacia atrás y las chapas plegadas por la acción de un viento sudeste de aproximadamente 120 km/hora menor al considerado en el cálculo

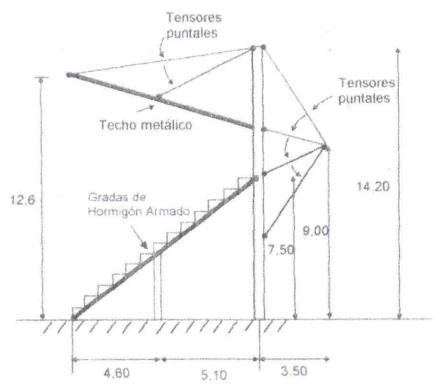


Fig. 17. Corte transversal de la tribuna del Polideportivo Ref. [5]



Fig.18. Vista de la tribuna con el techo de chapa plegado [Ref. 5]

3. Torres de enfriamiento de Ferribridge - Yorkshire -Inglaterra

Su forma geométrica es un hiperboloide de revolución, construidas en hormigón armado [Fig.19]. En una hora de vientos fuertes fueron, dañadas gravemente 3 torres con derrumbe de sectores y las demás sufrieron daños (Nov. 1965) con deformaciones en el anillo extremo (Fig.20)



Fig.19.- Torres de enfriamiento en la planta de Ferrybridge antes del colapso [Ref. 5)]

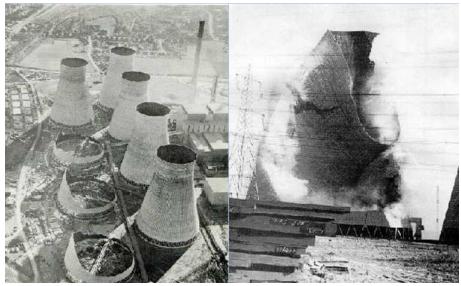


Fig. 20 . Torres de enfriamiento después del colapso[Ref. 5]

4. Usina Termoeléctrica Presidente Medici y Quinta.- Brasil

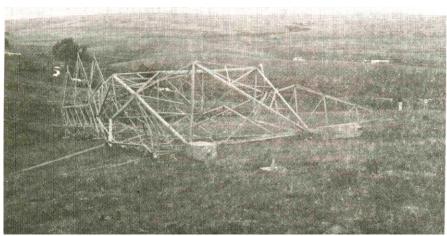


Fig.21.- Colapso de la torre [Ref.6]

Blessmann [5] cita el caso del colapso de las torres No. 36 a 40 en la línea de transmisión entre la Usina Termoeléctrica Presidente Médici y Quinta (Fig.21). "La primera torre a entrar en colapso debe haber sido la del medio, alcanzada por una ráfaga de viento excepcionalmente violento. Esta torre fue arrancada, llevando consigo parte de las dos fundaciones de hormigón armado del lado de barlovento. Las bases de estas dos patas de la torre fueron dislocadas transversalmente a la línea, a una distancia de 9,10 m. El esfuerzo lateral causado en las cuatro torres vecinas (dos de cada lado) por el desplazamiento de los cables, con el derrumbe y desplazamiento transversal de la torre central, junto a los esfuerzos originados por las altas velocidades del viento sobre los cables y las torres vecinas, provocó el colapso por flexión de las otras cuatro torres" La velocidad estimada fue de 130 Km/h, menor que el límite reglamentario.

5. Letrero del Hilton Hotel - USA

El letrero de propaganda del Hotel Hilton en las Vegas USA (Fig.22) era un reticulado metálico espacial de 109 m. de altura. Construida en septiembre de 1993 a un costo de U\$S 5.000.000, llevaba en su frente 77.000 lámparas incandescentes y 6.000 fluorescentes. Se calculó numéricamente (no se hizo ensayo en túnel de viento) para un viento máximo de 220 km/h

En Julio 18 de 1994 se produjo el colapso de la mitad superior, que se plegó bajo un viento de 145 km/h (Fig.23)

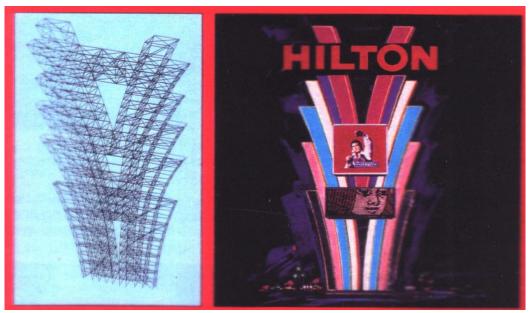


Fig.22.- Estructura antes del colapso (1993) [Ref.7]

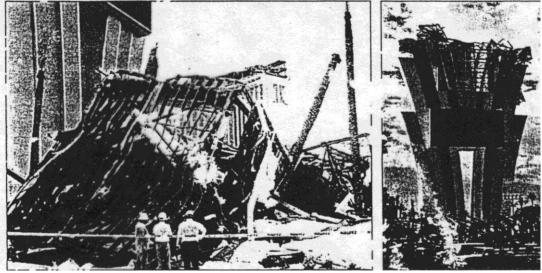
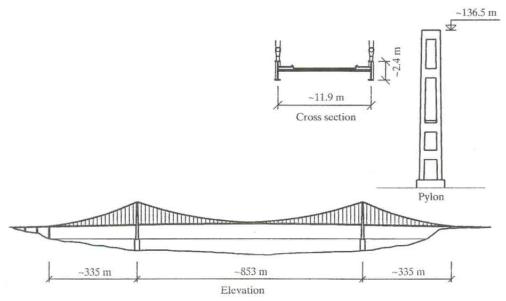


Fig.23- Estructura después de colapso (1994) [Ref.7]

6. Tacoma Narrow Bridge (Washington- USA)

En Fig. 24 se observan las dimensiones del puente colgante, donde el ancho del tablero mide B = 11,90 m y la luz máxima L= 853 m. Fue finalizado el 1 de julio de 1940 y ya se producían oscilaciones verticales del tablero con vientos leves, por lo cual la gente lo llamó "Galloping Gertie"



Dimensions of the first Tacoma Narrows Bridge

Fig. 24- Detalles del puente sobre el Rio Tacoma .USA [Ref. 8]

El 7 de noviembre de 1940, con una velocidad de 19 m/seg (68 km/h) se produjeron violentas oscilaciones del tablero que duraron 70 minutos, donde el tablero llegó a adquirir un ángulo de 35° hasta colapsar (Fig. 25y 26).

Numerosas interpretaciones se dieron al fenómeno y en el Laboratorio de Von Karman en California se hicieron estudios en túnel de viento, concluyéndose que se debió a vibraciones autoexcitadas con formación de vórtices. A. Larsen [6], analizó a fondo el problema en base a nuevas experiencias y concluyó que se produjo un problema de "flutter", con una frecuencia de torsión f_t 0,20 Hz y una frecuencia de flexión $f_f = 0,13$ Hz.

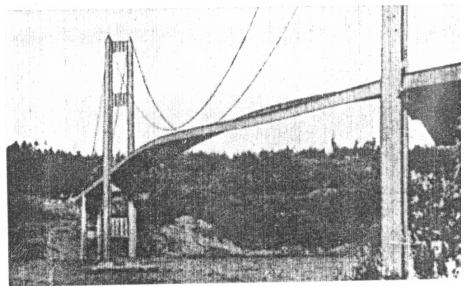


Fig.25- Inicio de las oscilaciones en el tablero del puente [Ref.9]

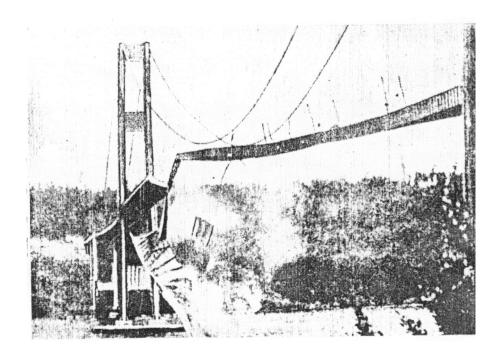


Fig. 26. Colapso del Tacoma Bridge [Ref. 10]

Posteriormente se modificó el proyecto original del puente, efectuándose perforaciones en los costados del tablero, con lo cual se evitó la inestabilidad, se reconstruyó y no hubo más movimientos.

I V. CONCLUSIONES

El viento es uno de los pocos fenómenos de la naturaleza que el ser humano no puede dominar y como él, nace, se desarrolla "muere y se reproduce cuando quiere y como quiere, razón por la cual debe ser respetado. En cierto sentido, podemos decir que tiene cierta aureola divina que lo hace casi todopoderoso. A veces es amable y nos recrea con una suave brisa y otras veces nos castiga destruyendo vidas y viviendas.

V. REFERENCIAS

- [1] G. WALKER, P. GRUNDY R., MUSULIN (2011) Disaster risk reduction and wind engineering. 13th International Conference on Wind Engineering, Amsterdam, 10-5 July 2011
- [2] World Health Organisation Collaborating Centre on the Epidemiology of Disasters (2011) Emergency Events Database, www.emdat.be.
- [3] WIKIPEDIA-Free Enciclopédia es.wikipedia.org/wiki/Dioses_del_viento_
- [4] M. B. Natalini. Acciones horizontales sobre las construcciones-. Publicación Del Departamento de Construcciones. Facultad de Ingeniería. UNNE
- [5] MARIGHETTI .O., NATALINI B. WITTWER A ,NATALINI M:B- Estudio en túnel de viento de la cubierta del Polideportivo "Jaime Zapata"- Anais das XXXII Jornadas Sulamericanas de Engenharia Estrutural- 2006 (p.p 1744/1753)
- [6] BLESSMANN J. O Vento na engenheria civil .. Editora da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Brasil
- [7] ENGINEERING NEW RECORD.- septiembre 1993 (PP-19/20)1
- [8] LARSEN A. Aerodynamics of the Tacoma Narrow Bridge-Structural Engineering Vol. 10 nov. 4- 2000- (pp.243/248)