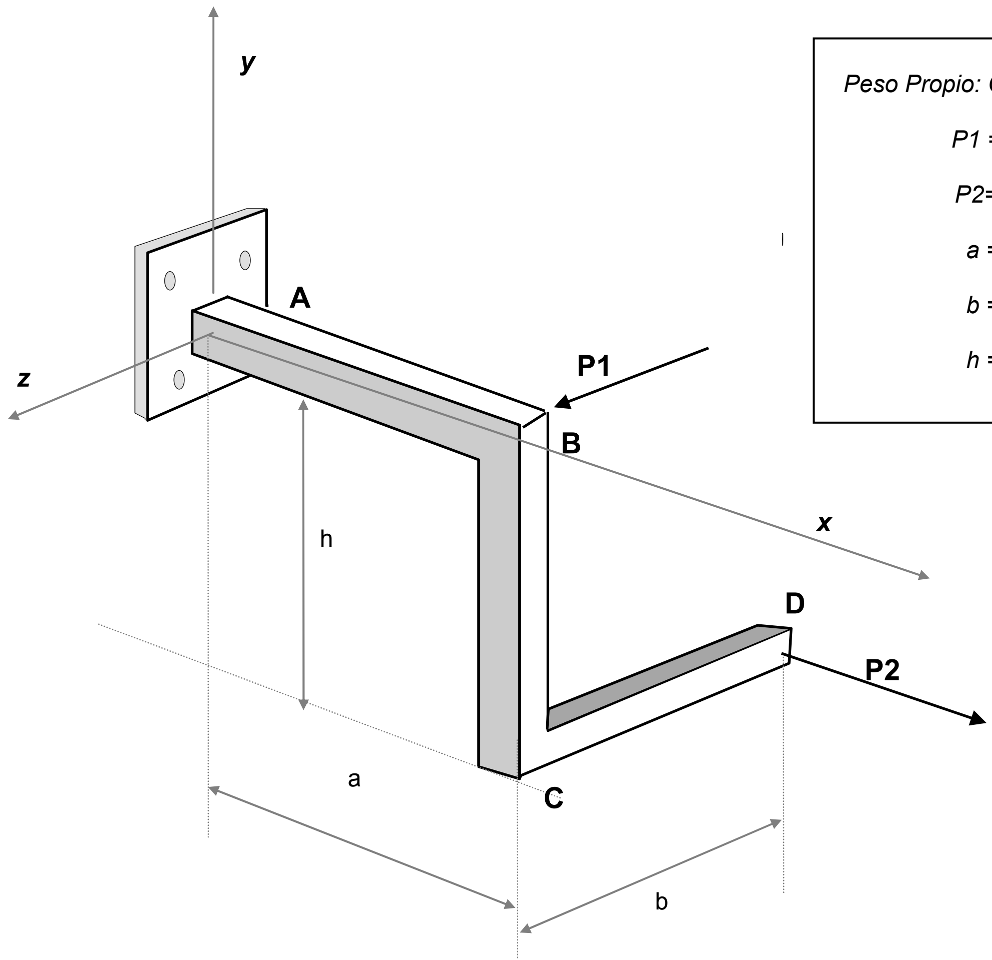
Caso General de Fuerzas en el Espacio:

REDUCCIÓN A UN SISTEMA FUERZA-PAR EQUIVALENTE:



Peso Propio: G= 1 tn / m.lineal

P1 = 5 ton

P2= 3 ton

a = 4 m

b = 3 m

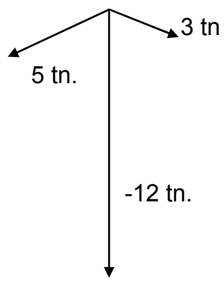
h = 5 m

La figura representa una pieza de material homogéneo y cuya sección transversal permanece constante a lo largo de la misma. El extremo A se supone perfectamente empotrado. Se pide:

- **Calcular el sistema fuerza-par equivalente que actúa referido al centro de reducción A.**
- **Calcular el ángulo entre ambos vectores y determinar el caso del que se trata.**
- **Determinar el Invariante Escalar y el momento "asociado" a la misma (Vector momento perpendicular a la dirección de la fuerza resultante), en magnitud y dirección.**
- **Hallar el eje central del sistema y su intersección (trazas) con los planos determinados por el sistema de referencia.**

CALCULO DE LA RESULTANTE (*Invariante Vectorial*)

Calcularemos en primer lugar las componentes de la resultante según las direcciones de los ejes coordenados y luego su magnitud total y dirección relativa a dichos ejes.



$Rx = \Sigma Fi\ x = 3$ tn.

$Ry = \Sigma Fiy = -4$ tn. -5 tn. -3 tn. $= -12$ tn.

$Rz = \Sigma\ Fiz = 5$ tn.

La magnitud de la resultante será

$R = \sqrt{Rx^2 + Ry^2 + Rz^2}$ = **13, 342 tn.**

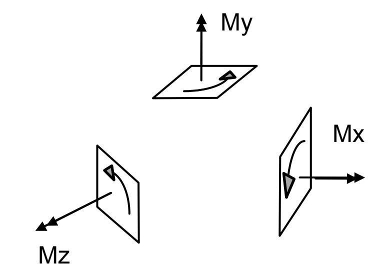
La dirección de la resultante arespecto de los ejes x, y, z estará dada por los cosenos directores, donde:

$Crx = Rx / R = 0{,}22486$; $Cry = Ry / R = -0{,}8944$ $Crz = Rz / R = 0{,}37477$

Debiéndose verificar, naturalmente, que $Crx^2 + Cry^2 + Crz^2 = 1$

DETERMINACION DEL MOMENTO RESULTANTE

El siguiente cuadro nos ilustra sobre la convención de signos, para los cuales, como se ve, adoptamos el llamado dextrógiro o más usualmente de la mano derecha.



Vectores representativos y sentidos de giro del momento

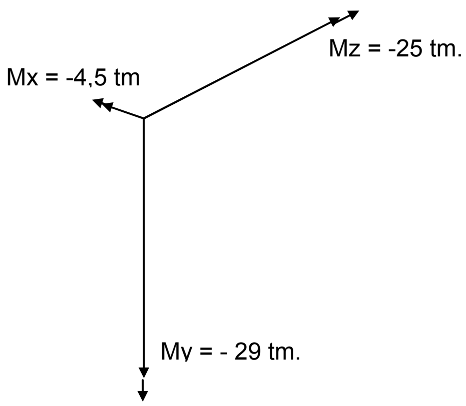
mx = = Σ Mix = - 3 tn . 1,5 m = **- 4, 5 tm**.

my = Σ Miy = - 5 tn. 4 m - 3 tn . 3 m =

= **-29 tm**

mz = - 4 tn. 2 m - 5 tn . 4 m + 3 tn 5 m –

- 3 tn 4 m = **- 25 tm.**



El valor del Momento resultante será:

$MR = \sqrt{mx^2 + my^2 + mz^2}$ = **38,552 tm.**

También la dirección del vector representativo del momento con respecto al sistema de ejes coordenados estará dado por los respectivos cosenos directores:

$Cmx = mx / MR = -0{,}11673$
$Cmy = my / MR = -0{,}75223$
$Cmz = mz / MR = -0{,}64848$

Por supuesto también deberá verificarse que $Cmx^2 + Cmy^2 + Cmz^2 = 1$

DETERMINACION DEL ANGULO ENTRE AMBOS VECTORES

El ángulo existente entre los vectores Fuerza resultante y Momento resultante es decisivo para conocer el tipo de caso en que nos encontremos: Recordemos que el **Invariante escalar** es la componente del vector momento en la dirección de la fuerza resultante o **invariante vectorial,** y que ambos componen lo que denominamos ***Conjunto torsor*** o ***Llave de torsión*** ; esto es un sistema compuesto por una fuerza y un par cuyos vectores son paralelos, lo que físicamente significa que ambos actúan en planos **perpendiculares,** constituyendo un sistema irreductible.

Si ambos vectores son perpendiculares, esto significa que el invariante escalar es nulo: la fuerza y el par resultante son coplanares y por lo tanto el sistema se puede reducir a una sola fuerza, ya que el momento resultante en ese caso depende exclusivamente de la distancia que existe entre la fuerza y el punto de reducción.

El ángulo entre dos vectores se determina a partir de la fórmula que indica que *"El coseno del ángulo existente entre dos vectores es igual a la suma del producto de los cosenos directores correspondientes"*

De manera que, si llamamos Ø al ángulo existente entre R y MR:

CØ = Crx . Cmx + Cmy . Cry + Cmz . Crz = 0,40731

Que corresponde a un ángulo **Ø = 65º 57' 49''**

DESCOMPOSICIÓN DEL MR

El MR (Momento Resultante) puede ser proyectado en dos direcciones rectangulares: una sobre la línea de acción de la fuerza y la otra según una dirección perpendicular a la misma.
Como ya se dijo la componente del MR en la dirección de la resultante es el llamado **invariante escalar.** (En adelante IE). Si se proyecta al MR sobre dicha recta de acción se tiene :

IE = MR . CØ = 38,552 . 0,40731 = **15,7027 tn**

Dado que el ángulo Ø es agudo la proyección del MR tendrá el mismo sentido que el de R. El par torsor que ambos componen será entonces positivo.
Por otra parte, la proyección del MR sobre una dirección perpendicular a la de la fuerza es la representación vectorial de un par o cupla "asociado" (*vinculado, ligado)* a la fuerza resultante.
Ese momento "asociado" (MA) será

MA = MR. Sen 65º57' 49'' = 38,552 . 0,91329 = **35, 209 tn**

(Debe verificarse por supuesto que $MR^2 = IE^2 + MA^2$)

La dirección del Invariante escalar ya sabemos que es la misma de la resultante. Para obtener la dirección del llamado momento asociado MA procederemos como sigue:

Sabemos que, expresando vectorialmente ***MR = IE + MA***

(Las operaciones vectoriales las indicaremos con ***negrita cursiva*** *)*

De lo cual surge que ***MA = MR – IE***

Escalarmente esto puede escribirse como:

MAX = MRX – IEX = MRX – IE. Crx

MAY = MRY -- IEY = MRY – IE. Cry

MAZ = MRZ -- IEZ = MRZ – IE. Crz

Cada componente del momento llamado "asociado "será igual a la diferencia entre la componente del momento resultante y la correspondiente al ***invariante escalar.***

Los cosenos directores de el momento asociado serán iguales naturalmente al cociente entre cada componente del mismo y su magnitud total.

Si aplicamos estas fórmulas, obtendremos que:

$Cax = -0{,}2281$; $Cay = -0{,}4225$; $Caz = -0{,}8772$

verificamos a su vez que $\sum$**Cai²= 1**

Si queremos tomar otro elemento de control podemos verificar que $\sum$ **Cai. Cri = 0 ,** es decir verificar la perpendicularidad entre el momento asociado y la resultante.

DETERMINACIÓN DEL EJE CENTRAL DEL SISTEMA.

Sobre el punto de reducción actúan entonces por un lado la resultante o invariante vectorial y por el otro un momento que a su vez tiene dos componentes de distinta naturaleza: una es el llamado invariante escalar, que es un momento que no depende ni del centro de reducción ni de la resultante y que es producido por un par o cupla que actúa en un plano perpendicular a la dirección de la fuerza, la otra componente es el momento estático de la fuerza resultante con respecto al punto de reducción, y que obviamente depende de la magnitud y de la distancia de la fuerza con respecto al mismo. Ese es al que hemos dado en llamar momento “ asociado”

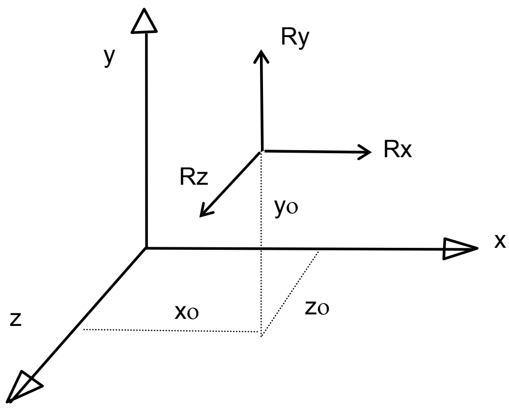
Variando la posición del centro de reducción se podrá encontrar alguno para el cual el momento asociado sea nulo. Por definición de momento estático se puede afirmar que, no siendo nula la resultante, es un punto de paso de la misma, es decir un punto de su recta de acción. A esa recta, que es el lugar geométrico de todos los puntos para los cuales el momento estático de la resultante (o momento asociado al centro de reducción) es nulo, se la denomina **Eje Central** o **Eje de Torsión** del sistema de fuerzas considerado.

Veremos cómo hallarlo:
Partiremos del hecho que ***MA = r x R*** , expresado como producto vectorial, donde ***r*** es el vector posición de la recta de acción de la fuerza respecto al centro de reducción. El vector ***r*** tendrá sus componentes ortogonales que llamaremos x_o, y_o y z_o. Podemos descomponer entonces la expresión vectorial señalada en tres ecuaciones escalares lineales:

$MAX = Rz \cdot y_o - Ry \cdot z_o$

$MAY = Rx \cdot z_o - Rz \cdot x_o$

$MAZ = Ry \cdot x_o - Rx \cdot Y_o$



Cada una de estas expresiones, dado que las componentes de R y de MA son conocidas, son ecuaciones de rectas que no son otra cosa que las proyecciones del eje central sobre los distintos planos de referencia, ello dado que en las mismas las variables x_o, y_o, z_o determinan la ubicación de todos los puntos de paso de la Resultante que verifican la condición de que su momento estático con respecto al centro de reducción sea precisamente el momento asociado ma.

En forma cartesiana, una recta queda definida por dos ecuaciones simultáneas de primer grado del tipo $y = m\,x + b$; $z = m_o\,x + b_o$, que vinculan linealmente a las tres variables. Y que representan las proyecciones de la recta espacial sobre los planos y,x y z,x respectivamente. De manera que tomando dos ecuaciones cualquiera de las tres indicadas anteriormente, tendríamos resuelto el problema y estaríamos en condiciones de determinar cualquier parámetro que se nos pidiera respecto a el eje central del sistema de fuerzas. Para nuestro caso se nos pide hallar las trazas de esa recta sobre los planos de referencia.

Tomando la primera ecuación, por ejemplo , tenemos

$max = Rz\, y_o - Ry\, z_o$; ecuación de una recta en el plano YZ.

Haciendo $y_o = 0$ obtenemos z_{ox} = -max / Ry
asimismo si $z_o = 0$ tenemos y_{ox} = max / Rz

Estos valores son las intersecciones de la proyección de la recta sobre el plano y,z con los ejes ortogonales respectivos., a su vez indican coordenadas de las trazas de la recta sobre el plano que forma cada uno de ellos con el eje x, de allí que podamos llamarlos z_{ox} e y_{ox}, respectivamente.
Aclarando, por ejemplo z_{ox} es la coordenada sobre el eje z de la traza de la recta sobre el plano ZX, en tanto que y_{ox} lo es para el eje y en el plano YX.

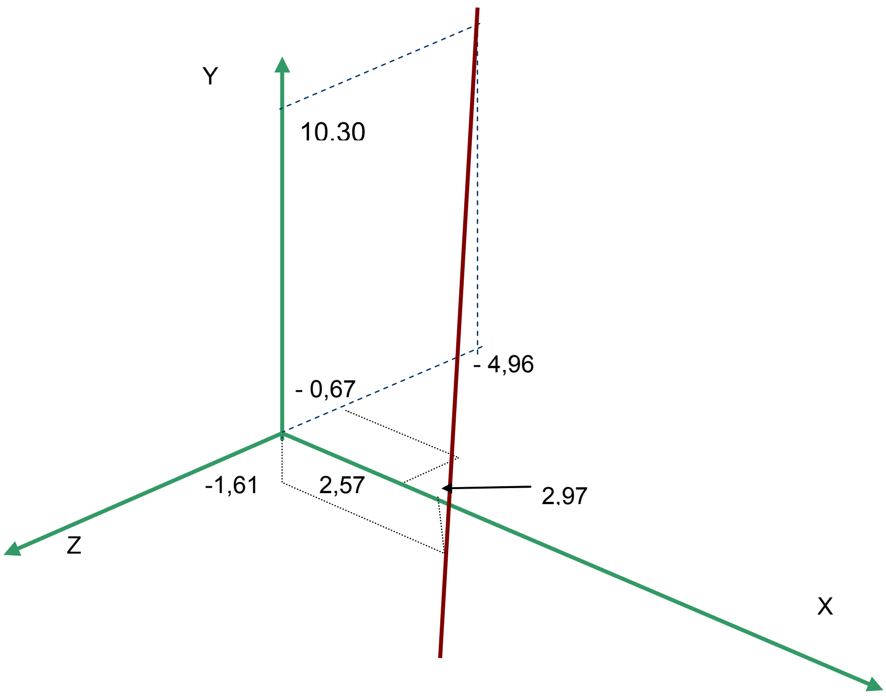
Operando de la misma forma podemos obtener por analogía el resto de las trazas faltantes. Conviene también reordenar las fórmulas de las mismas según el plano al que pertenecen, de la manera siguiente:

Denominaremos como (1°) al plano horizontal XZ, como (2º) al plano lateral XY y finalmente (3º) al plano frontal YZ, para identificar las coordenadas de las trazas del eje central sobre cada uno de tales planos.

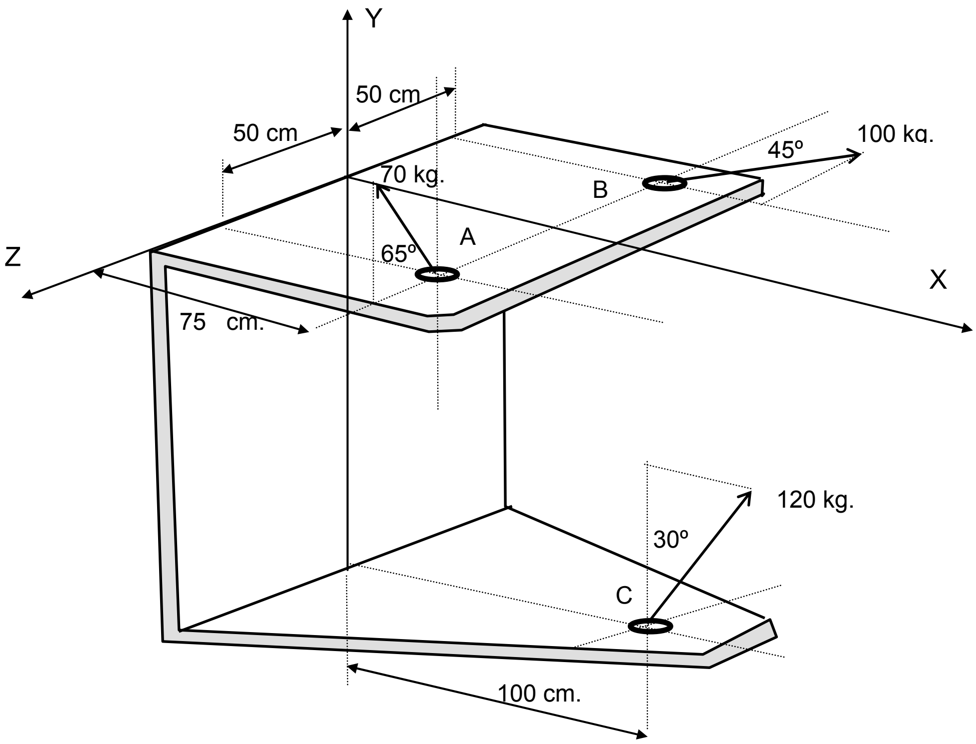
Plano XZ (I)	xo_1 = maz / Ry		zo_1 = -max / Ry
Plano XY(II)	xo_2 = - may / Rz	yo_2 = max / Rz	
Plano YZ (III)		yo_3 = -maz / Rx	zo_3 = may / Rx

Si reemplazamos por los valores obtenidos podremos confeccionar el siguiente cuadro:

1.Plano XZ	xo_1 = 2,5737	zo_1 = -0,6692
2.Plano XY	xo_2 = 2,9753	yo_2 = -1,606
3.Plano YZ	yo_3 = 10,295	zo_3 = -4,959



El sistema de cables amarrados al soporte en la forma que indica la figura, reducir el sistema de las fuerzas ejercidas por los cables tomando al punto O como centro de reducción.



Denominaremos a las fuerzas de acuerdo a su punto de aplicación. La fuerza A se desenvuelve en el plano YZ formando un ángulo de 65º con la horizontal, la fuerza B actúa horizontalmente y es bisectriz entre los ejes X y Z en tanto la última fuerza, C esta inscripta en el plano XY formando 60º con el primer eje.

1.- CALCULO DE LAS COMPONENTES RECTANGULARES

Siempre es conveniente descomponer primero cada una de las fuerzas en sus componentes según los ejes de referencia, considerando positivos los sentidos según la dirección de los mismos.

$A_x = 0$	$A_y = A.\ \cos 25º = 63{,}44$ Kg;	$A_z = A.\ \cos 65º = 29{,}58$ Kg
$B_x = B.\ \cos 45ª = 70{,}71$ Kg	$B_y = 0$	$B_z = B.\ \cos 45ª = -70{,}71$ Kg
$C_x = C.\ \cos 60º = 60$ Kg	$C_y = C.\ \cos 30º = 103{,}92$ Kg	$C_z = 0$

2.- DETERMINACION DE LA RESULTANTE (INVARIANTE VECTORIAL)

Las proyecciones de la resultante son iguales a las sumatorias de las proyecciones correspondientes de las componentes.
Así:

$RX = AX + BX + CX = 130{,}71$ *Kg*

$RY = AY + BY + CY = 167{,}36$ *Kg*

$RZ = AZ + BZ + CZ = -41{,}13$ *Kg*

La magnitud de la fuerza resultante será $R = \sqrt{130{,}71^2 + 167{,}36^2 + 41{,}13^2} = 216{,}30$ Kg

Los cosenos directores: *Denominaremos CRX al coseno del ángulo que forma la resultante con el semieje positivo x , y análogamente CRY y CRZ a los otros cosenos directores.*

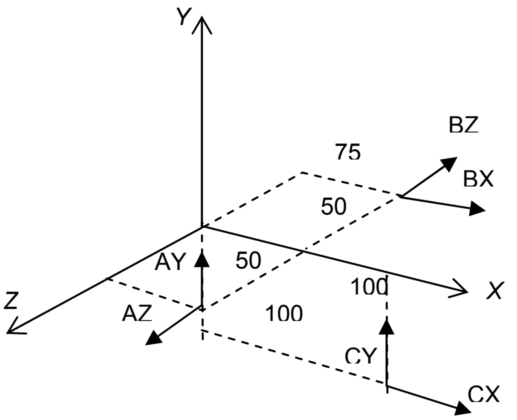
$CRX = RX / R = 130,71 / 216,30 = 0,60429$

$CRY = RY / R = 167,37 / 216,30 = 0,77374$

$CRZ = RZ / R = - 41,13 / 216,30 = -0,1905$

Deberá verificarse que $CRX^2 + CRY^2 + CRZ^2 = 1$

3.- CALCULO DE LOS MOMENTOS



MX = AY. 50 cm = 63,44 kg. 50 cm = 3172 kgcm

MY = BZ. 75 cm – BX. 50 cm = - 450,75 kgcm.

MZ = AY. 75 cm + CY. 100 cm + CX. 100 cm = 19564 kgcm.

El momento resultante MR será:

$MR = \sqrt{(3172)^2 + (-450,75)^2 + (19564)^2} = 19824,60$ kgcm

Los cosenos directores:

CMX = MX / MR = 0,16; CMY = MY / MR = - 2,27 E-02; CMZ = MZ / MR = 0,98685

4. - ANGULO ENTRE LA FUERZA Y EL MOMENTO RESULTANTES, Y DETERMINACION DEL INVARIANTE ESCALAR.

Utilizamos la fórmula de ángulo entre dos vectores dados sus cosenos directores: ***El coseno del ángulo entre dos vectores está dado por la suma del producto de sus cosenos directores correspondientes.***

Cω = CRX. CMX + CRY. CMY + CRZ. CMZ = - O,10855 Por lo cual **ω = 96º 14´**

El invariante vectorial estará dado por la relación:

IE = MR cos ω = -2152,06 kgcm.

5. - DETERMINACION DEL EJE CENTRAL O EJE DE TORSION

5. A) Valor de la componente del momento resultante perpendicular al invariante escalar. (Que nosotros llamamos “momento asociado” **MA)**.

MA = MR. $\sqrt{1 - C\omega^2}$ = 19707,44 kgcm

5. B) Para hallar las componentes del momento asociado MA en las direcciones de los ejes de referencia utilizamos las fórmulas:

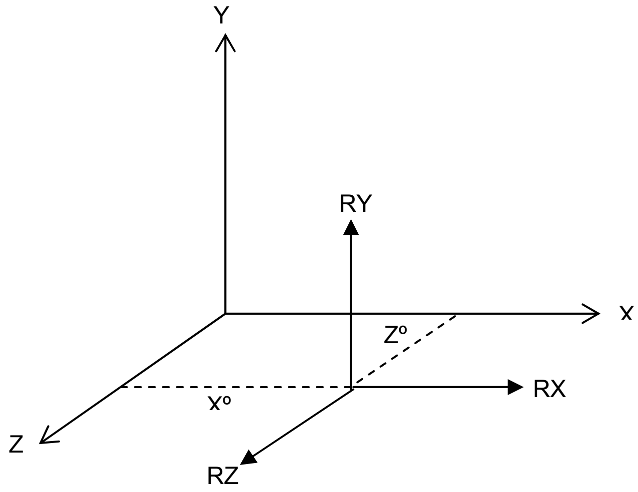
MAX = MX – IE. CRX → MAX = 4472,48 kgcm

MAY = MY – IE. CRY → MAY = 1214,38 kgcm.

MAZ = MZ – IE, CRZ → MAZ = 19154,78 kgcm.

Puede verificarse que $MA^2 = MAX^2 + MAY^2 + MAZ^2$

5. C.) Obtención de un punto de paso de la resultante: Elegimos ubicarlo sobre el plano horizontal " XZ "



Si ubicamos la resultante en el plano X Z podemos calcular las coordenadas del punto de paso sobre dicho plano (Xº y Zº) con las siguientes expresiones:

MAZ = RY. Xº → Xº = MAZ / RY = 19154,78 kgcm / 167,36 Kg. = 114,45 cm.

MAX =- RY. Zº → Zº = - MAX / RY = - 4472,40 kgcm / 167,36 Kg. = -26,72 cm.

Las coordenadas del de paso o **traza** de la recta de acción de la resultante en el plano X Z son:

Xº1 = 114,45 cm

Zº1= -26,72 cm

De la misma forma podemos obtener las coordenadas de la traza del eje central sobre, por ejemplo, el plano Y Z, que nos brindaran las expresiones:

Yº3 = - MAZ / RX = - 19154,78 / 130,71 = - 146,54 cm.

Zº3 = MAY / RX = 1214,38 / 130,71 = 9,29 cm.

Que son las trazas sobre el plano Y Z

Con esto queda perfectamente definido el eje central o de torsión del sistema de fuerzas. Igualmente puede definirse una tercera traza, sobre el plano X Y, que en este caso servirá como comprobación pues los tres puntos hallados deben ser, obviamente colineales.

En este caso da

Xº2 = 29,52 cm;   Yº2 = -108,74 cm

Llevando los valores obtenidos en un diagrama axonométrico