Estructuras Espaciales Simples: Equilibrio

La pieza mostrada en la figura puede girar libremente sobre el pasador A, que además no impide desplazamientos según su eje. Para el sistema de cargas indicado, se pide determinar las reacciones en los apoyos A y D.

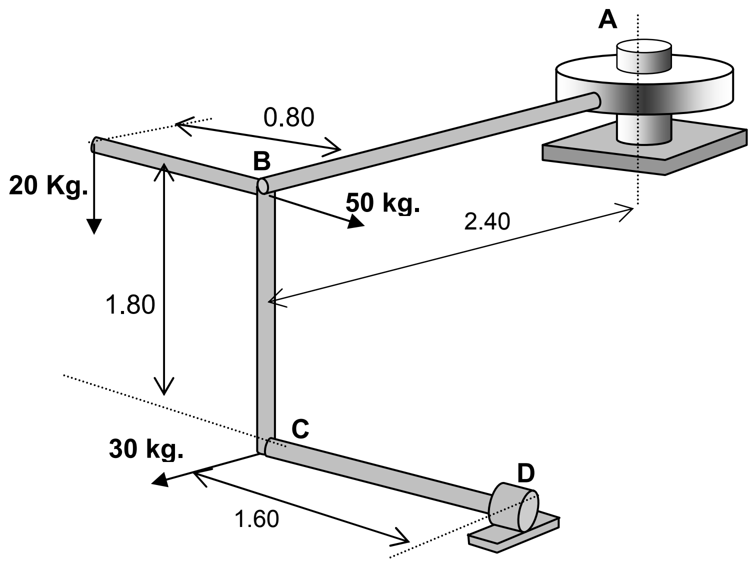
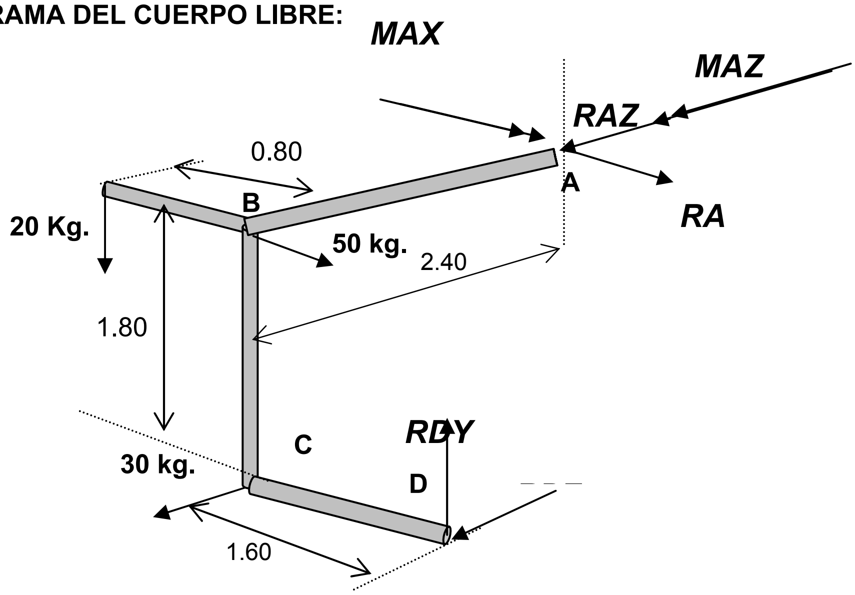


DIAGRAMA DEL CUERPO LIBRE:



$\sum FX = AX + 50\ kg = 0 \rightarrow AX = -50\ kg$

$\sum FY = DY - 20\ kg = 0 \rightarrow DY = 20\ kg$

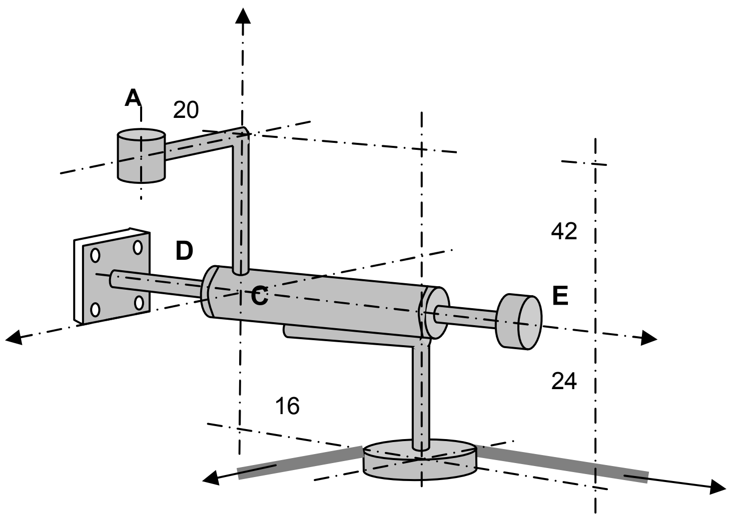
$\sum M(AY) = -\ 1.60\ m.\ DZ + 50\ kg\ .2{,}40\ m = 0 \rightarrow DZ = 75\ kgm$

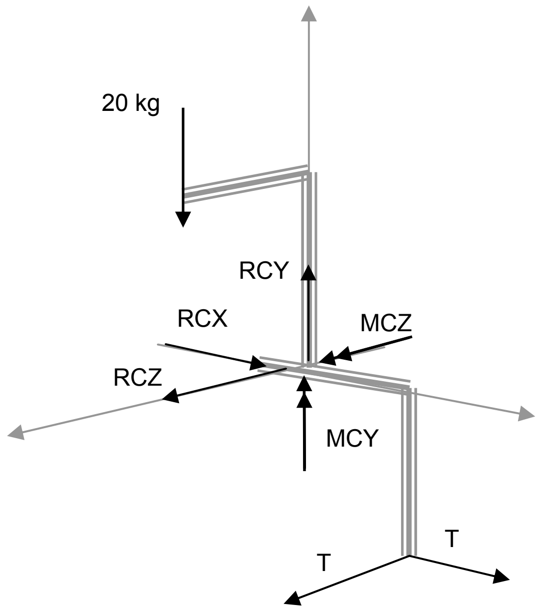
$\sum FZ = AZ + 30\ kg + DZ = 0 \rightarrow AZ = -\ 105\ kgm$

$\sum M(AX) = 20\ kg.\ 2{,}40\ m - 30\ kg\ 1{,}80\ m - DZ.\ 1{,}80\ m - DY\ 2{,}40\ m + MAX = 0 \rightarrow MAX = 189\ kgm$

$\sum M(AZ) = 20 \text{ kg } 0.80 \text{ m} + DY\ 1.60 \text{ m} + MAZ = 0 \rightarrow MAZ = -48 \text{ kgm}$

El contrapeso en A sirve para regular la tensión T de la cinta aplicada a la rueda horizontal B. Tanto la barra acodada AC como su similar BC, están soldadas al cilindro C, que puede girar libremente sobre el eje ED, pero no puede desplazarse en la dirección del mismo impedido por la acción del tornillo en E que ajusta los topes de desplazamiento. Se pide determinar la tensión en la cinta suponiendo un peso de 20 kg para el contrapeso en A de tal manera que la pieza conserve la posición indicada en la figura. Se deberá también calcular las reacciones suponiéndolas aplicadas en el punto C.





$\sum M(CX) = 20 \text{ kg} \cdot 20 \text{ cm} - T \cdot 24 \text{ cm} = 0$

T = 16,67 kg

$\sum FX = 0 \rightarrow RCX + T = 0$

RCX = -16.67 kg

$\sum FY = 0 \rightarrow RCY - 20 \text{ KG} = 0$

RCY = 20 kg

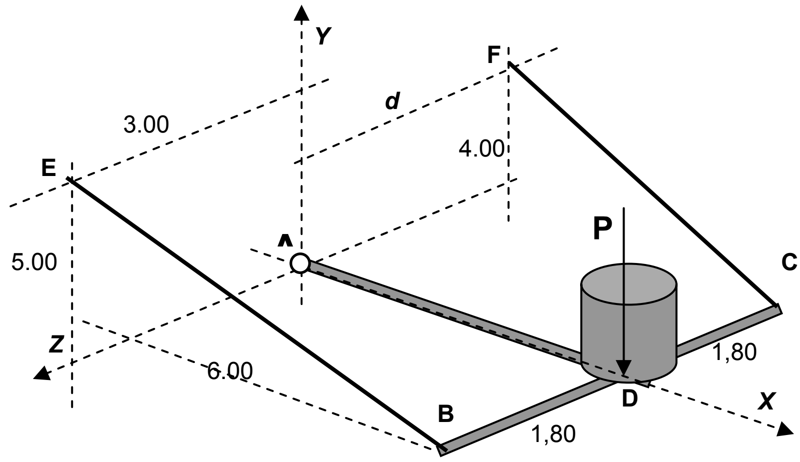
$\sum FZ = 0 \rightarrow RCZ + T = 0$:

RCZ = -16.67 kg

$\sum M(CZ) = 0 \rightarrow T.\ 24 \text{ cm} + MCZ = 0 \rightarrow$ **MCZ = -400.8 kgcm**

$\sum M(CY) = 0 \rightarrow -T.\ 16 \text{ cm} + MCY = 0 \rightarrow$ **MCY = 266.72 kgcm**

El cilindro de la figura pesa 180 kg y esta apoyado como muestra la figura. Se pide determinar la distancia *d* a la cual debe fijarse el cable CF para que el sistema esté en equilibrio.



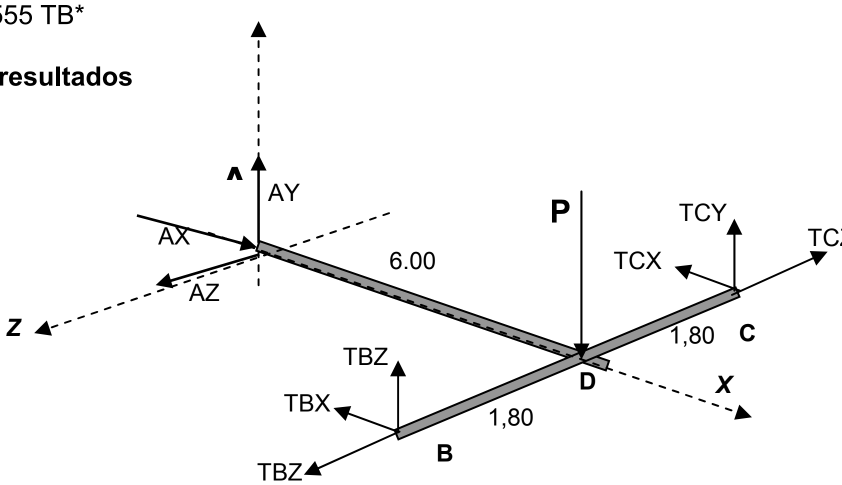
1.- Determinación de las componentes de TB

TBX = 0,759 TB
TBY = 0,633 TB
TBZ = 0,152 TB

2.- Determinación de las componentes de TB según X e Y en función de TB* , (Se llama TB* a la proyección de TB sobre el plano XY)

TBX = 0,832 TB*
TBY = 0,555 TB*

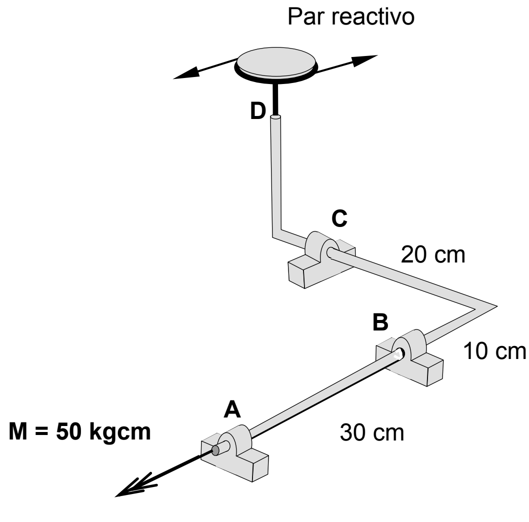
3. DCL y resultados



RESULTADOS: **TBX = 107,91 kg.; TBY = 90 kg.; TBZ = 21, 61 kg;**
TCX = 134,91 kg; TCY = 90 kg ; TCZ = 13,51 kg.
AX = 242,82 kg; AY = 0 ; AZ = -8,1 kg

Distancia ***d = 2,40 m.***

Un eje flexible funciona en el interior de un tubo rígido y lubricado de modo que el par aplicado en el extremo es igual al par de utilización en D, que en este caso es equilibrado por el par reactivo en la rueda D, impidiendo la rotación de la misma. Se pide calcular las reacciones en los apoyos radiales A, B y C que mantienen al tubo en la posición indicada.



$\sum FZ = 0 \rightarrow$ **$CZ = 0$**

$\sum M(AZ) = 0 \rightarrow 50\ \text{kgcm} - CY \cdot 20\ \text{cm} = 0$

$\rightarrow$ **$CY = 2{,}50\ \text{kgcm}$**

$\sum M(BX) = 0 \rightarrow CY \cdot 10\ \text{cm} - AY \cdot 30\ \text{cm} = 0$

$\rightarrow$ **$AY = 0{,}83\ \text{kg}$**

$\sum M(AX) = 0 \rightarrow CY \cdot 40\ \text{cm} + BY \cdot 30\ \text{cm} = 0$

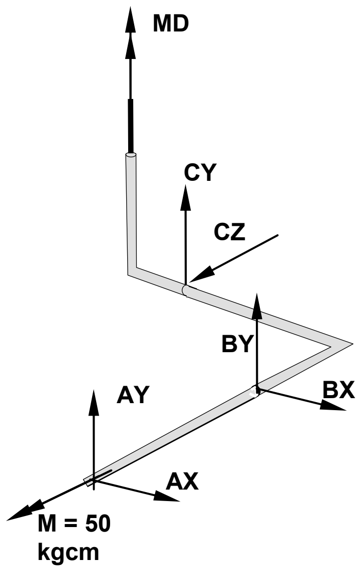
$\rightarrow$ **$BY = 3{,}33\ \text{kg}$**

$\sum M(BY) = 0 \rightarrow AX \cdot 30\ \text{cm} + 50\ \text{kgcm} = 0$

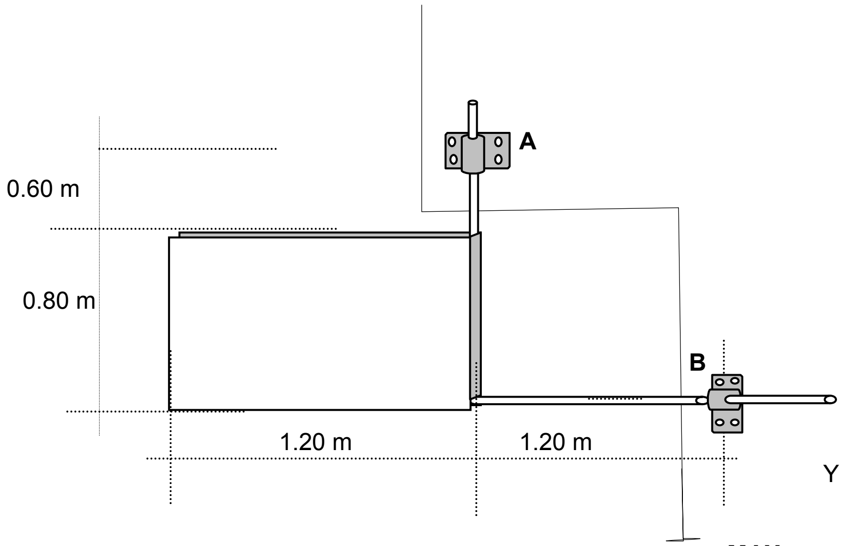
$\rightarrow$ **$AX = -1{,}67\ \text{kg}$**

$\sum M(AY) = 0 \rightarrow -BX \cdot 30\ \text{cm} + 50\ \text{kgcm} = 0$

$\rightarrow$ **$BX = 1{,}67\ \text{kg}$**



El cartel de la figura está apoyado en dos pasadores A y B. El vínculo en A impide toda rotación del eje en cualquier plano que lo contenga, permitiendo en cambio desplazamientos longitudinales y también rotación en torno de sí mismo. El apoyo B puede considerarse un anillo que sólo reacciona radialmente. Se pide determinar las reacciones de apoyo dado un empuje de viento perpendicular a la superficie del cartel de 50 kg/m2. El peso total del anuncio es de 20 kg. Se supone que ambas acciones están aplicadas en el baricentro del mismo.



$\sum FX = 0 \rightarrow$ **$AX = 0$** ;

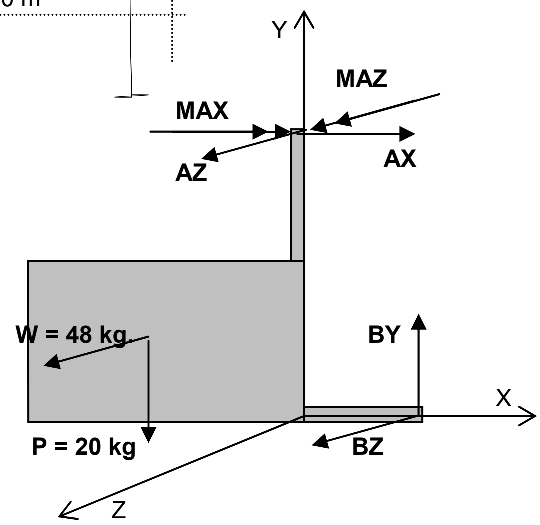
$\sum FY = 0 \rightarrow BY - 20\ \text{kg} = 0$

$\rightarrow$ **$BY = 20\ \text{kg}$**.

$\sum M0X = 48\ \text{kg} \cdot 0.60\ \text{m} - BZ \cdot 1.20\ \text{m} = 0$

$\rightarrow$ **$BZ = 24\ \text{kg}$**

$\sum FZ = 0 \rightarrow BZ + AZ + 48\ \text{kg} = 0$



→ **AZ = - 72 kg.**

∑ M(AZ) = 0 → 20 kg. 0.60 m + BY 1.20 m + MAZ = 0

→ **MAZ = – 36 kgm**

∑M(AX) = - BZ 1.40 m – 48 kg. 1.00 m + MAX = 0

→ **MAX = 81.60 kgm.**

La placa de la figura es cuadrada y sus lados miden 1,20 m. Los apoyos en A y B son radiales y están montados sobre un eje oblicuo perteneciente al plano Z,Y. El vinculo en A resiste, además, esfuerzos axiales. Se pide determinar las reacciones en los vínculos y la tensión en el cable DE, teniendo en cuenta que el peso de la placa es de 200 kg.

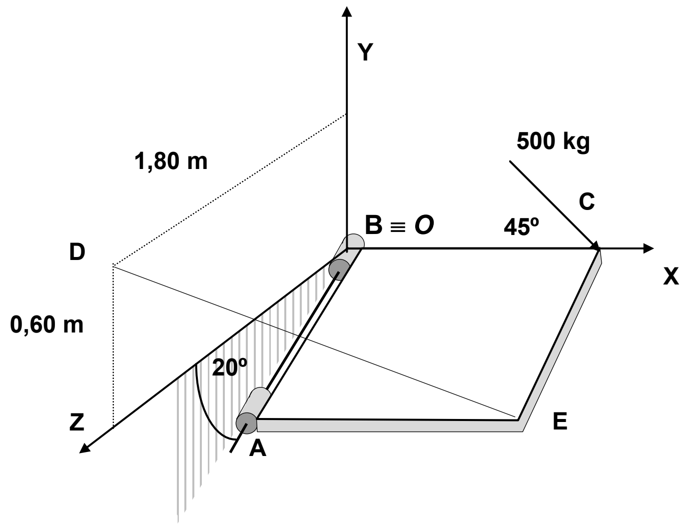
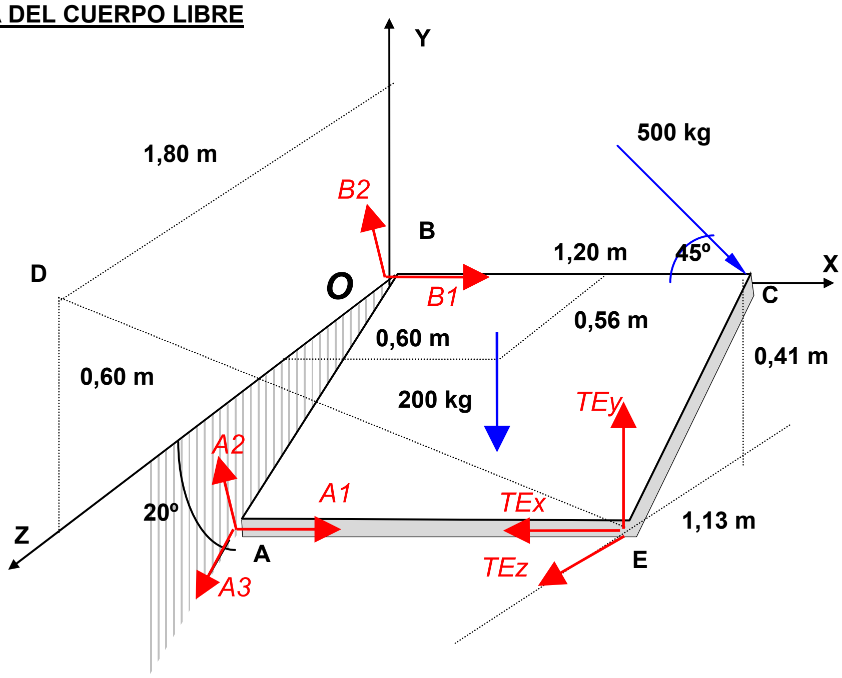
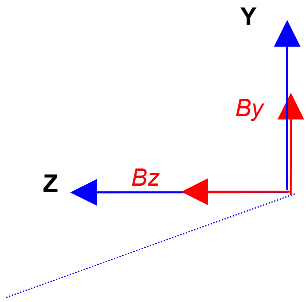


DIAGRAMA DEL CUERPO LIBRE



Puede observarse que las componentes de las reacciones en A y en B, al contrario de lo habitual, no se corresponden con la dirección de los ejes principales, salvo las paralelas al eje X. Esto se debe a la inclinación del eje AB, que hace que las componentes radiales de las reacciones en tales apoyos se desenvuelvan sobre un plano inclinado respecto del horizontal y el frontal. A este respecto cabe aclarar que en caso de optar por referir las componentes de las reacciones según las direcciones de los tres ejes de referencia, para el apoyo B, que únicamente resiste esfuerzos en sentido radial, habrá que vincular las componentes By y Bz de manera que la suma de ambas no tenga proyección sobre el eje AB.

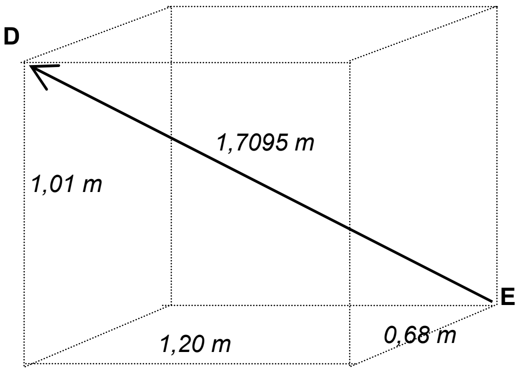


Asi; deberá cumplirse que:

By sen 20º - Bz cos 20º = 0

de donde **Bz = By tg 20º**

Para el apoyo A no existe esta restricción ya que tratándose de un vínculo de tercer orden, sus tres componentes representan tres incógnitas linealmente independientes, cualesquiera que sean las direcciones elegidas.
En cuanto a la reacción en el cable DE, su dirección respecto a los ejes ordenados puede establecerse mediante cálculos sencillos de manera que puede expresarse en función de los cosenos directores, resultando:



TEx = 0,702 . TE
TEy = 0,5908 . TE
TEz = 0,3978 . TE

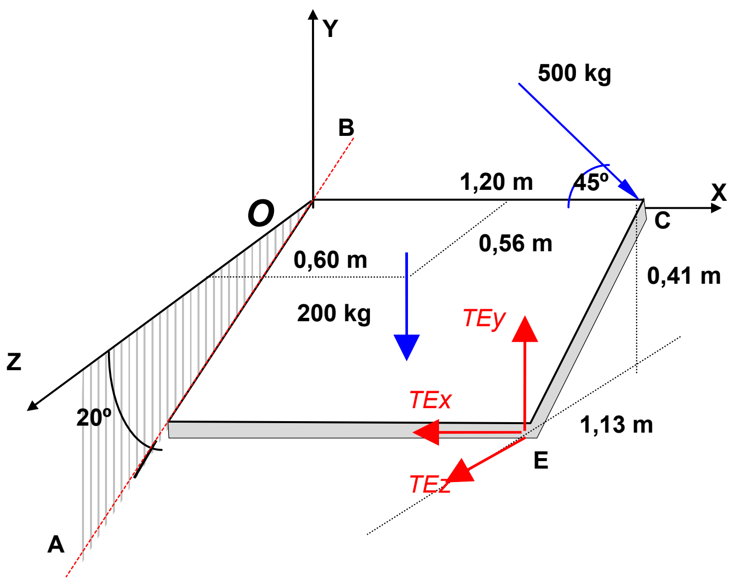
<u>CALCULO DE LA TENSION EN EL CABLE *DE*</u>

El momento de una fuerza respecto a un eje cualquiera que pasa por el origen del sistema de referencia es igual a la suma del producto de cada una de las componentes rectangulares del momento de la fuerza con respecto al origen por el correspondiente coseno director que define la dirección del eje en cuestión, esto puede expresarse como:

$\sum MF/_{OA} = \sum MF/_{OX}\,.\,\mathrm{Cos}\,\Phi x + \sum MF/_{YO}\,.\,\mathrm{Cos}\,\Phi x + \sum MF/_{OZ}\,.\,\mathrm{Cos}\,\Phi x$

Donde $\sum MF/_{OX}$, $\sum MF/_{OY}$ y $\sum MF/_{OZ}$ son la suma de momentos con respecto a cada eje principal, y
Cos Φx, Cos Φy y Cos Φz son los cosenos directores del eje respecto al sistema de referencia.

.



Los cosenos directores del eje AB son :
Cos Φx = cos 90º = 0
Cos Φy = cos 110º = -0,342
Cos Φz = cos 20º = 0,939

Si calculamos primero la sumatoria de momentos con respecto al eje ***X***, ($\sum$M/ox), vemos que su dirección será perpendicular al eje AB, por lo que su proyección sobre el mismo se anulara.

Calcularemos solo $\sum$M/oy y $\sum$M/oz para luego sumar sus proyecciones sobre el eje AB. Para el cálculo de estos momentos tomaremos en cuenta solo las fuerzas activas y la reacción del cable sobre E, ya que las reacciones en A y en B, al estar aplicadas sobre el eje, no producirán momentos sobre el mismo.

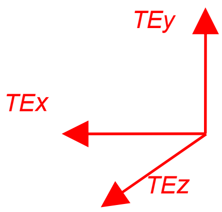
$\sum$M/oy = - TEx 1,13 - TEz. 1,20 = - TE (0,702 .1,13 + 0, 3978 .1,20) =
= - 1,266 . TE

$\sum$M/oz = -500 kg. sen 45º. 1,20 m - 200 kg. 0,60 m + 1, 20 m . TEy - 0,41 m . TEx =
= -424,26 kgm - 120 kgm + 1,20 m . 0,5908 TE - 0,41 m. 0,702. TE =
= - 544,26 kgm + 0,4211 TE kgm

Finalmente aplicamos la fórmula: $\sum M/_{AB} = \sum M/oy \cdot \cos \alpha_Y + \sum M/oz \cdot \cos \alpha_Z$

$\sum M/_{AB}$ = - 1, 2636 TE kgm .(- 0,342) + (-544,26 kgm + 0,4211 TE kgm) . 0,939 =
= 0,432 TE kgm + 285,70 kgm + 0,395 TE kgm = 0,827 TE kgm - 511,60 kgm
El equilibrio exige que $\sum M/_{AB} = 0$

de modo que, finalmente: **TE = 616, 75 kg.**



Sus componentes serán

TEx = 0,702 TE = 433,62 kg
TEy = 0,5908 TE = 365,12 kg
TEz = 0,3978 TE = 242,96 kg

Con los sentidos que se indican para cada una de las direcciones.

<u>CALCULO DE LAS REACCIONES EN LOS APOYOS A Y B</u>

Tomando momentos con respecto al eje OX, podemos calcular A2:

$\sum$Mox = - A2 . 1,20 m + 200 kg. 0,60 m cos 20º - T_{EY} . 1,20 m cos 20º - T_{EZ} . 1,20 m sen 20º = 0

A2 .= -398,57 / 1,20 m → **A2 = - 332,14 kg**

Haciendo lo mismo respecto al eje AX (eje que pasa por A y tiene la dirección X)

$\sum M_{AX}$ = B2 . 1,20 m - 500 kg. sen 45º . 1,20 cos 20º - 200 kg. 0,60 cos 20º = 0

B2 = 426,12 kg

Asimismo
$\sum M_{AY}$ = B1 . 1,20 m cos 20º + 500 kg. sen 45º . 1,20 m cos 20º + T_{EZ}. 1,20 m = 0

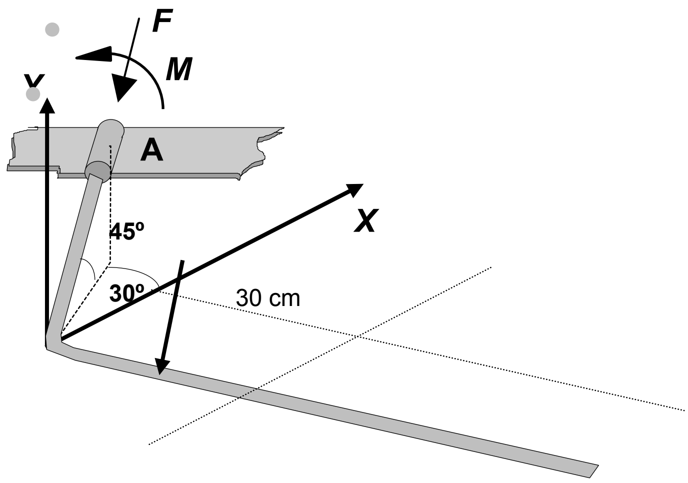
B1 = 612,10 kg

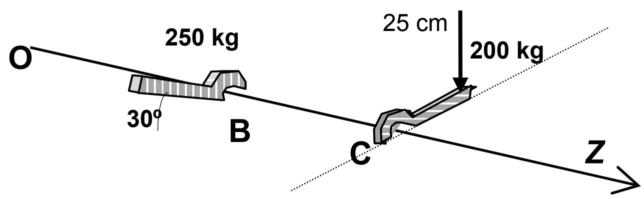
Con $\sum M_{0Y} = 0$ se puede determinar **A1 = 692,17 kg.**

y proyectando fuerzas sobre el eje AB y planteando el equilibrio se puede determinar, finalmente:

A3 = - 292,76 kg.

La tubería acodada se encuentra sujeta a un buje largo que sólo permite desplazamientos y giros axiales. Al ser sometida al par de fuerzas aplicadas por medio de las llaves según se indica, se desea saber cuál es el conjunto fuerza – par que se necesita aplicar sobre el tubería en el punto A a efectos del equilibrio.





En este ejemplo se optó por resolver el problema mediante una planilla de cálculos- Ms Excel – para lo cual primero se determinan las componentes de cada fuerza según los ejes de referencia y las coordenadas de su punto de aplicación. Con estos vaores se procede a calcular las componentes del momento que cada fuerza produce respecto del centro O de momentos- orígen del sistema de coordenadas. La suma de las columnas respectivas permite obtener las componentes del sistema [FR,MR] (*fuerza y momento resultantes).* Debajo de cada uno de los correspondientes valores se ingresan los respectivos cosenos directores que definen la dirección del eje respecto al cual queremos reducir el sistema de fuerzas. Realizando el producto de cada componente- Fuerza o momento- por su respectivo coseno director, obtenemos la proyección de cada una de ellas sobre dicho eje. Sumando algebraicamente dichas proyecciones se obtiene, finalmente, los valores de las componentes de FR y de MR en la dirección del eje, que representa la **acción** que el sistema activo de fuerzas ejerce sobre el mismo.

	Px	Py	Pz	rx	ry	rz	Mx	My	Mz	
P1	-125,00	-216,50	0,00	-17,32	10,00	30,00	6495,00	-3750,00	4999,78	
P2	0,00	-200,00	0,00	20,00	0,00	55,00	11000,00	0,00	-4000,00	
total	**-125,00**	**-416,50**	**0,00**				**17495,00**	**-3750,00**	**999,78**	
C.direct.	0,6124	0,7071	-0,3536				0,6124	0,7071	-0,3536	
	-76,55	-294,51	0,00	**-371,05**			10713,41	-2651,63	-353,47	**7708,3**