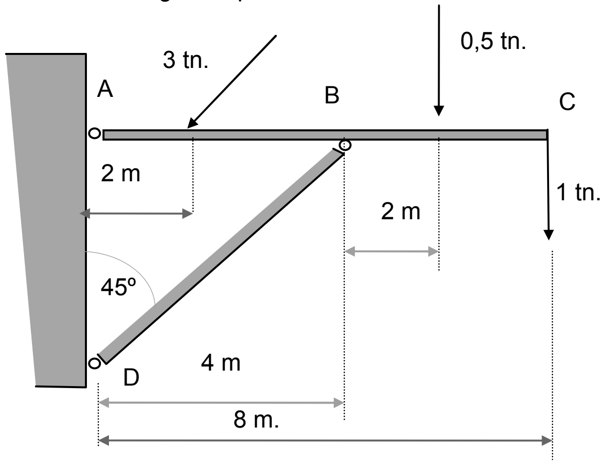
EJERCICIOS DE BARRAS SIMPLES

Para la ménsula de la figura se pide calcular los esfuerzos que se desarrollan en el pasador en A y en la biela BD a efectos del equilibrio.

En primer lugar es siempre necesario un detallado estudio de la estructura y su vinculación así como también el sistema de cargas al que esté sometido.



Vemos así que se trata de una barra ABC vinculada a una pared mediante una articulación en A y por una biela DB. Se trata pues de una barra horizontal simplemente apoyada. La caracterización como biela de esta última se debe no a su forma de barra recta biarticulada sino al hecho de no recibir cargas propias, ya que este es el requisito necesario y suficiente como para que pueda ser considerado o tratado como vínculo y no como parte se la estructura en sí. Esto quiere decir que resolviendo la viga horizontal tenemos resuelto **todo** el problema.

Una vez analizado el problema se procede al trazado del Diagrama del Cuerpo Libre. Este paso es tan imprescindible como estratégico ya que se trata de la interpretación del problema presentado gráficamente. El DCL es el dibujo de la estructura aislada (libre) en la cual sus vínculos están reemplazados por sus acciones.

Los DCL pueden ser simples , de una sola barra o elemento estructural, o compuestos por varias piezas vinculadas entre sí. En este caso tendremos que dibujar sólo la barra AC y las fuerzas activas y reactivas que sobre ella actúan. Las fuerzas activas en este caso son un dato directo del problema , (*como vemos se trata de un caso general, es decir de un sistema plano de fuerzas no concurrentes)* .y las fuerzas reactivas, que son justamente las incógnitas de este problema, dependen de la naturaleza y el tipo de vinculo que las producen.

En nuestro caso la articulación en A, que puede ser un pasador- es un vínculo de segundo orden, es decir que restringe dos grados de libertad a través de un fuerza reactiva de la cual sólo conocemos su punto de aplicación, más no su magnitud y dirección. Estas son en realidad las incógnitas de la reacción Ra. Pero si trabajamos con una magnitud y dirección como incógnitas, la ecuación o el sistema a resolver contendrá variables trigonométricas como incógnitas, lo cual puede complicar algo su resolución. Lo que se hace entonces es reemplazar la fuerza reactiva Ra por dos componentes ortogonales, una horizontal y otra vertical, que llamamos Ha y Va respectivamente.

El otro vínculo es la barra BD, que como vimos se comporta como una biela y cuya reacción es una fuerza Rb cuya línea de acción está determinada por ambas articulaciones. De manera que es una fuerza con una dirección perfectamente definida y sólo debemos calcular su magnitud.

Con esos elementos definidos podemos construír nuestro DCL, que como dijimos no es un mero auxiliar del cálculo sino la representación misma del problema expresado en en un esquema. Por ello es que el mismo debe ser claro y completo y en él deben constar todos los datos suficientes y necesarios para la resolución del problema

Con el DCL a la vista, podemos abordar la resolución del problema:

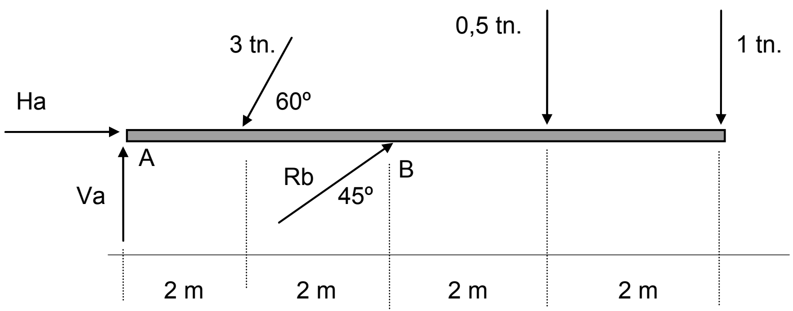


DIAGRAMA DEL CUERPO LIBRE

Ya hemos visto que el problema responde al caso general de fuerzas en el plano, aunque en realidad podríamos intentar reducir el sistema activo calculando su resultante (que puede ser, como se recordará, una fuerza o un par en el caso que no haya equilibrio) para luego proceder a equilibrarla con las fuerzas reactivas Ra y Rb.. Este procedimiento en general no es recomendable ya que la determinación de la resultante del sistema activo importa de por sí un volumen de cálculo significativo no reportando por otra parte ninguna ventaja del punto de vista metodológico y su empleo no se justifica de ningún modo.

La condición para que un sistema de fuerzas cualquiera esté en equilibrio es que la resultante sea nula y que no exista par o cupla : En otras palabras que los vectores representativos de la Fuerza resultante y del Momento resultante sean nulos
Si como en este caso el sistema es coplanar, conque haya un punto con respecto al cual se verifique la nulidad del momento es suficiente para afirmar que no existe cupla, pues el valor de esta es constante

para cualquier punto del plano en el que se desarrolla.
Para que la resultante sea nula, como esta es una condición vectorial, se deben cumplir dos condiciones escalares, que pueden ser dos ecuaciones de proyección sobre distintos ejes o bien una de proyección y otra de momento con respecto a cualquier punto , o bien dos ecuaciones de momentos, en este caso con respecto a puntos no alineados con el primero.

En este caso nos conviene tomar tres ecuaciones de momentos con respecto a los puntos A, B y D respectivamente, pues cada una de esas ecuaciones nos permitirá despejar directamente una incógnita. Tomaremos como sentido positivo de momentos al giro horario. Aclaremos que esta convención es absolutamente arbitraria y que además podemos modificarla para cada ecuación que tomemos. Por razones de practicidad, no obstante, puede ser conveniente adoptar un única convención para todo el problema.

$\sum M / A = 0 \rightarrow$ 3 tn. Sen 60º 2 m + 0,5 tn. 6 m. + 1 tn . 8 m - Rb. Cos 45º 4 m = 0

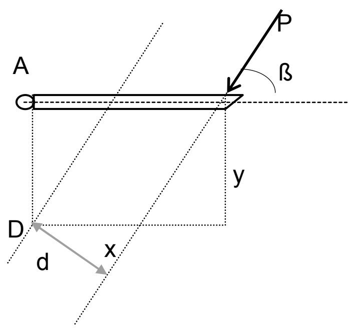
de aquí : **Rb = 5,72 tn**

$\sum M / B = 0 \rightarrow$ - 3tn sen 60º 2m + 0,5tn. 2m. + 1tn. 4m + Va. 4m = 0

de donde: **Va = 0,05tn.**

Para calcular la sumatoria de l momentos con respecto al punto D, lo que nos proporcionaría directamente la reacción Ha, haremos una pequeña consideración sobre el calculo del momento de la fuerza de 3tn.

El momento de la fuerza P respecto del punto D será **P sen ß . x - P cos ß y** , es decir que el momento de la fuerza es igual a la suma de momentos de sus componentes



Si ordenamos la expresión anterior tendríamos

MP/a = P (x. Sen ß - y . cos ß)

donde esta última expresión no es sino la distancia de la fuerza respecto al punto D (observar la figura). Es útil tener presente este pequeño concepto para cuando se tienen que calcular momentos de fuerzas inclinadas cuyas ambas componentes producen momentos.
Aplicamos esa formulita y tendremos:

$\sum M / D = 0 \rightarrow$ Ha . 4m + 3 tn (2 m sen 60º - 4m. cos 60º) + 0,5 tn. 6m + 1 tn 8 m = 0

Ha = -2,54 tn.

Es muy importante la verificación de los valores obtenidos. En este caso, y dado que para el cálculo se utilizaron ecuaciones de momentos, se pueden utilizar las ecuaciones de proyección sobre dos ejes ortogonales . Aclaramos aquí que por razones de simplicidad utilizamos generalmente los ejes x e y ortogonales y rectos (es decir el eje y vertical), pero que podríamos en realidad utilizar un par de ejes cualquiera, es decir inclinados y no ortogonales.

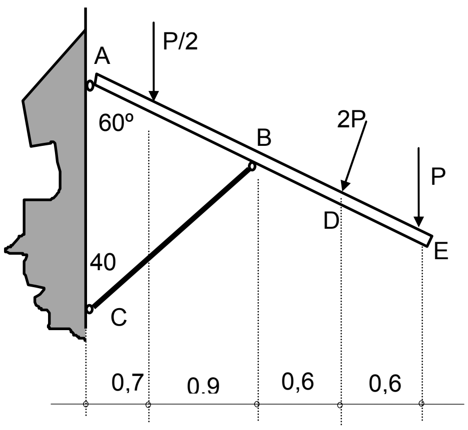
$\sum Fx = 0 \rightarrow$ Ha - 3 tn cos 60º + Rb. Cos 45º =
= -2,54 tn - 3 tn. Cos 60º + 5,72 tn. Cos 45º = 0,00465 tn $\rightarrow$ Buenas condiciones

$\sum Fy = 0 \rightarrow$ Va - 3 tn. Sen 60º + Rb. Sen 45º - 0,5 tn. - 1 tn. =

= 0,05 tn - 3 tn sen 60º + 5,72 sen 45º -1,5 tn = 0,003 tn → Buenas condiciones

Con esto queda verificado el resultado.

Calcular la reacción en la articulación en A y el esfuerzo en la barra BC.



La fuerza P vale 2 TN.

Como se ve, se trata de una viga inclinada que se vincula a la pared por medio de una articulación y de una biela. Es por lo tanto una estructura isostática. Por otro lado puede observarse que el sistema de fuerzas activo pertenece al caso general de fuerzas en el plano.

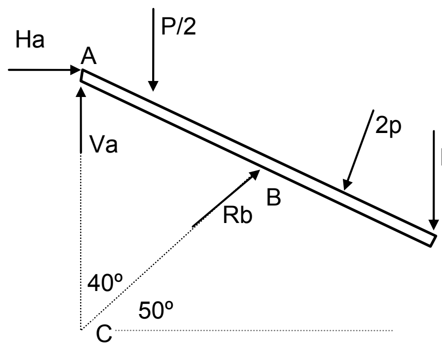
.

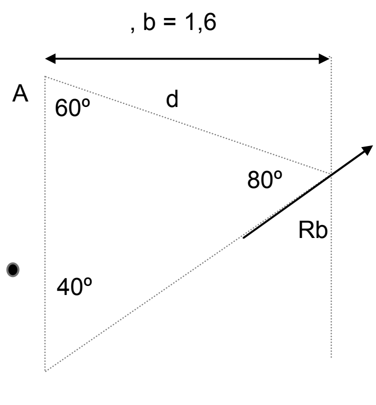
La condición de equilibrio de un sistema de fuerzas exige que $\sum F = 0$ y $\sum M=0$, es decir que no exista fuerza resultante ni momento. Analíticamente estas condiciones se expresan mediante tres ecuaciones: que pueden ser de proyección (hasta dos), o de momentos, que se elegirán según se considere más conveniente.

En este caso y observando el DCL vemos que, por ejemplo tomando momento con respecto al punto A podemos despejar directamente Rb, y haciendo lo propio con respecto a C, obtendríamos Ha. Finalmente, una tercera ecuación, esta vez de proyección sobre un eje vertical nos permitiría la determinación de Va.
Supondremos positivos los momentos con sentido horario.

Antes de continuar nos detendremos para puntualizar el modo de calcular el momento de Rb con respecto al punto A

DIAGRAMA DEL CUERPO LIBRE:





El momento de Rb con respecto al punto a sera
MRb/ A = Rb . d . sen 80º (*Fuerza x distancia : o, hablando con mayor propiedad: producto vectorial de la fuerza por el vector posici'on)*

Vemos que b es la proyección de d sobre la horizontal de manera que
d . sen 60º = b = 1,6 m
por lo cual d= 1,6 m / sen 60º

Entonces:
MRb / A = Rb, 1,6 . sen 80º / sen 60 º

(*Expresión que puede tomarse como una fórmula para calcular momentos de fuerzas que actúan sobre barras inclinadas*)

.

Procedemos entonces a efectuar los cálculos indicados:

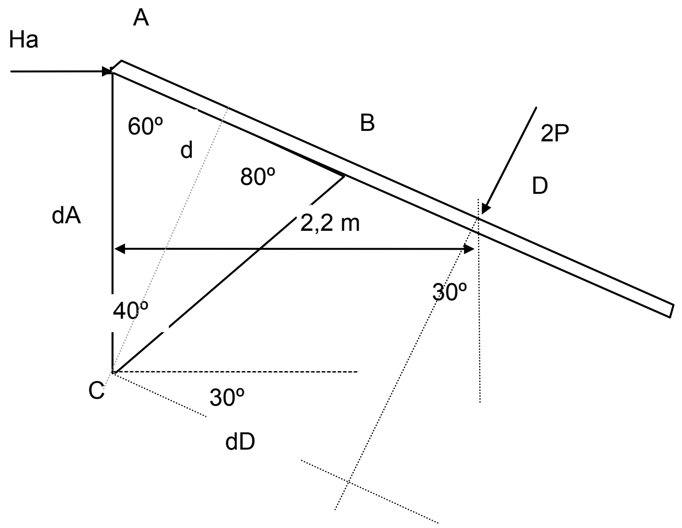
$\sum M / A = -$ Rb . 1,6.m Sen 80º / sen 60º + P/2 . 0,7 m + 2P. 2,2 m / sen 60º + P. 2,8 = 0

Como dijimos, de aquí se despeja directamente -→ **Rb = 9,05 tn.**

Ahora tomamos momento con respecto al punto C

$\sum M / C =$ Ha . d**A** + P/2 0,7 m + 2P.. **dD** + P 2,8 = 0

Hay que determinar dA. y dD, Dibujamos un esquema solo con los elementos que nos interesan



Recordando que d era igual a 1,6 m / sen 60 y aplicando el teorema del seno se puede calcular dA,

d / sen 40º = dA / sen 80º

de es modo queda

dA = 1,6 . sen 80º / (sen 40º . sen 60º

dA = **2,831 m**

Determinación de dD:: observando atentamente la figura vemos que esta distancia será:
dD = 2,2 m / cos 30 - dA cos 60º **= 1,125 m**

El momento con respecto al punto C queda entonces:

$\sum M / C =$ Ha . 2,831 + P/2 0,7 m + 2P.1,125 + P 2,8 = 0

de donde **Ha = - 3,817 tn.**

Y finalmente Va sale de una ecuación de proyección

$\sum Fy = -$ (P / 2 + 2P cos 30º + P) + Rb cos 40º - Va = 0

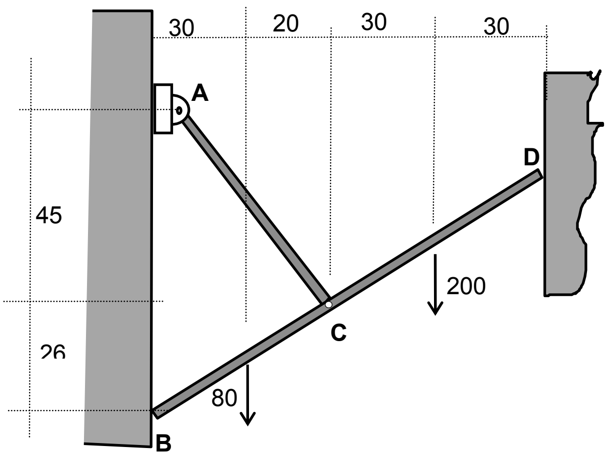
Va = - 0,46 tn.

Naturalmente quedaría por verificar los resultados con alguna otra ecuación de momento o, por ejemplo de proyección sobre el eje horizontal.

$\sum Fx =$Ha + Rb sen 40º - 2P sen 30= 0

Como se ve, en este ejercicio, como infinidad de problemas que pueden suscitarse, desde el punto de vista estrictamente estático es sumamente sencillo, presentándose las mayores dificultades, en este caso, en la determinación de las distancias a efectos del cálculo de los momentos, debiendo para ello recurrir a la geometría o trigonometría como herramientas auxiliares pero indispensables para poder resolver el problema estático.

En la estructura de la figura se pide calcular las reacciones en los apoyos sin tener en cuenta la fricción en los apoyos B y D. Las medidas están en cm.



ANALISIS DE LA ESTRUCTURA

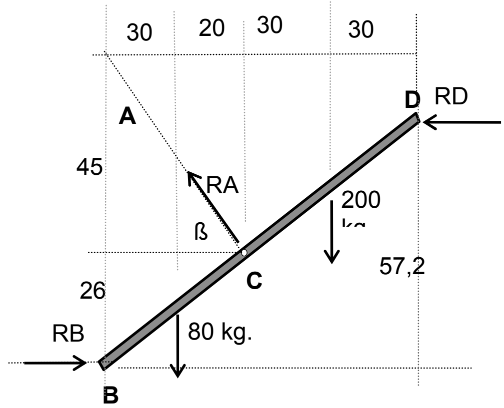
Se trata de una barra suspendida de una biela, y sus movimientos se encuentran trabados por la presencia de dos muros que impiden, como se ve, que la barra BC gire en sentido horario.

El dispositivo de la figura, tal como está presentado no es isostático, no obstante si el sistema de cargas tiende a provocar un desplazamiento que es impedido por los vínculos. resultará que el sistema de cargas activas podrá ser equilibrado por las reacciones de los mismos.
(*Un problema es* ***estáticamente determinado*** *cuando el sistema de cargas que actúa sobre un sólido tiende a producir un desplazamiento* ***incompatible*** *con los vínculos, es decir cuando* ***el equilibrio puede ser determinado***)..

RESOLUCION:

En primer lugar, dibujamos el Diagrama del Cuerpo Libre, consignando en él todos los datos (distancias, ángulos, etc.) que pudieran hacernos falta para el cálculo.

Antes de hacer ningún tipo de anotación, es conveniente observar atentamente el DCL a efectos de tomar una idea general del problema y concebir un planteo de resolución del mismo. En este caso tenemos una única barra sometida a la acción de un sistema de fuerzas que corresponde al caso general de modo que - como estamos ante un problema de equilibrio - necesitamos plantear las tres ecuaciones correspondientes.
Como dos de las incógnitas son horizontales podemos plantear una ecuación de equilibrio de fuerzas proyectadas sobre un eje vertical y así obtener directamente RA.
Las otras dos incógnitas podemos obtenerlas con sendas ecuaciones de momentos con respecto a los puntos B y D, utilizando para ello la incógnita RA ya hallada. O bien
tomar como centros a los puntos A y C, eliminando así la
incógnita ya calculada.



El ángulo ß, que forma RA con la horizontal, surge de la relación tg ß = 45 cm / 50 cm = 0,9 con lo cual es **ß= 41º 59' 14"**

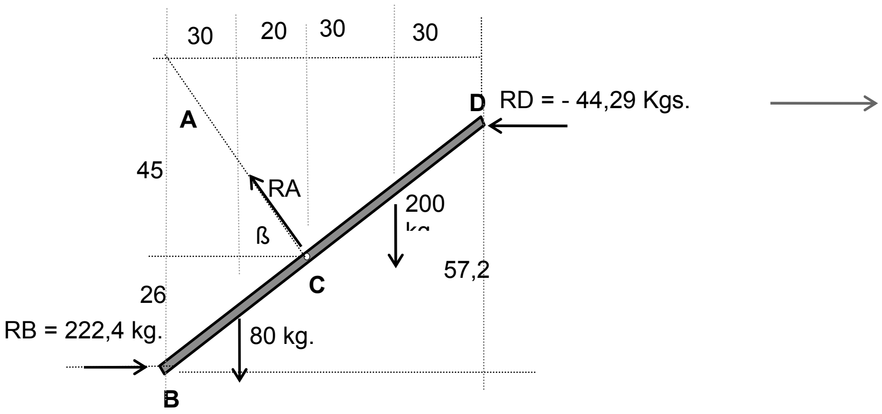
Entonces ΣFy = RA sen ß - 280 kg. = 0 → RA = 280 kg. / sen ß = 280 kg. / 0,66896 = **418,56 kg.**

Para calcular las reacciones horizontales elegiremos como centros de momentos a los puntos A y C, con lo cual conseguiremos formar un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Si lo hacemos con los puntos B y D podremos hallar las incógnitas de a una y en forma independiente pero arrastrando eventuales errores por cálculo o por redondeo en el valor de RA.

Convencionalmente supondremos positivos el sentido horario:

$\sum$ M/A= RD . 13, 8 cm + 200 kg. . 70 cm + 80 kg. . 30 cm. - RB . 71 cm = 0 → 71 . RB - 13,8 . RD = 16 400

$\sum$ M/C = - RB . 26 cm - 80 kg. 20 cm + 200 kg. 30 cm. - RD. 31,2 cm. = 0 → 26 RB + 31,20 RD = 4400
Resolviendo este sistema de ecuaciones (*) llegamos a que
RB = 222,38 kg. y que RD = **- 44,29 kg.**



Obsérvese que la reacción RD es de valor negativo, por lo tanto su sentido es contrario al que hemos supuesto al construir nuestro DCL. Ahora bien, dicho sentido es obligatorio, es decir que por la forma y tipo de apoyo no puede desarrollarse en el mismo otra reacción en dirección y sentido que no sean los propuestos.
Esto significa que el sistema tal como está tiene un diseño incorrecto. Lo que ocurrirá es que la barra BD tenderá a deslizarse hacia abajo sobre el paramento AB. hasta que finalmente quede colgando en posición vertical. Como vemos entonces el sistema de fuerzas que actúa sobre el mecanismo origina un desplazamiento **compatible** con los vínculos por lo tanto la barra se mueve. Para la posición del diagrama entonces el sistema NO ES DETERMINADO.

A partir de esta conclusión podemos encarar dos diferentes problemas:
a) Modificar el sistema de cargas de manera tal que el sistema sea determinado., o bien ver si existe alguna otra posición de la barra BD para el cual el equilibrio sea posible.
b) Proponer modificaciones en los apoyos que asegure el equilibrio.