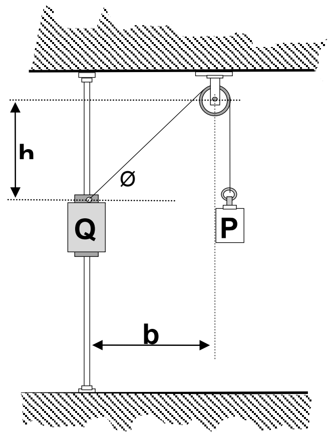
Hallar la relación entre las cargas P y Q con la geometría del sistema, en función de Ø, a efectos del equilibrio del sistema.

El cilindro de peso Q puede deslizarse libremente por la barra vertical y es capaz de sostener en la posición que se indica a la carga P a través del sistema de cable y polea que muestra la figura. Se suponen conocidas las magnitudes de P y Q, como también la distancia **b** entre los ejes de la barra vertical y la polea . Se considera despreciable el diámetro de la polea en relación a las otras medidas.

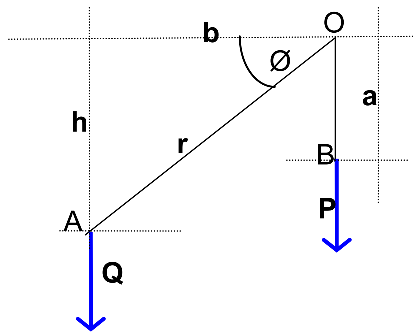


Si no se considera un eventual desplazamiento pendular del peso **P,** podemos lícitamente suponer que el sistema goza de un grado de libertad expresado en la posibilidad de deslizamiento del cilindro a lo largo de la corredera, con el consiguiente ascenso o descenso de la pesa suspendida del cable.

Recordemos que el primer paso para la aplicación del principio de los trabajos virtuales (PTV) consiste en darle al sistema un desplazamiento virtual, esto es un desplazamiento ideal, arbitrariamente pequeño y compatible con los vínculos.

A continuación es preciso determinar el desplazamiento de los puntos de aplicación de las fuerzas en correspondencia con la dirección de las mismas para luego calcular el trabajo producido por cada una de ellas. Finalmente, plantear la condición de nulidad de la sumatoria de los trabajos virtuales y despejar la incógnita o determinar las relaciones entre variables que nos interesen.

La determinación de los desplazamientos de los puntos de aplicación de las fuerzas puede hacerse de manera gráfico numérica o bien recurriendo al cálculo diferencial, que es lo que se hará a continuación.



La posición de los puntos A y B estarán determinadas por sus distancias verticales al punto O, eje de la polea. El desplazamiento virtual del sistema puede expresarse por el desplazamiento vertical del punto A, pasando a ocupar una posición tal que su distancia vertical de O varíe desde **h** a **h + δh**.

El trabajo producido por la fuerza Q a través de ese desplazamiento será naturalmente **Q . δh.**

Por su parte el punto de aplicación de **P**, el punto B, estará a una distancia **a** del punto O, y experimentará una variación **δa**. El trabajo producido por esa fuerza será igual a **P . δa**. El signo de este producto es **positivo** por cuanto un Incremento de la longitud de **a** producirá un trabajo positivo de la fuerza **P**. Ahora pondremos a δa en función de dh.

Si suponemos que la longitud total del cable desde A hasta B es de un valor L, y la longitud desde A hasta la polea en O es de un valor variable que llamamos **r** podemos escribir que:

$a = L - r$; a su vez $r = \sqrt{b^2 + h^2}$; con lo cual $a = L - \sqrt{b^2 + h^2}$

diferenciando nos queda $\delta a = - h \,.\, \delta h / \sqrt{(b^2 + h^2)} = - (h / r)\, \delta h = - \operatorname{sen} Ø \,.\, \delta h$

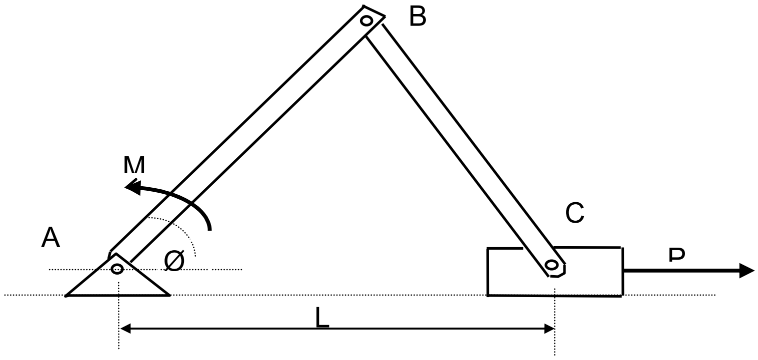
Cuyo signo, como vemos, es negativo ya que el incremento de **a** forzosamente tendrá sentido opuesto al de **h.**

Ahora podemos plantear la ecuación de trabajo que quedará:

$dU = Q \,.\, \delta h - P \,.\operatorname{sen} Ø \;\delta h = 0 \rightarrow Q - P \,.\, \operatorname{sen} Ø = 0$

o sea finalmente **sen Ø= Q / P**

Determinar la configuración de equilibrio de la estructura de la figura:



En primer lugar puede verse que la estructura tiene un grado de libertad que consiste en la posibilidad de extender o contraer la distancia entre sus apoyos, lo que provocará a su vez una variación del ángulo Ø.

El trabajo que realizará el momento aplicado en A, producido por una variación virtual del ángulo será *M dØ,* de signo positivo ya que ambos, momento y rotación, tienen el mismo sentido. En tanto, el trabajo virtual que realizará la fuerza *P* será igual a *P dL,* , también positivo por similares consideraciones [1].

Como puede verse: *L = 2 a cos Ø*

De donde la variación de la luz entre apoyos puede expresarse en función de la variación angular del siguiente modo:

$$dL = - 2\, a \,\mathrm{sen}\, Ø .\, d\, Ø$$

El signo negativo de la expresión se desprende del hecho que un incremento del ángulo Ø provoca una disminución de *L*.

De modo que la ecuación que expresa el principio de los trabajos virtuales será

$$dU = M\, d\, Ø - P\, 2\, a\, \mathrm{sen}\, Ø\, d\, Ø = 0$$

De donde la expresión que establece la configuración de equilibrio será:

~~~~~~~~~~~~~

$$\mathrm{sen}\, Ø = \frac{M}{2\, a\, P}$$

~~~~~~~~~~~~~

Se ha llegado a una expresión de carácter genérico, lo que sirve para poner de manifiesto la gama de posibilidades en cuanto al planteo del problema que puede ser presentado, como en este caso, como de configuración, pero que también podría haber sido de simple equilibrio presentando como incógnitas a P o a M, o a ambos (Problema de relación).

También puede modificarse el problema cambiando el sistema de cargas. Por ejemplo aplicando una carga vertical en un punto cualquiera. (Figura 1). En ese caso:

[1] Hay que tener presente que cuando hablamos de *incremento diferencial* este supone siempre un *aumento* en la magnitud de la variable. Para determinar el signo del trabajo se deberá tener en cuenta entonces si el alargamiento de la longitud de L produce trabajo positivo o negativo.

$dU = F\,dh + P\,dL = 0$

Esta es la expresión del trabajo virtual. Las variables h y L, indicativas de las posiciones relativas de F y de P, respectivamente, pueden ser puestas ambas en función del ángulo Ø mediante las siguientes relaciones:

$h = d \operatorname{tg} Ø;$ $L = 2\,a \cos Ø$

y las expresiones de su variación infinitesimal serán

$dh = d \sec^2 Ø\, dØ$ y $dL = -2\,a \operatorname{sen} Ø\, dØ$

Aplicando estas expresiones en la ecuación de trabajo virtual podemos obtener la relación final:

~~~~~~~~~~~~~~~~

$$\frac{\sec^2 Ø}{\operatorname{sen} Ø} = \frac{2\,P\,a}{F\,d}$$

~~~~~~~~~~~~~~~~

Si la carga F estuviera aplicada en el vértice B (Figura 2), entonces la expresión resultante sería:

~~~~~~~~~~

$$\operatorname{tg} Ø = \frac{F}{2\,P}$$

~~~~~~~~~~

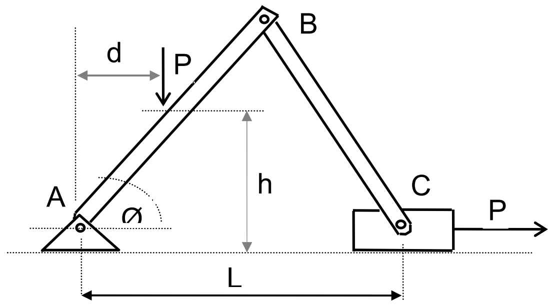


Fig. 1

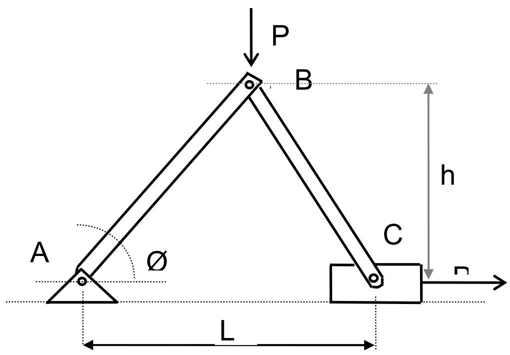
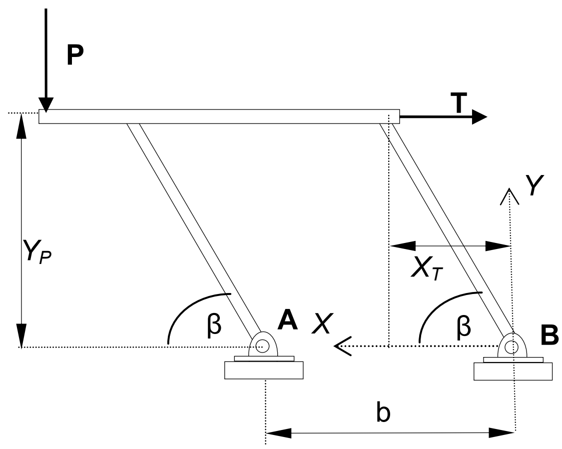


Fig. 2

Veamos ahora otro ejercicio de configuración de equilibrio. En este caso se trata de una viga horizontal sometida a dos cargas puntuales P y T, una vertical y otra horizontal aplicadas cada una en extremos opuestos. La barra se vincula a tierra mediante dos bielas inclinadas. Se trata evidentemente de un sistema con un grado de libertad. Como siempre, el método consiste en provocar un desplazamiento virtual y vincular los trabajos producidos por las fuerzas actuantes según el mismo, tomando naturalmente como punto de partida la hipótesis del equilibrio.



Desde el punto de vista del trabajo nos interesan los desplazamientos que experimenten los puntos de aplicación de las fuerzas en la dirección de las mismas, poniendo estos en función de una variable que, como en este caso el ángulo ß, determina la configuración geométrica del sistema.

Nos interesará entonces la variación de altura de la fuerza P en función de ß, y el desplazamiento horizontal de la fuerza T también vinculada a dicho ángulo.

Tomaremos como referencia un par de ejes ortogonales, orientados como se ve en la figura y con centro en B, que es un punto fijo del mecanismo.

La distancia vertical de P y su variación en función de ß será:

yp = a sen ß por lo cual dyp = a cos ß dß

A su vez la distancia horizontal de T y su variación serán:

xt = a cos ß de modo que dxt = - a sen ß dß

Estamos en condiciones de aplicar el principio de los trabajos virtuales.

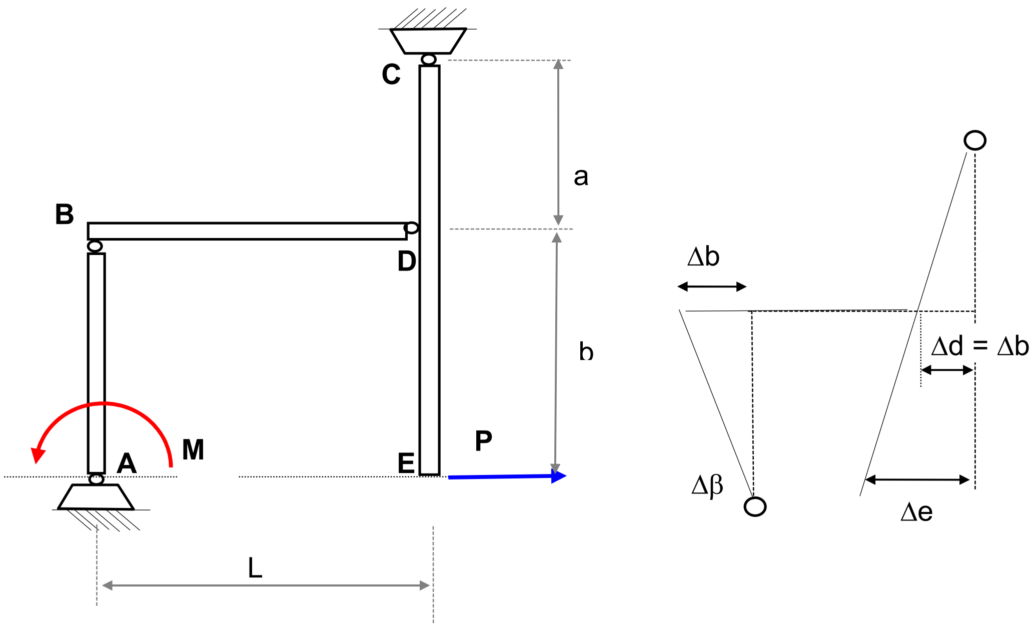
dU = - P dyp - T dxt

Ambos trabajos negativos puesto que las direcciones de ambas fuerzas tienen dirección contraria a las de sus coordenadas relativas al punto B. Reemplazando a dyp y dxt por las expresiones halladas anteriormente se tiene:

dU = - P a cos ß dß + T a sen ß dß = 0

resolviendo esta ecuación llegamos a que $\boxed{\text{tg ß = P/ T}}$

En la estructura de la figura, determinar la relación entre M y P a efectos del equilibrio.



Por acción del momento M se produciría una rotación de la barra AB en torno de la articulación A, describiendo un ángulo $\Delta\beta$ en el mismo sentido de M. Este movimiento a su vez provocará un desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza P. Observando el mecanismo es fácil de ver que el punto E se desplazará horizontalmente y en sentido contrario al de la fuerza P. De manera que la ecuación de trabajos quedará:

$dU = M.\ \Delta\beta - P\ dE = 0$

Toda la cuestión ahora radica en relacionar el desplazamiento dE con la rotación $\Delta\beta$. Para ello podemos emplear cálculo diferencial, como en los casos anteriores, o bien apelar a relaciones geométricas, que parece ser lo conveniente en este caso. Viendo el esquema de desplazamientos podemos ver perfectamente que:

$\Delta B = \Delta\beta\ b$ a su vez $\Delta D = \Delta B = \Delta\beta.\ b$

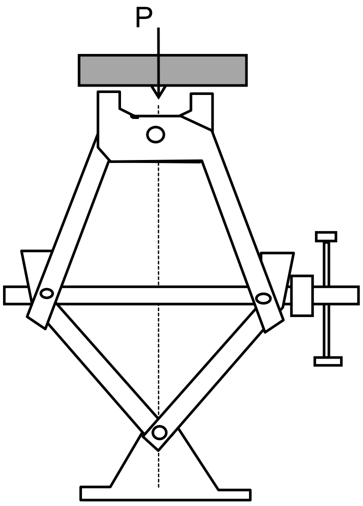
$\Delta E / (a + b) = \Delta D / a = \Delta\beta.\ b / a$ por relación de triángulos
resolviendo:

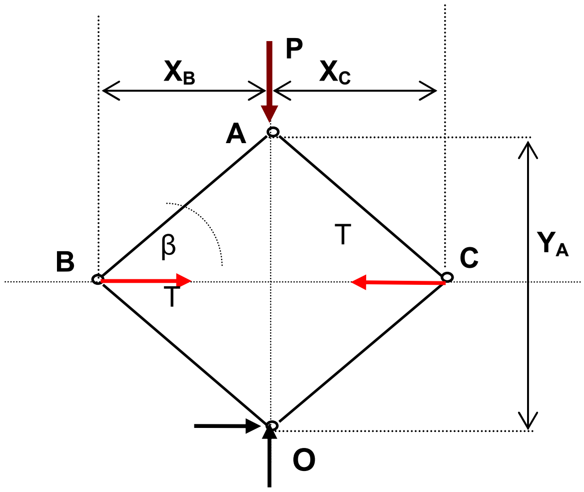
$$\Delta E = \Delta\beta.\ b\ (a + b) / a$$

Si reemplazamos en la ecuación de trabajo y operamos, llegamos a que

$$M/P = b\ (a + b) / a$$

Este problema podría haberse presentado como de cálculo de reacciones colocando una biela horizontal en E. Obviamente la reacción tendría el valor de P. Esto nos muestra con suma claridad las ventajas que tiene la resolución cinemática en relación al método estático para la resolución de problemas que incluyen sistemas de cuerpos vinculados como en este caso.





Para la pieza de la figura se pide determinar la tensión que se desarrollará en el tirafondo horizontal para la posición que se indica. Esta tensión se pone de manifiesto actuando sobre la pieza como dos fuerzas iguales y de sentido contrario que actúan sobre los pernos B y C.
Si tomamos al ángulo β como la variable que determina la configuración geométrica del sistema, al darle a éste un incremento d β el sistema experimenta un desplazamiento virtual que levantará la carga P un cierto d Y_A, mientras que los puntos B y C se desplazarían un d Xb y d Xc cada uno hacia el centro del sistema.
Puede verse de este modo que el trabajo de las fuerzas T será positivo, en tanto la carga P habrá desarrollado un trabajo negativo.
Sin embargo al poner el trabajo de cada una de las fuerzas en función del desplazamiento de sus puntos de aplicación es necesario considerar a cada uno de estos en forma independiente y en relación al punto fijo que sirve como referencia.[2]
De manera que, suponiendo a estos incrementos en valor absoluto (esto significa siempre positivos y produciendo un *aumento* de la magnitud de la variable), la ecuación de trabajo quedaría:

$dU = - P\ d\,Ya - T .\ d\,Xb - T .\ d\,Xc$

Ahora sólo debe ponerse a d Ya , d Xb y d Xc en función de ß, reemplazar y despejar la incógnita correspondiente.

$Ya = 2\,a\ \text{sen}\ ß$, tomando como centro de ordenadas el punto O

$d\,Ya = 2\,a \cos ß\ dß$

$Xb = a \cos ß \qquad d\,Xb = - a\ \text{sen}\ ß\ dß$

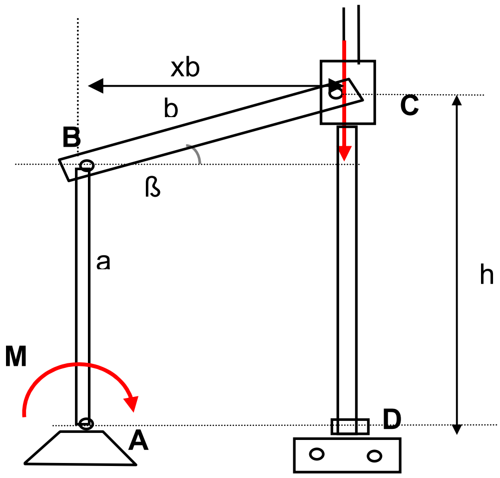
$Xc = a \cos ß \qquad d\,Xc = - a\ \text{sen}\ ß\ dß$

$dU = - P\ 2\,a \cos ß\ dß + 2\,T\,a\ \text{sen}\ ß\ dß$

y despejando tenemos, finalmente $T = P / \text{tg}\ ß$

[2] *La discusión del signo es como sigue: Un incremento de la variable Ya produce una elevación del punto A y por lo tanto un trabajo negativo de la fuerza P. Análogamente, el incremento de las variables Xb y Xc desplazará a los puntos B y C respectivamente en sentido contrario al de las fuerzas T aplicadas sobre cada uno de ellos.*

En el mecanismo de la figura se debe calcular el Momento M a aplicarse sobre el punto A, de tal modo que el émbolo C, de peso P, que se desplaza a lo largo de la corredera vertical CD , se mantenga en la posición que se indica.



Trabajaremos con valores genéricos de manera de poder apreciar las posibles variantes del problema.
La primer cuestión estriba en vincular analíticamente los desplazamientos virtuales correspondientes a M y al peso P. El desplazamiento del bloque sobre la corredera provocará una inclinación de la barra AB que girará sobre el perno en A. Si suponemos que el bloque desciende es evidente que el giro de la barra vertical será de sentido antihorario. Si el trabajo de P resulta positivo, por lo tanto, el que realice el momento será negativo.

Utilizaremos como variable al ángulo ß, que determina la inclinación de la barra BC y permite establecer la posición del sistema. La altura del punto de aplicación de P viene dado por la expresión

$h = a + b \text{ sen } ß$, por lo cual $dh = b \cos ß \, dß$

El trabajo de P será **Up = - P. b cos ß dß**, negativo, porque un incremento positivo de la variable elegida ß produce un aumento de la altura a la que se sitúa el punto C, cuyo desplazamiento, entonces, tiene sentido contrario al de la fuerza P.

El desplazamiento - giro - virtual de la barra AB puede determinarse observando que una variación del ángulo ß producirá un corrimiento del punto B puesto que el otro extremo de la barra BC permanece sobre una misma vertical por sus condiciones de vínculo. La distancia del punto B a esa vertical será igual a la proyección de la longitud b sobre la horizontal (xb)
Entonces si $xb = b \cos ß$, resultará $dxb = - b \text{ sen } ß \, dß$. (Es evidente que un aumento del ángulo produce una disminución de la proyección horizontal).

El giro $d\omega$ que experimente la barra vertical AB estará dado por la relación $d\,xb / a$, es decir que
$d\omega = - b \cos ß \, dß / a$. El signo negativo indica que una variación en un sentido (horario u antihorario) del ángulo β produce un giro en sentido contrario del ángulo ω.

Dicho trabajo será **Um = M b sen ß dß / a**, positivo, porque M tiene sentido horario y un giro antihorario de β (incremento positivo) produce un giro contrario de ω coincidiendo con el sentido de M.

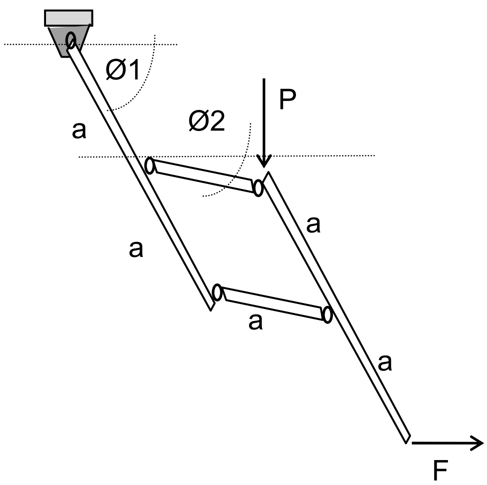
$dU = - P \, b \cos ß \, dß + M \, b \text{ sen } ß \, dß / a = 0$

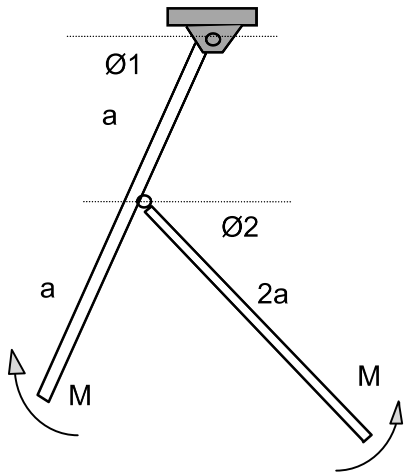
despejando M y ordenando convenientemente nos queda que:

$$M = P\,a \,/\, \operatorname{tg} \beta$$

Los dos problemas que se representan en las figuras, tienen como particularidad que son mecanismos con dos grados de libertad, pues puede verse que los ángulos Ø1 y Ø2 son arbitrarios e independientes uno del otro. Si suponemos conocidas las cargas el problema se trata de configuración de equilibrio, es decir determinar la posición del mecanismo de tal modo que el sistema de fuerzas actuante esté en equilibrio.

para ambos casos el procedimiento es como sigue: En primer lugar se deben determinar los corrimientos de los puntos de aplicación de las cargas en correspondencia con ellas, para poder plantear la ecuación de trabajo. Dichos corrimientos estarán expresados en función de las variables que determinan la posición o geometría del sistema mecánico en su conjunto. El número de estas variables independientes será, naturalmente, el de los grados de libertad que cuente dicho mecanismo. Para estos dos casos que ahora vemos, como se dijo, son dos grados de libertad. Se deberán plantear tantas ecuaciones de trabajo como variables haya, cada una en función de una de ellas.





Tomemos el primer problema. El trabajo virtual será $dU = P\,dy_p + F\,dx_f = 0$

y_p y x_f son coordenadas de los puntos de aplicación de las fuerzas en relación a puntos fijos, en correspondencia con la dirección de las mismas, y puestas en función de las variables Ø1 y Ø2. Serán:

$y_p = a.\ \operatorname{sen} Ø1 + a \operatorname{sen} Ø2$ $\qquad$ $x_f = 3\,a\ .\ \cos Ø1 + a.\ \cos Ø2$

Primero se plantea una ecuación de trabajo en función de Ø1 siguiendo el procedimiento conocido y suponiendo que Ø2 queda constante:
Entonces

$dy_p = a \cos Ø1\, dØ1$; y $dx_p = -\,3\,a.\ \operatorname{sen} Ø1\, dØ1$

$dU(Ø1) = P\,a \cos Ø1\, dØ1 - F.\ 3\,a.\ \operatorname{sen} Ø1\, dØ1 = 0$

Del mismo modo puede plantearse la ecuación en función de Ø2, que quedaría:

$dU(Ø2) = P\,a \cos Ø2\, dØ2 - F\,a \operatorname{sen} Ø2\, dØ2 = 0$

las cuales resolviendo separadamente arrojan como resultado final:

$\operatorname{tg} Ø1 = P / 3F$ $\qquad$ $\operatorname{tg} Ø2 = P / F$

Para el segundo problema rigen exactamente los mismos conceptos, pero aquí hay que prestar más atención al tema de los signos. La ecuación de trabajo quedaría:

$dU = Q1\ dy1 + Q2\ dy2 - M1\ dØ1 - M2\ dØ2$

$y1 = a\ \text{sen}\ Ø1;\ \ y2 = a\ \text{sen}\ Ø1 + a\ \text{sen}\ Ø2$

$dy1\ (Ø1) = a \cos Ø1\ dØ1;\ \ dY1\ (Ø2) = 0$

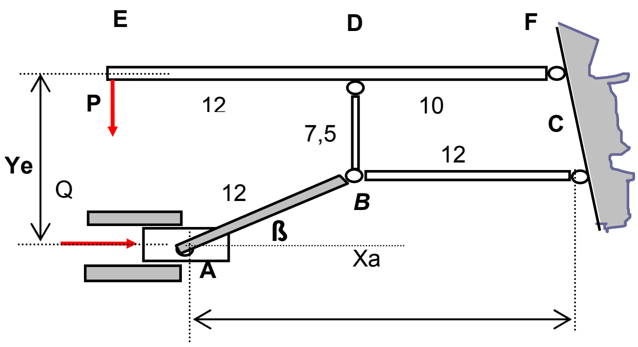
$dy2\ (Ø1) = a \cos Ø1\ dØ1\ ;\ \ dy2\ (Ø2) = a \cos Ø2\ dØ2$

las ecuaciones de trabajo, suponiendo además que M1 = M2 = M, y que ambas barras son del mismo peso, Q1=Q2= Q

$dU\ (Ø1) = 2\ Q \cos Ø1\ dØ1 - M\ dØ1 = 0 \quad \rightarrow \quad \cos Ø1 = M / 2\ Q\ a$

$dU\ (Ø2) = Q \cos Ø2\ dØ2 - M\ dØ2 = 0 \quad \rightarrow \quad \cos Ø2 = M / Q\ a$

Veamos ahora el siguiente problema: Se debe determinar la relación entre el esfuerzo a realizar sobre el Pistón a efectos de mantener en la posición de la figura al sistema mecánico indicado en la misma.



En primer lugar debemos poner los desplazamientos virtuales de los puntos A y D, en correspondencia con los esfuerzos Q y P aplicados sobre los mismos, en función de la variación del ángulo ß.

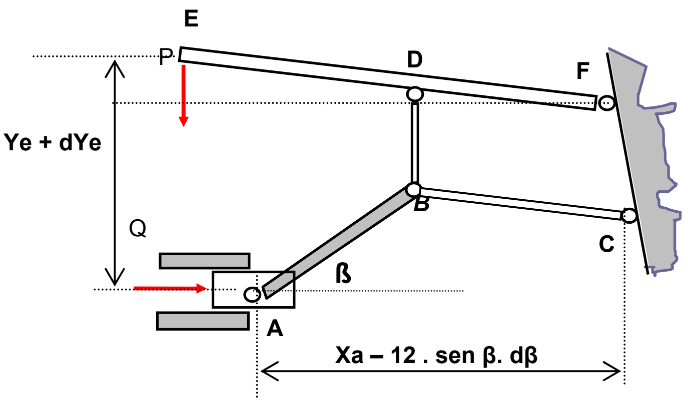
La posición del punto de aplicación de Q, que llamaremos xa, puesta en función del ángulo ß será xa = 12 m cos ß + 12 m , es decir que tomamos como referencia a la proyección horizontal de la distancia entre A y el punto fijo C.

$dxa = -12\ \text{sen}\ ß\ dß$; y el trabajo de Q será $dUq = Q\ 12\ \text{sen}\ ß\ dß$

La posición de P en relación al ángulo ß merece especial atención
Un incremento del ángulo ß provocará un ascenso del punto B y consiguientemente del extremo superior D de la barra vertical. Esta a su vez empujará hacia arriba a la barra EF, que girará en torno a la articulación en F.

Llamando dYe, dYd y dYb a los corrimientos de los puntos E, D y B, respectivamente, el corrimiento del primero será
dYe = dYd . 22 / 10
(por relación de triángulos como puede deducirse de la figura inferior),
y como dYd = dYb , entonces: dYe = dYb . 2,2
como Yb = 12 . sen β resulta dYb= 12 cos β dβ, de manera que dYe = 26,4 cos β dβ

El trabajo virtual de P será dUp = - P . 26,4 cos β. dβ



Eltrabajo virtual total será dU = 12 Q. sen β . dβ – 26,4 P cos β. dβ = 0

de donde finalmente **Q = 2,2 . P / tg β**