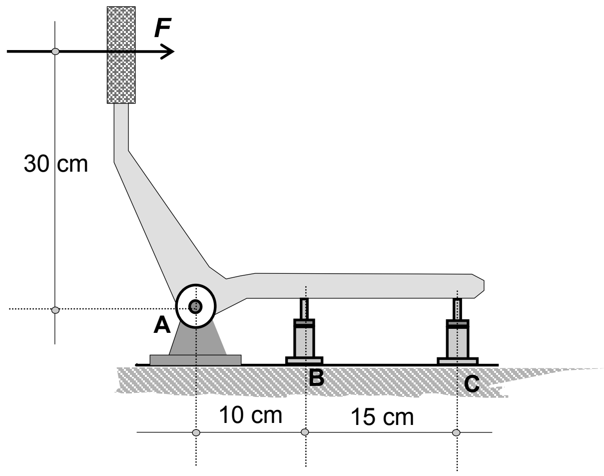
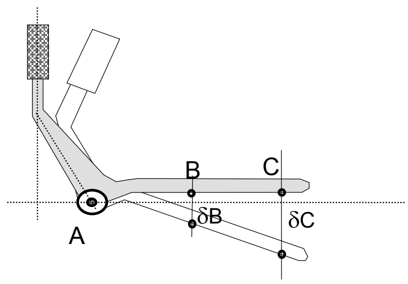
EJERCICIOS CON VINCULOS ELASTICOS

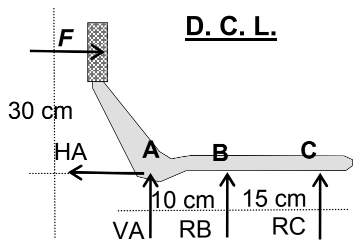
La palanca de la figura actúa sobre un par de muelles de igual coeficiente de elasticidad **K,** y se encuentra vinculada al punto fijo A mediante un pasador sin rozamiento. Se pide determinar el esfuerzo en el perno **A** y las reacciones en los apoyos elásticos **B** y **C,** generadas por la acción de la fuerza aplicada (F = 100 kg.)**.**



Se puede advertir claramente que la vinculación no es isostática. La falta de rigidez en los vínculos en B y C permiten una cierta rotación del cuerpo en torno del eje A. Por otro lado, si dichos vínculos fuesen idealmente rígidos la vinculación sería hiperestática (sobreabundante), y el problema presentaría cuatro incógnitas linealmente independientes (Caso de indeterminación estática). En la posición de la figura, antes de aplicar la carga, los muelles soportan solo el peso propio de la palanca, que suponemos despreciable de modo que podemos considerar a las reacciones RB y RC nulas para esa configuración inicial.



La acción de la fuerza F producirá una rotación del sistema alrededor del eje A, empujando hacia abajo los muelles y generando en ellos reacciones que serán proporcionales a los descensos de sus puntos de aplicación. Como se puede apreciar en la figura derecha tales desplazamientos δB y δC serán a su vez proporcionales a sus distancias de A.



Si suponemos una rotación arbitrariamente pequeña Ø, podemos escribir que:

δB = Ø . 10 cm → RB = ***k*** . Ø . 10 cm

δC = Ø . 25 cm → RC = ***k*** . Ø . 25 cm

De donde podemos extraer la relación RC = 2.5 RB

Ahora se puede considerar el equilibrio de momentos con respecto al punto A

Σ M/A = F . 30 cm - RB . 10 cm - RC . 25 cm = 0

Σ M/A = F . 30 cm - RB . 10 cm - 2.5 RB . 25 cm = 0

De donde queda: **RB = 2.42. F = 242 kg.** además **RC= 605 kg.**

Por sumatoria de proyecciones sobre ejes ortogonales *x* e *y,* se pueden calcular las componentes de la reacción en el pasador A., resultando:

HA = 100 kg. (Hacia la izquierda), y **VA = 847 kg.** (Hacia abajo)

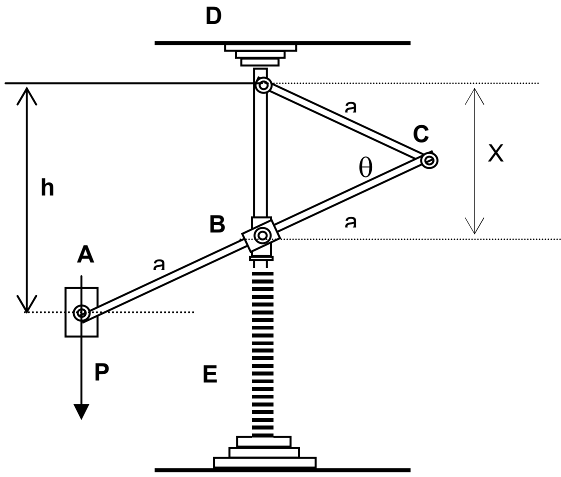
La reacción horizontal HA no necesita verificación, en tanto que las reacciones verticales en A, B y C pueden verificarse mediante una ecuación de momentos con respecto a cualquier punto distinto de A.

Como puede apreciarse la indeterminación surgida en principio por la presencia de una cuarta incógnita, queda salvada al introducirse una condición de proporcionalidad que vincula a las reacciones en B y C.

El problema podría presentar variantes tales como a) Determinar la posición de equilibrio o bien b) Determinar la relación que debería existir entre las constantes elásticas de los muelles B y C de manera que sus reacciones resulten iguales.

En el mecanismo de la figura el brazo AC, vinculado como se aprecia en la figura, soporta en un extremo un cilindro de peso P. El vinculo en B es una articulación que puede deslizarse a través de la corredera vertical comprimiendo al resorte de constante **k** , que se encontrará descomprimido para la posición correspondiente a $\theta = 0°$. Se pide determinar la configuración de equilibrio.

A medida que el extremo A de la barra vaya descendiendo por acción del peso P aplicado, la misma experimentará un giro del modo que indica la figura provocando a su vez un descenso del punto B, este desplazamiento irá comprimiendo el resorte hasta que la tensión ejercida por el mismo produzca el equilibrio del sistema. La cuestión estriba entonces en plantear las correspondientes condiciones de equilibrio en función del ángulo θ y la constante de elasticidad del resorte, **k.**



Si observamos el DCL de la barra AC podemos advertir que se trata de una pieza simplemente apoyada donde tanto la reacción producida por la biela DC como la que se desarrolle en el punto B estarán en función del ángulo θ de inclinación de dicha barra.

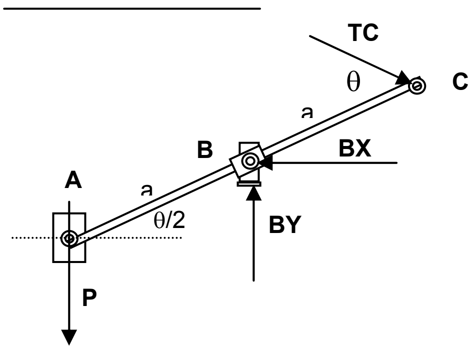
El valor de la componente vertical de la fuerza reactiva en B será función directa del acortamiento del resorte que estará dado por la magnitud X, cuyo valor es:

$X = 2.\ a.\ \text{Sen}\ \theta/2$; siendo entonces

$BY = k.\ X = k\ .\ 2.\ a.\ \text{Sen}\ \theta/2$

Si planteamos equilibrio de momentos respecto del punto B podemos escribir:

$\sum MB = P\ a\ \cos.\ \theta/2\ -\ TC\ a\ \text{sen}\ \theta = 0$



Si hacemos, por comodidad, $Ø = \theta/2$ la expresión queda, después de pasaje de términos y simplificando :

$P\ \cos Ø = TC\ \text{sen}\ 2Ø$; y como $\text{sen}\ 2Ø = 2 \cos Ø\ \text{sen}\ Ø$; finalmente

$T = P\ /\ (\ 2\ \text{sen}\ Ø\ )$

La componente vertical de T será, naturalmente $TY = T\ \ \text{sen}\ Ø$, es decir **$TY = P\ /\ 2$**

Y haciendo sumatoria de fuerzas verticales, el equilibrio exige que:

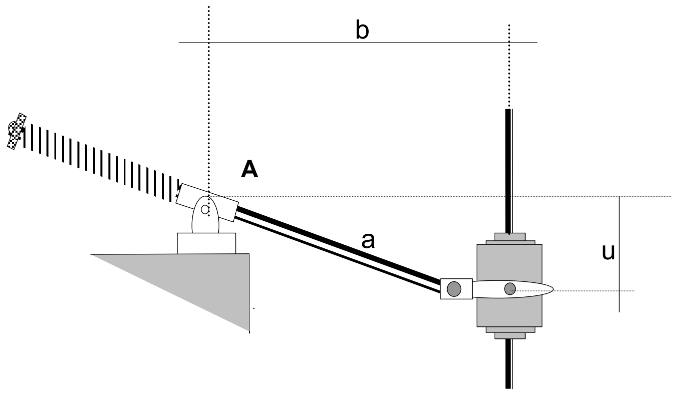
$P + TY – BY = 0$, de lo cual surge la expresión:

$P + P / 2 – 2\ a\ \ k\ \text{sen}\ Ø = 0$

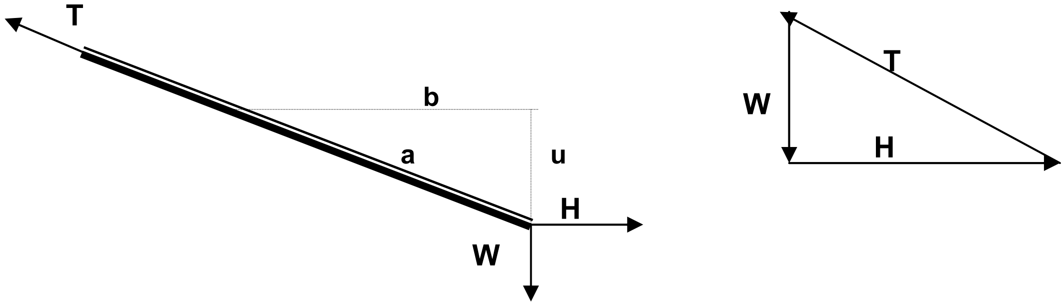
Por ultimo queda: $\text{sen}\ Ø = 3\ P\ /\ 4\ a\ k$, lo que es lo mismo que $\text{sen}(\ \theta/2) = 3\ P\ /\ 4\ a\ k$;

O finalmente **$\theta = 2\ \text{arc sen}\ (\ 3\ p\ /\ 4\ a\ k\ )$**

El cilindro de la figura puede desplazarse libremente a lo largo de la corredera. El apoyo en A sirve de tope para el resorte (de constante ***k***) pero permite el libre deslizamiento o rotación de la barra . Si dicho resorte se encuentra en reposo para la posición horizontal de la misma se pide determinar el descenso **u** que experimentará el cilindro, de peso **W ,** y que acción se ejercerá sobre el apoyo A.



El apoyo en A únicamente soporta la tensión ejercida por el resorte de manera que el DCL de la misma será:



La tensión en el resorte será $T = K.\,(a - b)$

A su vez $a^2 = b^2 + u^2$

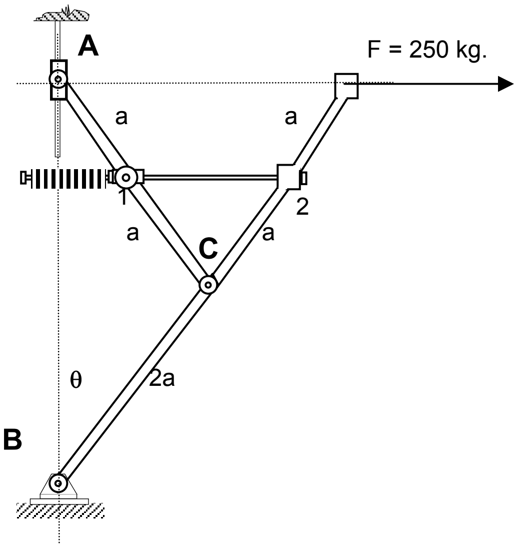
De manera que $T = \boldsymbol{K\,.\,(\sqrt{b^2 + u^2} - b)}$

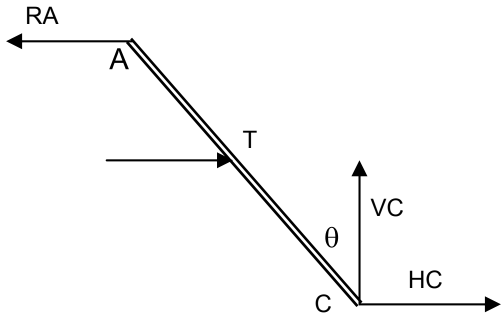
Por ecuaciones de proyección y utilizando relaciones geométricas podemos escribir que:

$W / u = T / a \rightarrow W / u = K\,.\,(a - b) / a = K\,.\,(1 - b / a)$

Y finalmente $\boldsymbol{W = u\,.\,K.\,(1 - b / \sqrt{b^2 + u^2})}$

Para el entramado de la figura cargado con la fuerza F de 250 kg se pide determinar la relación que existe entre dicha carga y el ángulo θ que define la configuración de equilibrio del sistema. El vínculo en A permite el libre desplazamiento vertical del brazo y además su rotación en torno de dicho punto. El vínculo en B es un pasador común y el resorte tiene una constante de elasticidad *K= 50 kg/cm.* Se supone que el resorte permanece en reposo cuando el ángulo θ es nulo (Posición vertical de la barra AC).





Sin necesidad de construir el DCL de todo el entramado puede advertirse rápidamente que la reacción RA = F.

Además, la tensión desarrollada por el resorte será igual a $K.\ \Delta$, siendo Δ la separación entre los puntos 1 y 2 del entramado.

Puede verse que $\Delta = 2 \,.\, a \,.\, \text{sen}\,\theta$, y que por lo tanto $T = K \,.\, 2 \,.\, a \,.\, \text{sen}\,\theta$

Además viendo el DCL de la barra AC, y tomando momentos con respecto al punto C tenemos:

$\sum M_C = RA \,.\, 2 \,.\, a \,.\, \cos\theta - T \,.\, a \,.\, \cos\theta = 0 \rightarrow 2 \,.\, RA = T$

De lo cual puede llegarse a la expresión:

$2 \,.\, F = 2.\ K.\ a \,.\, \text{sen}\,\theta$; y finalmente : $\mathbf{sen\,\theta = F / (\mathit{K} \,.\, a)}$