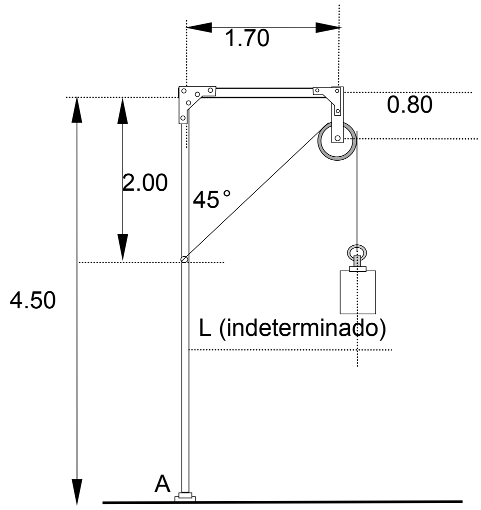
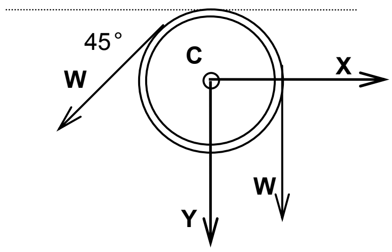
SISTEMAS CON POLEAS Y APAREJOS

La ménsula de la figura es utilizada para sostener en la posición indicada al bloque cuyo peso W es de 280 kg.
Se pide determinar el sistema fuerza-par equivalente actuando sobre el punto A. Dicha comprobación debe realizarse considerando un diámetro variable de la polea, suponiendo que la inclinación del cable permanece en el orden de los 45°.

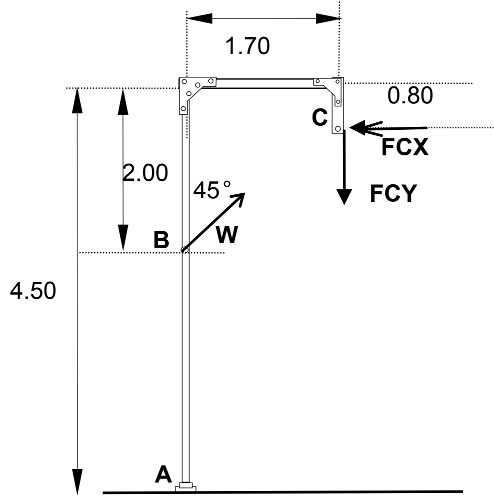


Si el diámetro de la polea fuese determinado, de tal forma que la distancia de la línea de acción de W al punto A fuese conocida, la solución del problema sería inmediata, llamando R al valor de la fuerza resultante y MAR al momento estático resultante del sistema de fuerzas activo con respecto al punto A , resultaría:
R = W y MAR = W . L , lo que equivaldría considerar al conjunto mecánico como una sola pieza.

Pero como es condición del problema la indeterminación de dicha magnitud, será necesario considerar las acciones de la fuerza sobre el DCL de la ménsula, procediendo al despiece del sistema.
La acción que se ejerce sobre el punto **C** se determina fácilmente observando el diagrama del c. libre de la polea. Si tenemos un cuerpo cualquiera sobre el cual actúa un sistema de fuerzas y queremos saber la acción que dicho sistema ejerce sobre un punto del mismo, lo que debemos hacer es hallar el *sistema fuerza - par equivalente* tomando como *centro de reducción* a dicho punto.



En el caso particular de una polea como la de la figura, la reducción del sistema de fuerzas activas con respecto al centro de la misma es un proceso inmediato, pues ambas fuerzas pueden trasladarse sin más trámite a dicho punto. Esto es así porque ambas tienen la misma magnitud (no olvidar que la tensión en un cable en equilibrio es constante en toda su longitud) y sus rectas de acción, tangentes al perímetro de la polea, guardan la misma distancia al punto **C,** de manera que los *momentos de traslación* son iguales y de sentido contrario, por lo cual se anulan.
Producido el traslado, entonces, de ambas fuerzas al punto **C**, nos convendrá determinar la acción conjunta de ambas considerando sus proyecciones sobre los ejes de coordenadas.
Estas serán:



FCX = W . cos 45° = 280 . 0.707 = 198 kg.

FCY = W . (1 + sen 45°) = 280 . 1,707 = 478 kg.

Con lo cual ya podemos construir el diagrama de fuerzas activas que actúan sobre la ménsula, y proceder a su reducción tomando como referencia al punto **A.** Para ello tendremos que determinar la fuerza y el par que actúan sobre ese punto.

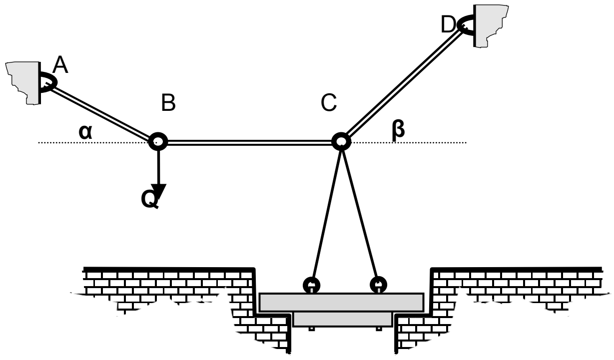
RX = W sen 45 ° - FCX = 280 . 0.707 - 198 = 0

RY = FCY - W sen 45° = 478 - 280 . 0707 = 280 kg.

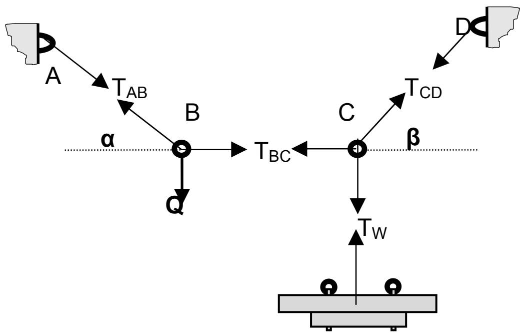
El valor del momento será:

$\sum MO = W \cdot \text{sen } 45° \cdot 2.50 + FCY \cdot 1.70 - FCX \cdot 3.70 = 575$ kgm.

El aparejo que se ve en la figura es utilizado para levantar una tapa embutida de peso W. Los anillos colocados en B y en C están fijos en el cable mediante nudos . Se pide determinar el rendimiento del sistema (la fuerza vertical Q a aplicar en B para levantar el peso W) en función de la geometría del mismo, dada por los ángulos α y β que forman los tramos extremos del cable con la horizontal.



La solución del problema consiste en considerar el equilibrio de los anillos B y C y mediante las correspondientes condiciones de nulidad de las proyecciones sobre los ejes horizontal y vertical establecer la relación entre la fuerza **Q** y el tirón ascendente que la aplicación de la misma produce en el anillo C. A efectos de una visualización general del problema dibujamos un DCL general :



Del equilibrio del nudo B tenemos:

$\sum Fy = 0$

$\rightarrow$ T_{AB} sen $\alpha = Q$ $\rightarrow$ $\mathbf{T_{AB} = Q / \text{sen } \alpha}$

$\sum F x = 0 \rightarrow$ $T_{BC} = T_{AB} \cos \alpha$ $\rightarrow$ $\mathbf{T_{BC} = Q \cdot \text{ctg } \alpha}$

Pasando ahora al equilibrio del nudo C

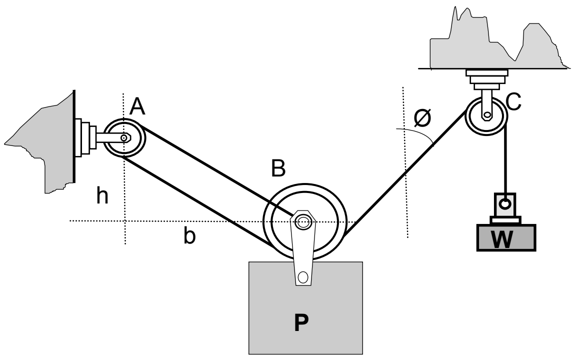
$\sum F x = 0 \rightarrow T_{CD} . \cos \beta = T_{BC}$ $\rightarrow$ $T_{CD} = Q. \text{Ctg } \alpha / \cos \beta$

$\sum F y = 0 \rightarrow T_W = T_{CD}$ sen β $\rightarrow$ $\mathbf{T_W = Q \cdot \text{ctg } \alpha \cdot \text{tg } \beta}$ o bien

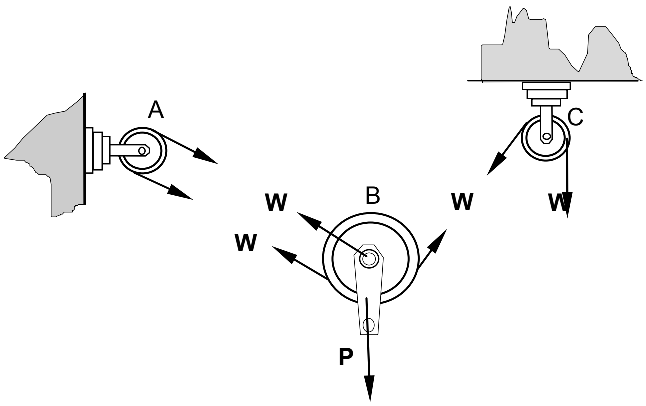
$$\mathbf{TW = Q. \frac{tg\ \beta}{Tg\ \alpha}}$$

Puede advertirse que el impulso hacia arriba debido a la fuerza vertical aplicada en B , que podría ser por ejemplo el peso de un operario , es proporcional al cociente entre los ángulos β y α .

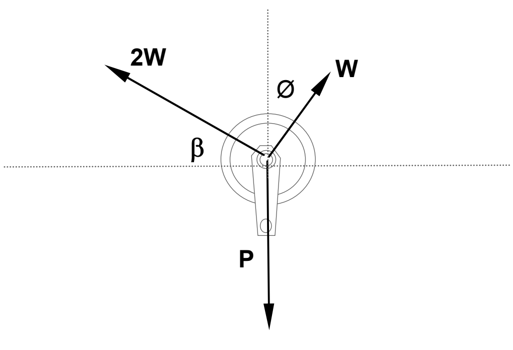
Para el sistema de la figura se pide determinar el ángulo Ø y la magnitud del contrapeso W si se desea mantener la polea B en la posición indicada sabiendo que el peso P es de 500 kg.



El primer paso, como en todo problema que contenga sistemas de poleas o aparejos como este, es poner de manifiesto las tensiones que se transmiten a través de los cables, recordando que la tensión de los mismos es constante para todo su largo, cuyo valor para este problema que nos ocupa es **W**. De esta manera podemos hacer el DCL de las poleas AB y C.



Para la obtención de los valores de Ø y W sólo necesitamos trabajar con la polea central. Para estudiar el equilibrio de la misma y dado que no existen momentos exteriores aplicados sobre ella, consideramos a todas las fuerzas aplicadas sobre el centro o eje de la polea.



Teniendo en cuenta el radio *R* de la polea menor A , el ángulo β puede calcularse mediante la relación

$\mathrm{tg}\,\beta = (h + R) / b$

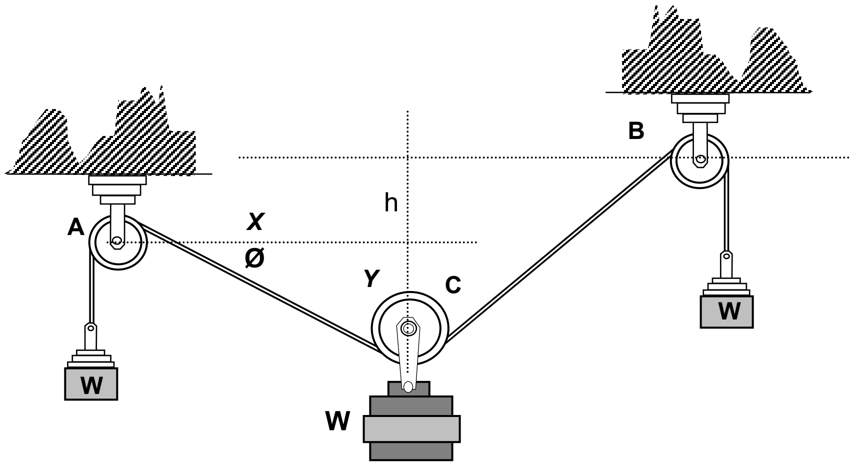
Planteando las ecuaciones de equilibrio tenemos que:

$\sum Fx = W \text{ sen } Ø - 2 W \cos \beta = 0$

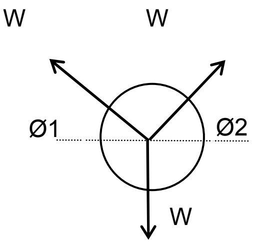
$\sum Fy = 2 W \text{ sen } \beta + W \cos Ø - P = 0$

de ello se extrae que **sen Ø = 2 . cos β** y que **W = P / (2 sen β + cos Ø)**

Las poleas A y B están vinculadas a tierra y a distinta altura. La polea C sostiene un peso W y pende de un cable en cuyos extremos actúan dos contrapesos de igual magnitud W. El problema pide determinar la posición de la polea C, en función de las coordenadas *X* e *Y* indicadas, a efectos del equilibrio.



Es evidente que el cable desarrollará una tensión igual a W en toda su longitud, también está claro que el ángulo Ø que describa el mismo con la horizontal es la variable que determina la geometría del sistema. Si analizamos la polea C vemos que sobre ella actúa un sistema de fuerzas concurrentes de magnitudes conocidas donde las incógnitas son la posición de las equilibrantes respecto de la carga vertical.



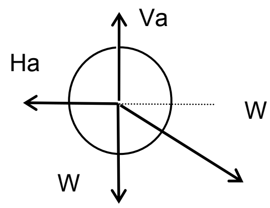
El equilibrio de la polea C exige que se cumpla

Σ Fx = 0 y x = 0 y Σ Fy = 0

Si llamamos Ø1 y Ø2 a los ángulos que forman cada rama del cable con la horizontal tenemos:

Σ Fx = - W cos Ø1 + cos Ø2 = 0 ; con lo cual evidentemente Ø1 = Ø2

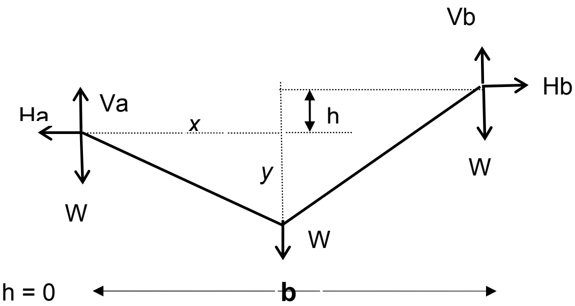
y de Σ Fx = W sen Ø1 + W sen Ø2 -W = 0 $\rightarrow$ 2 sen Ø =1 resulta Ø = 30 º



Ahora analizaremos el equilibrio en A, que será simétrico al B

de Σ Fx = 0 resulta Ha = W cos 30º
de Σ Fy = 0 resulta Va = W (1 + sen 30º)

El diagrama del cuerpo libre general quedaría :

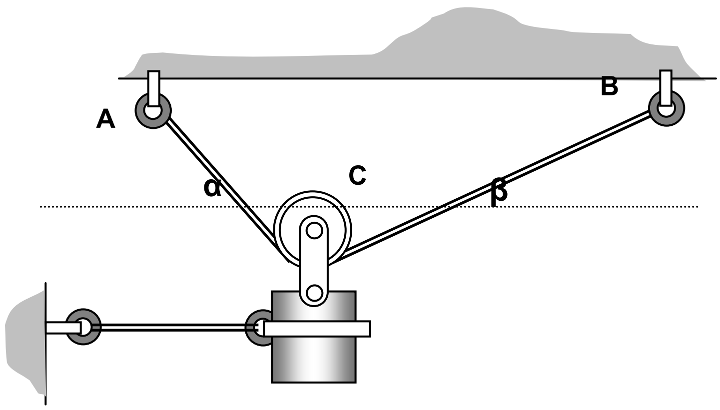


Tomando ΣM=0 con respecto al punto A, tendríamos:

Ma = W . *x* + W . b - W (1 + sen 30º) b + W cos 30º h = 0
de donde, operando llegamos a que:

x = b sen 30 - h cos 30º y finalmente **y = x tg 30º**

En el esquema de la figura se muestra un cuerpo de peso W. sostenido de la forma que se indica. Se debe calcular las tensiones en los cables para la posición dada.



El cable en AB es continuo, y por lo tanto desarrolla una tensión constante en toda su longitud. Considerándolo como un sistema ideal, esto es admitiendo que no existe fricción entre ninguna de las piezas, podemos adoptar la hipótesis simplificativa de que se trata de un sistema de fuerzas concurrentes, cuyo esquema de equilibrio es el de la figura:

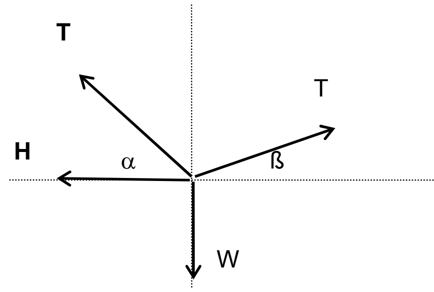
Σ Fx = T cos 30º - T cos 45º - H = 0

Σ Fy = T sen 45º + T sen 30º - W = 0

De aquí obtenemos que

T (sen 45º + sen 30º) = W

Por lo cual T = W / (sen 45º + sen 30º)

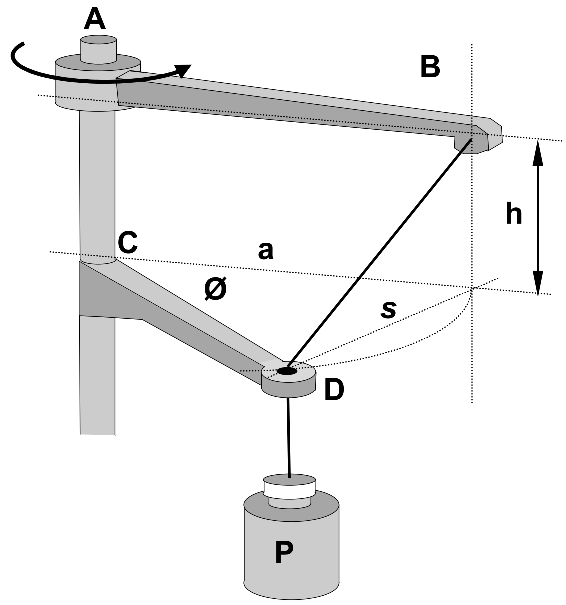


Asimismo operando con la primera ecuación (Despejando H y reemplazando a T por su valor) tenemos que:

H = W (cos 30º - cos 45º) / (sen 45º + sen 30º)

Observemos este resultado: Si ambos ángulos hubiesen sido iguales, el valor de H sería nulo, es decir que la cuerda horizontal sería innecesaria para el equilibrio. Por otra parte, si ambos fueran de 90º (ambas ramas serían verticales) la tensión del cable sería T = W /2. Y finalmente, si todo el cable fuera horizontal, su tensión tendería a ser infinita.

El mecanismo de la figura permite desplazar el brazo AB , de longitud *a*, girando sobre el eje AC subiendo o bajando el cilindro de peso P. Se desea conocer el par MAy que se debe desarrollar en A , actuando en el plano horizontal, para la posición que se indica en función del ángulo de giro Ø.



La tensión del cable se transmite, como se ve, a lo
largo del cable hasta el punto B y por efecto de la rotación del brazo AB la dirección de la fuerza P aplicada sobre dicho punto desarrollará una componente sobre ese plano de giro, que llamaremos Ps y que producirá un momento

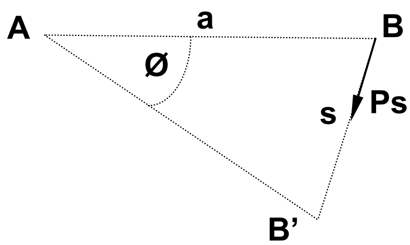
$$MAy = Ps \, . \, a \cos ½Ø \quad [\,1\,]$$

Para la determinación del valor de Ps en función del ángulo Ø observamos la figura inferior de la cual se puede ver que, llamando s a la cuerda del arco que describe el brazo al girar, resulta

$$Ps / s = P / BD \quad [\,2\,]$$

donde $s = 2 \, a \operatorname{sen} ½Ø$

y $BD = \sqrt{h^2 + s^2}$



de la [2] resulta $Ps = P \, . \, s \, / \, BD$

o sea $Ps = P \, . \, s \, / \sqrt{h^2 + s^2}$

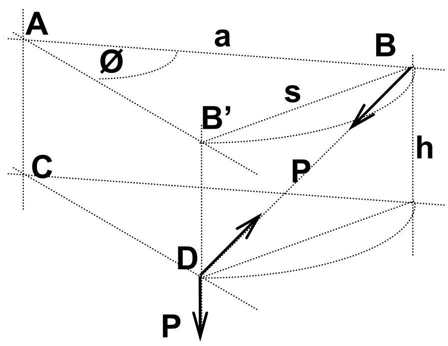
y reemplazando en la [1]

$$MAy = P. \, 2 \, . \, \frac{a^2 . \operatorname{sen} ½Ø \, . \cos ½Ø}{\sqrt{h^2 + s^2}}$$

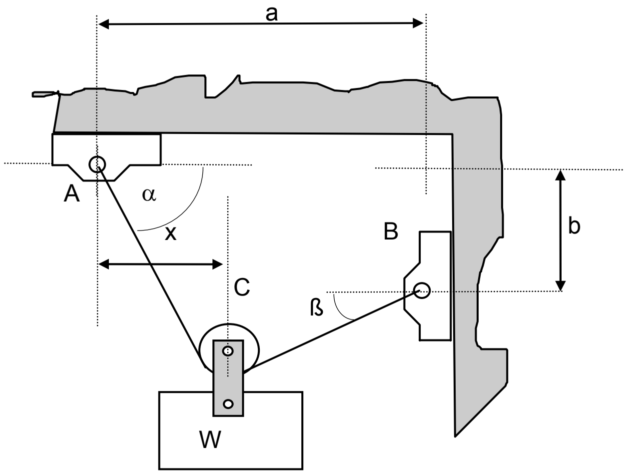
como $2 \operatorname{sen} ½Ø \, . \cos ½Ø = \operatorname{sen} Ø$

finalmente

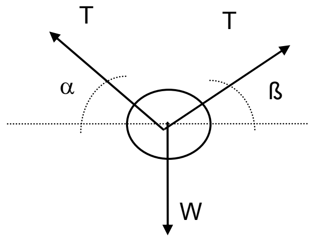
$$\mathbf{May = P. \, \frac{a^2 . \operatorname{sen} Ø}{\sqrt{(h^2 + 4 a^2 . \operatorname{sen}^2 ½Ø)}}}$$



Dado el dispositivo de la figura se pide determinar la posición de la carga tal que se verifique el equilibrio, averiguar además si existe relación entre la longitud del cable y la tensión que se desarrolla.



El equilibrio de la polea en C es el punto clave para solucionar el problema que se nos presenta,



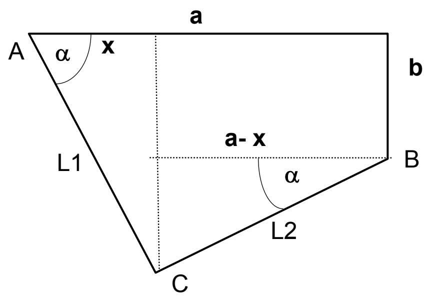
Se puede advertir, efectivamente que el equilibrio del punto C nos permite inferir, sin más trámite y dado que las tensiones en ambos extremos del cable necesariamente son idénticas, que los ángulos α y ß deben ser iguales.

En efecto: $\sum Fx = T \cos \alpha - T \cos ß = 0$ de donde → $\cos \alpha = \cos ß$ → $\alpha = \beta$

Para la tensión en el cable recurrimos a la proyección vertical del sistema de fuerzas:

$\sum Fy = T \operatorname{sen} \alpha + T \operatorname{sen} ß - W = 0$ → $2T \operatorname{sen} \alpha = W$

de donde **$T = W / 2 \operatorname{sen} \alpha$ [1]**



En cuanto a la ubicación de la polea , estará definida por su distancia horizontal de los apoyos y por el ángulo α que forma el cable con dicha horizontal. Como vemos en el esquema de la figura:

$x \operatorname{tg} \alpha - (a - x) \operatorname{tg} \alpha = b$ → $\operatorname{tg} \alpha (2x - a) = b$

y finalmente despejando se tiene que **$x = b / 2 \operatorname{tg} \alpha + a / 2$ [2]**

<u>Relación entre la tensión y la longitud del cable :</u>

Suponiendo que la ubicación de los puntos A y B son datos del problema, la longitud del cable estará dada por el valor del ángulo que forme el mismo con la horizontal : cuando mayor sea ese ángulo más largo tendrá que ser el cable, asimismo, de la expresión [1] se puede advertir que la tensión disminuye con el aumento del ángulo α, de modo que puede inferirse que la longitud del cable y el esfuerzo al que es sometido guardan una relación inversa.

Si queremos hallar una relación matemática entre la tensión T y la longitud L del cable, podemos plantear:

$\underline{L1 \cos \alpha + L2} \cos \alpha = a$ → $\cos \alpha . L = a$ por lo cual **$\cos \alpha = a / L$ [3]** y lógicamente

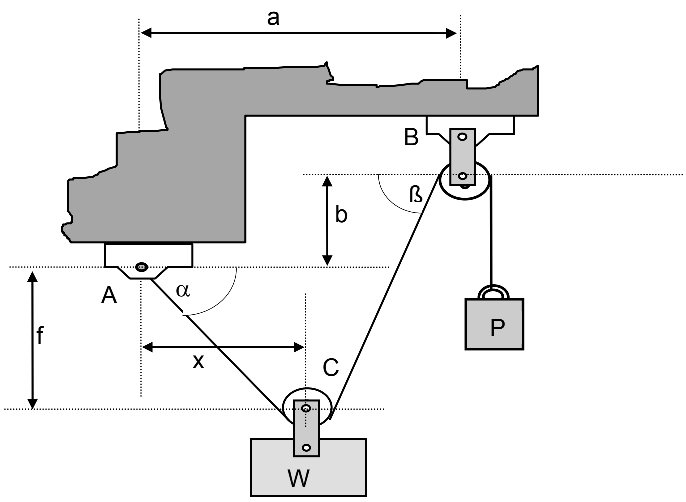
$\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{1 - (a / L)^2}$

de la expresión [1] tenemos que **$\operatorname{sen} \alpha = W / 2T$**

igualando ambas expresiones encontramos una relación entre la tensión y la longitud del cable:

$W / 2T = \sqrt{1 - (a / L)^2}$

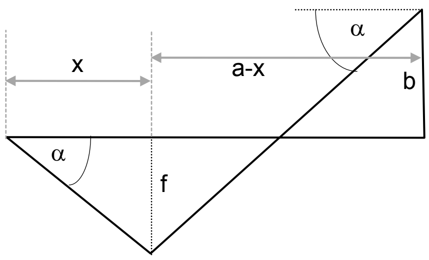
Veamos otro ejercicio similar, pero con la variante de que el extremo derecho del cable se conecta a través de una polea al contrapeso P y está a mayor altura que el punto fijo en A. En este caso la tensión del cable está directamente definida por el peso P.



Desde el punto de vista matemático el problema se resuelve del mismo modo que el caso anterior y podemos utilizar las fórmulas halladas en él. En realidad, desde ese punto de vista, se trata del mismo problema, pero nos permite quizás verlo desde otra óptica o plantearnos otras cuestiones. Por ejemplo si tomamos como datos a los pesos de ambos bloques, lo que queda por definir es la configuración del equilibrio, es decir la flecha f y la distancia x en que se deberá ubicar la polea móvil a efectos del equilibrio.

Como dijimos, podemos utilizar las fórmulas encontradas en el ejercicio anterior, reemplazando T por el valor del peso del bloque P

sen α = W / 2P [1] (como en el caso anterior por supuesto α = ß)



También como en el caso anterior es posible ver que
L = a / cos α [2]

Asimismo
x tg α - (a - x) tg α = - b

tg α (2x - a) = - b → **x = a / 2 - b / (2 tg α) [3]**

Lógicamente obtenido el valor de x se determina inmediatamente el valor de la flecha **f = x tg α { 4]**

En estos casos lo habitual es tener como datos, aparte de la carga, la luz o distancia entre apoyos así como también la ubicación de estos, sus alturas, etc. , siendo valores a determinar las reacciones y la tensión en el cable y su longitud o la flecha del mismo, valores estos que pueden estar determinados o condicionados por cuestiones de diseño o bien por la capacidad portante del cable..
Otra relación útil para el cálculo puede ser la siguiente, si en lugar de trabajar como antes con **x** tg α lo hacemos con la flecha f podemos escribir que
f - a tg α + f = - b → **2 f + b = a tg α [5]**
lo que nos permite relacionar todas las dimensiones.

Veamos un ejemplo numérico: W= 1300 kgs., a = 10 mts., b = 1 m y suponemos tener que adoptar una flecha f = 2 mts. por razones constructivas o de diseño

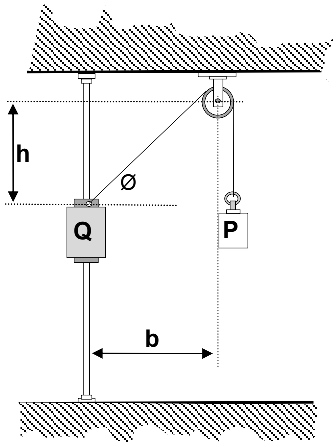
De la fórmula [5] se puede extraer directamente el ángulo α y luego el resto de los valores.

Tg α = (2 f + b) / a = (2. 2 m + 1 m)/ 10 m = 0,5 → α = 26º40' X = 4 m; **P = 1453 kg..**

Si en cambio optamos por una flecha f= 4m

Tg α = 0,9 ; α = 42º x = 4,44 m y **P = 971,65 kg.**

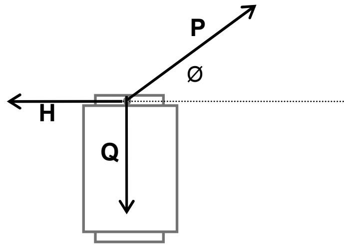
El cilindro de peso Q puede deslizarse libremente por la barra vertical y es capaz de sostener en la posición que se indica a la carga P a través del sistema de cable y polea que muestra la figura. Se pide determinar la diferencia de alturas **h** que debe existir entre el eje de la polea en B y el punto A de fijación del cable para que el sistema este en equilibrio. Se suponen conocidas las magnitudes de P y Q, como también la distancia **b** entre los ejes de la barra vertical y la polea . Se considera despreciable el diámetro de la polea en relación a las otras medidas.



Como puede verse el papel de la polea en este caso se reduce simplemente a modificar la recta de acción de P, por lo que en principio puede omitirse el análisis de su equilibrio.
El DCL del cilindro nos permite plantear las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$\Sigma FX = P \cdot \cos Ø - H = 0$ [1]

$\Sigma FY = P \cdot \text{sen}\, Ø - Q = 0$ [2]



Donde el valor a determinar es Ø. Puede verse con facilidad que operando con la última ecuación se llega a que:

sen Ø = Q/ P [3]

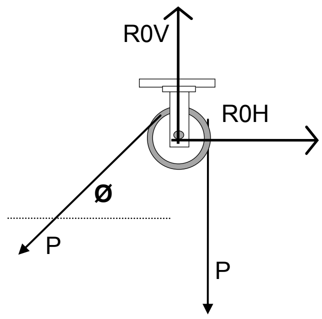
Y luego se puede determinar el valor del esfuerzo horizontal H.

El valor de la altura h, dado que se consideró despreciable el diámetro de la polea será:

h = b . tg Ø [4]

De la ecuación [3] puede observarse que la fuerza P debe ser mayor que el peso Q

Si queremos obtener la reacción R0 en el eje de la polea ella resulta , de la observación del DCL :



R0H = P cos Ø

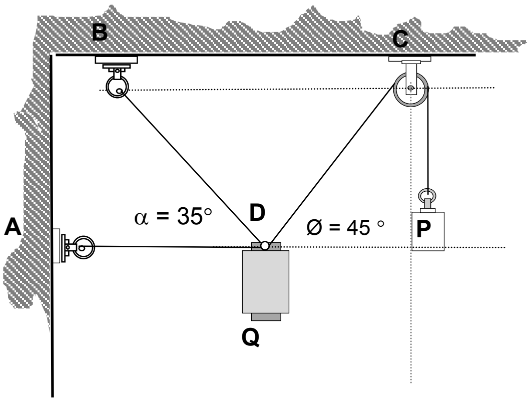
R0V = P + P sen Ø = P (1 + sen Ø)

y LUEGO $R0 = \sqrt{R0H^2 + R0V^2}$

Llamando α al ángulo que forma R0 con la horizontal puede verse que

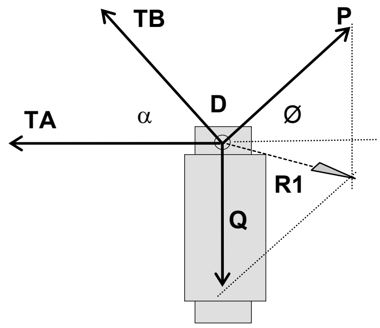
$$\text{tg}\, \alpha = R0V / R0H \rightarrow \text{tg}\, \alpha = (1 + \text{sen}\, Ø) / \cos Ø$$

Veamos ahora un problema formalmente similar al anterior, pero con modificaciones que presentan una problemática con características propias. Ahora el cilindro Q está sujeto por sendos cables a los puntos A y B, siendo mantenido en la posición que indica la figura por el contrapeso P que actúa a través de la polea en C.



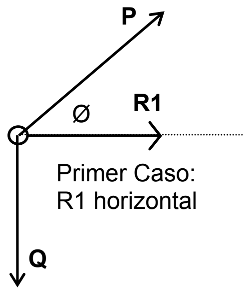
Se pide hallar el entorno de valores de P que mantenga al cilindro en la posición indicada.

Si suponemos conocido el peso del cilindro y consideramos que la geometría del sistema es un dato del problema, puede verse que estamos ante un caso de indeterminación estática, pues nos enfrentamos a la necesidad de descomponer una fuerza, el peso del cilindro, en las tres direcciones de los cables, lo que como se sabe tiene infinitas soluciones. Pero el enunciado del problema nos propone encontrar el entorno de valores de P no sólo necesarios para el equilibrio, sino para mantener la configuración geométrica indicada:

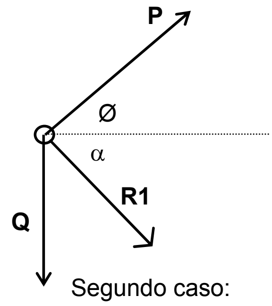


Como puede apreciarse (fig. 1) para cada valor de P existirá una resultante R1 entre ella y el peso Q, la cual deberá ser equilibrada por las tensiones TA y TB. Como los cables son elementos que sólo pueden desarrollar esfuerzos de tracción, resulta evidente que para que ello ocurra la recta de acción de la resultante R1 debe estar situada entre las rectas definidas por ambos cables.

Se advertirá que el aumento de P producirá un giro hacia arriba de R1 alrededor del punto de aplicación D,. por el contrario una disminución de su valor hará disminuir el ángulo que ésta forma con la vertical. Cuando R1 ocupe la posición horizontal, tendrá que ser equilibrada sólo por el cable AD, mientras que la tensión en BD será nula. Un aumento del valor de P comenzaría a exigir esfuerzos de compresión al cable BD.



Primer Caso:
R1 horizontal



Segundo caso:
R1 Forma α con la horizontal

Para que R1 sea horizontal deberá cumplirse que:

P sen Ø = Q de donde

P = Q / sen Ø
(Valor máximo que puede tomar P)

Además **R1 = P cos Ø = Q / tg Ø**

Para el segundo caso, es decir para que R1 esté alineada con BD, las expresiones tendrán esta forma:

P cos Ø = R1 cos α

Q - P sen Ø = R1 sen α

Esto nos da un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, cuya resolución arroja el resultado:

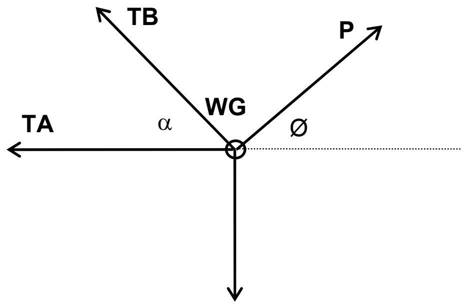
$$P = \frac{Q \cos \alpha}{\operatorname{sen}(\varnothing + \alpha)} \qquad \text{y además} \qquad R1 = \frac{Q \cos \varnothing}{\operatorname{sen}(\varnothing + \alpha)}$$

Teniendo en cuenta que α= 35 ° y que Ø = 45°; tendremos que P oscila entre los valores

P max = 1,414 Q y **P** min = 0,72 Q

Si quisiéramos poner las acciones ejercidas sobre los cables en función del valor de P, tendríamos:

Σ FX = TA + TB cos α - P cos Ø = 0
Σ FY = TB sen α + P sen Ø - Q = 0



Ecuaciones cuya resolución arroja los siguientes resultados:

$$TA = \frac{[\,P \text{ sen } (\alpha + Ø) - Q \cos \alpha\,]}{\text{sen } \alpha}$$

$$TB = \frac{Q - P \text{ sen } Ø}{\text{sen } Ø}$$

Hemos visto que los valores extremos que puede tomar P son aquellos que hagan nulas las tensiones en uno de los cables, siendo el entorno de validez aquel para el cual ambos valores se mantengan positivos. Si se anulan las expresiones obtenidas para TA y TB se obtendrán sendos valores de P que constituirán precisamente los extremos (máximo y mínimo) del entorno de valores de P que satisfagan las condiciones del problema.

Obsérvese que la naturaleza del problema encierra una clara indeterminación pues se trata de un sistema plano de fuerzas concurrentes para cuya condición de equilibrio solo disponemos de dos ecuaciones. Esta indeterminación resulta salvada al imponerse condiciones en los extremos de los posibles valores de una de las variables (Condiciones de borde).