

# **RESPUESTAS AL FORMULARIO N° 1**

## **1. PRINCIPIOS GENERALES**

### **1.a) Ubique a la estática dentro de la Física General.**

La mecánica es la rama de la Física que se ocupa de estudiar el estado de reposo o movimiento de los cuerpos sometidos a la acción de fuerzas. Dentro de ella se ubica la mecánica de los cuerpos rígidos que a su vez se divide en dos grandes ramas: La dinámica, que estudia los cuerpos en movimiento, y la estática, cuyo objeto es el **estudio del equilibrio de los cuerpos rígidos sometidos a la acción de fuerzas**.

### **1.b) Explique la diferencia entre los principios de la Estática y los principios de la mecánica.**

Los principios de la estática se refieren a la acción de fuerzas aplicadas sobre cuerpos rígidos a efectos de estudiar su equilibrio. Los principios de la mecánica, o leyes de Newton, están referidos a la acción de las fuerzas en relación al estado de movimiento o reposo de los cuerpos.

### **1.c) Momento estático. Definición. Significados físico y geométrico. Signo. Semejanzas y diferencias con el concepto de Trabajo.**

Se define como momento estático de una fuerza con respecto a un punto al producto de la magnitud de la fuerza por la distancia (o *brazo de momento*) de la recta de acción de la misma a dicho punto. Esta magnitud mide la intensidad con que la fuerza tiende a hacer girar al cuerpo sobre el cual está aplicado en torno al punto considerado, también llamado *centro de momento*.

La magnitud  $M = P \times d$  es igual al doble del área del triángulo que forman el segmento representativo de la fuerza, considerado como base, y el brazo de momento tomado como la altura de dicho triángulo.

El signo del momento estático es convencional y define el sentido del giro que trata de imprimir la fuerza considerada.

El momento estático se mide en unidades de fuerza por unidades de longitud y constituye una magnitud **vectorial** que resulta del producto vectorial entre los vectores representativos de la fuerza y de su distancia al centro de momentos. El trabajo, en tanto también vincula una fuerza con una magnitud lineal, en este caso un desplazamiento, pero éste surge del producto **escalar** entre la fuerza y la longitud considerada. El trabajo es por lo tanto una magnitud escalar.

## **2. FUERZAS Y EQUILIBRIO.**

### **2.a) Para un sistema general de fuerzas en el espacio ¿Cuáles serán las posibilidades (casos) de reducción?**

La acción de cualquier sistema de fuerzas actuando sobre un cuerpo en el espacio puede reducirse a la acción de dos vectores paralelos que representan el uno a una fuerza resultante y el otro a un par o cupla resultante, los que reciben el nombre de **invariante vectorial** e **invariante escalar** respectivamente pues no están vinculados a ningún centro de reducción. Estos dos vectores definen el caso de reducción de que se trata según sus magnitudes se anulen o no. Tenemos cuatro posibilidades:

	Invariante Vectorial	Invariante Escalar	Caso
I	Nulo	Nulo	Equilibrio
II	Nulo	No nulo	Cupla Resultante
III	No nulo	Nulo	Fuerza Resultante
IV	No Nulo	No nulo	Fuerza y Par Resultante

## 2.b) Teorema de Varignon. Enunciado. Justifique su aplicación generalizada para un sistema de fuerzas espaciales.

El enunciado del teorema de Varignon dice que *dadas dos fuerzas concurrentes, el momento estático de la resultante de ambas fuerzas con respecto a un punto es igual a la suma algebraica de los momentos estáticos de las componentes con respecto al mismo punto.*

Este teorema se puede generalizar para todo sistema de fuerzas plano siempre que, por aplicación sucesiva de la regla del paralelogramo, el sistema pueda ser reducido finalmente a dos fuerzas concurrentes ( Lo que no ocurre en el único caso en que resulte un cupla)

Teniendo en cuenta la definición de momento de una fuerza respecto a un eje puede advertirse que para el mismo deben verificarse todas las propiedades que rigen para el plano y por lo tanto también lo dicho para el teorema de Varignon, es decir que ***el momento de una fuerza con respecto a un eje es igual a la suma algebraica de los momentos de las componentes de dicha fuerza con respecto al mismo eje considerado.***

## 2.c) Relación entre el momento de una fuerza respecto a un punto y el momento de la misma fuerza con respecto a los ejes de un sistema de coordenadas con origen en dicho punto:

El momento de una fuerza con respecto a un eje cualquiera es igual al momento de dicha fuerza con respecto a un punto arbitrario perteneciente al eje proyectado sobre la dirección del mismo.

El momento de la fuerza con respecto al origen de un sistema de coordenadas es  $MF_0$   
Los momentos de esa fuerza con respecto a cada eje coordenado será

$$\begin{aligned} MF_{xx} &= MF_0 \cdot \cos \omega_x && \text{Momento de la fuerza F con respecto al eje X} \\ MF_{yy} &= MF_0 \cdot \cos \omega_y && \text{Momento de la fuerza F con respecto al eje Y} \\ MF_{zz} &= MF_0 \cdot \cos \omega_z && \text{Momento de la fuerza F con respecto al eje Z} \end{aligned}$$

Donde  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ , y  $\omega_z$  son los ángulos que forma el vector  $MF_0$  con cada uno de los ejes coordenados.

Si operamos sobre las tres igualdades elevando cada miembro al cuadrado, tendremos:

$$\begin{aligned} MF_{xx}^2 &= MF_0^2 \cdot \cos^2 \omega_x \\ MF_{yy}^2 &= MF_0^2 \cdot \cos^2 \omega_y \\ MF_{zz}^2 &= MF_0^2 \cdot \cos^2 \omega_z \end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro

$$MF_{xx}^2 + MF_{yy}^2 + MF_{zz}^2 = MF_0^2 (\cos^2 \omega_x + \cos^2 \omega_y + \cos^2 \omega_z)$$

Como  $(\cos^2 \omega x + \cos^2 \omega y + \cos^2 \omega z) = 1$  por propiedad de los cosenos directores

$$MF_{xx}^2 + MF_{yy}^2 + MF_{zz}^2 = MF_0^2 \rightarrow MF_0 = \sqrt{MF_{xx}^2 + MF_{yy}^2 + MF_{zz}^2}$$

Relación que nos permite inferir que **las componentes rectangulares del momento de una fuerza con respecto a un punto son iguales a los momentos de esa fuerza con respecto a los ejes correspondientes del sistema con origen en dicho punto.**

Otro modo de hallar dicha relación es aplicando expresiones matriciales:

Si tenemos una fuerza  $F$  definida por sus componentes rectangulares  $F [FX, FY, FZ]$  y el radio vector  $r [rx, ry, rz]$  que la vincula al origen del sistema de coordenadas, como se ve en la figura:

Por Varignon se sabe que el momento de una fuerza con respecto a un eje es igual a la suma algebraica de los momentos de sus componentes con respecto al mismo eje

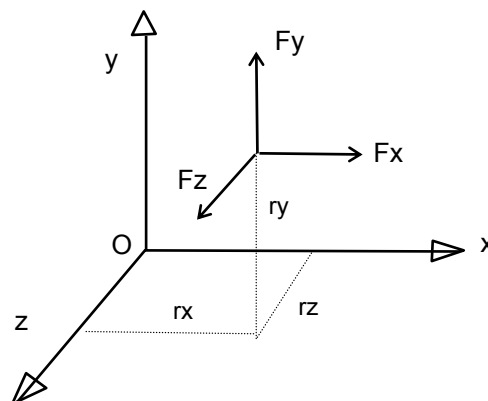
tendremos

$$MF_{0X} = ry \cdot FZ - rz \cdot FY$$

$$MF_{0Y} = rz \cdot FX - rx \cdot FZ$$

$$MF_{0Z} = rx \cdot FY - ry \cdot FX$$

Donde  $MF_{0X}$ ,  $MF_{0Y}$  Y  $MF_{0Z}$  son los momentos de la fuerza  $F$  con respecto al eje  $OX$ .



Por su parte, el momento estático de la fuerza con respecto al origen queda definido por la operación vectorial:

$$MF_0 = R \times F \text{ que se expresa como el determinante: } [MF_0] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ RX & RY & RZ \\ FX & FY & FZ \end{vmatrix}$$

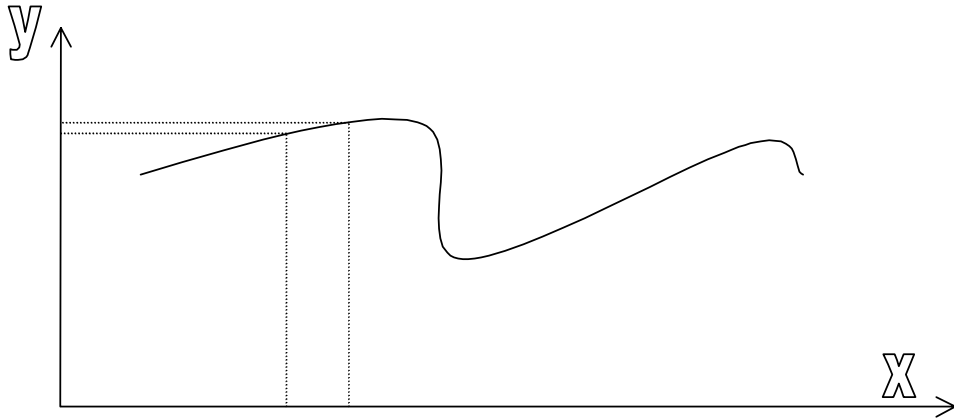
De donde resulta

$$MF_0 = i (RY \cdot FZ - RZ \cdot FY) + j (RZ \cdot FX - RX \cdot FZ) + k (RX \cdot FY - RY \cdot FX)$$

Comparando estas expresiones con las obtenidas por aplicación de Varignon se llega a la misma expresión enunciada anteriormente.

### 3. CENTRO DE FUERZAS PARALELAS Y BARICENTROS

3.a) Obtenga las ecuaciones necesarias para determinar el baricentro de un objeto homogéneo con dos parámetros geométricos constantes.



la ecuación que debe plantearse es

$$\int y \cdot ds = y_g \cdot \int ds$$

$$y_g = \frac{\int y \cdot ds}{\int ds}$$

con

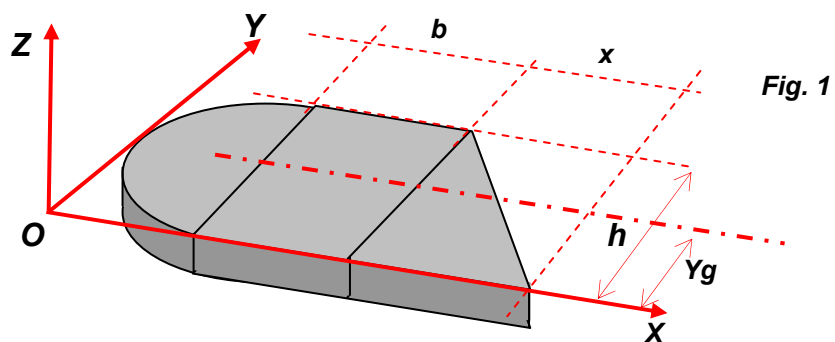
$$y = f(x)$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

según la regla de Leibnitz

$$dy = \frac{df(x)}{dx} \cdot dx$$

3.b) Dado el cuerpo homogéneo de la figura, (Fig. 1). suponiendo que los valores  $h$  y  $b$  son constantes y tomando como variable la base  $X$  del triángulo, determinar el entorno de valores que puede tomar la distancia baricéntrica  $Y_g$  e indique su expresión matemática.



La distancia

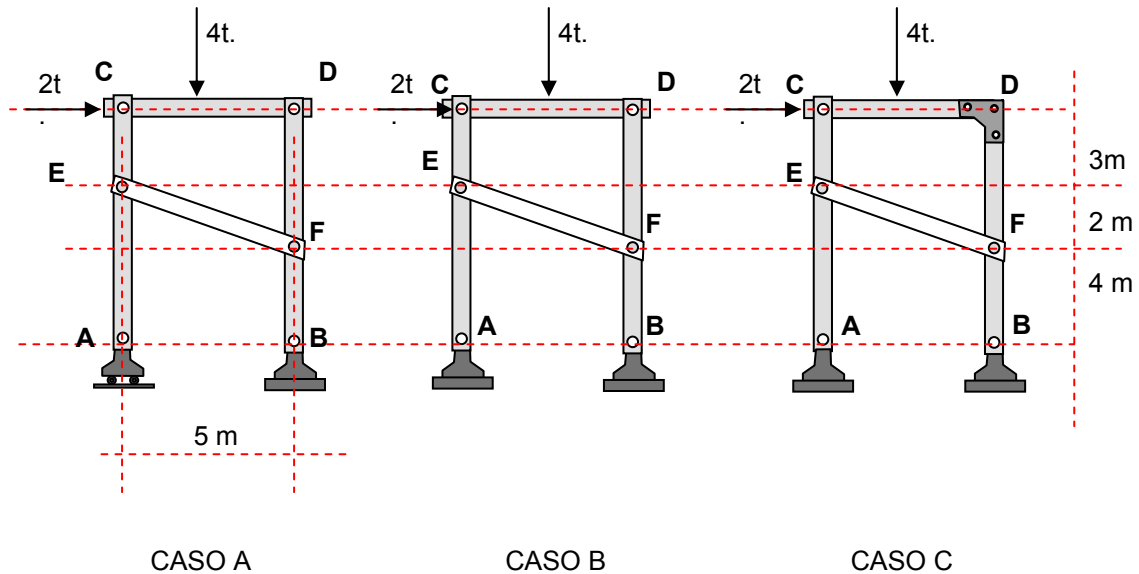
baricéntrica esta comprendida dentro del intervalo  $(h/2; h/3)$

La expresión matemática para  $Y_g$  es la siguientes

$$Y_g = S_0 / A_0$$

$$\text{Donde } S_0 = h^2/2 \cdot (\pi/8 + b + x/3) \text{ y } A_0 = h \cdot (\pi/8 + b + x/2)$$

#### 4. SISTEMAS DETERMINADOS PLANOS Y ESPACIALES



**Fig. 2** La distancia entre A y B es de 5 m

**4.a) Dados los tres entramados que se indican en la Fig. 2 analice la condición de isostaticidad y determinación estática de cada uno de ellos .**

El primer entramado es hipostático externamente, las bielas C-D y E-F se cortan en un punto que es el centro de rotación relativa entre las chapas A-C y B-D. El sistema es indeterminado.

En el segundo entramado se ha agregado, con respecto al primero, una restricción exterior, tenemos ahora un arco de tres articulaciones. El sistema es determinado.

En el tercer entramado se ha agregado, con respecto al segundo, una restricción al giro relativo de dos barras, C-D y D-B. El sistema es hiperestático. El sistema es indeterminado.

**4.b) Para el caso de isostaticidad, determine las reacciones de apoyo y los esfuerzos en los vínculos internos.**

Primer entramado

El sistema **no** está en equilibrio. Es hipostático e indeterminado.

Segundo entramado

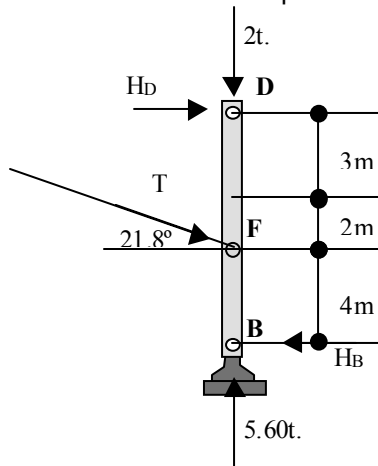
$$\sum M/A = 0 \Rightarrow V_B \times 5m - 4ton \times 2.50m - 2ton \times 9.00m = 0$$

$$\text{de donde } V_B = 5.60ton$$

$$\sum M/B = 0 \Rightarrow -V_A \times 5m + 4ton \times 2.50m - 2ton \times 9.00m = 0$$

de donde  $V_A = -1.60\text{ton}$

Tomemos ahora la chapa D-B



$$\sum F_v = 0 \Rightarrow -2\text{ton} - T \times \sin(21.8^\circ) + 5.6\text{ton} = 0$$

de donde  $T = -9.69\text{ton}$  (compresión en la biela E-F)

$$\sum M/D = 0 \Rightarrow T \times \cos(21.8^\circ) \times 5.00\text{m} - H_B \times 9.00\text{m} = 0$$

de donde  $H_B = 5.00\text{ton}$  (con el sentido supuesto)

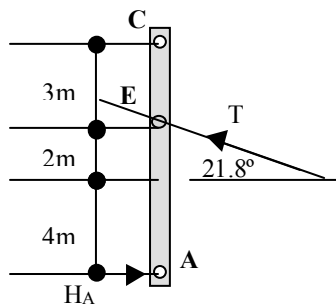
$$\sum F_H = 0 \Rightarrow -H_B + T \times \cos(21.8^\circ) + H_D = 0$$

de donde  $H_D = -4.00\text{ton}$

El **esfuerzo en el pasador** en D será la resultante de  $H_D$  y  $V_D$

$$P_D = \sqrt{(H_D)^2 + (V_D)^2} = \sqrt{(-4.00)^2 + (-2.00)^2} = \sqrt{20} = 4.47\text{ton}$$

Finalmente podemos tomar la chapa A-C



$$\sum M/C = 0 \Rightarrow -T \times \cos(21.8^\circ) \times 3.00\text{m} + H_A \times 9.00\text{m} = 0$$

de donde  $H_A = 3.00\text{ton}$  (con el sentido supuesto)

Este resultado se verifica aplicando sumatoria de fuerzas horizontales de todo el entramado.

$$\sum F_H = 0 \Rightarrow H_A + 2\text{ton} - H_B = 3\text{ton} + 2\text{ton} - 5\text{ton} = 0$$

Tercer entramado

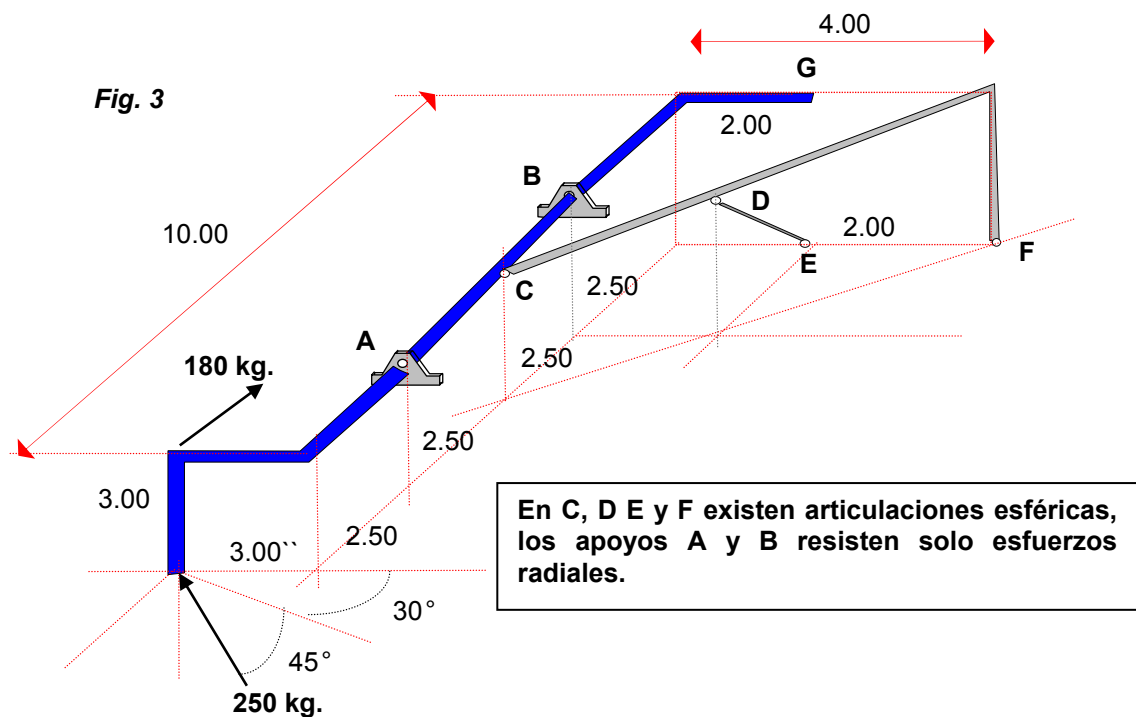
Es hiperestático. Para resolverlo es necesario introducir condiciones de deformación.

**4.c) Para el caso en el sistema no sea determinado, verifique si es posible salvar dicha indeterminación colocando una fuerza arbitraria en el punto A (privilegiando la simpleza del cálculo) y establezca su valor**

Si al primer entramado le aplicamos en A una fuerza  $H_A$  de 3.00 toneladas el sistema estará en equilibrio, esta fuerza es la que calculamos en el punto anterior para el segundo entramado.

En el tercer entramado actúa una fuerza en A pero no la podemos determinar aplicando solamente ecuaciones de equilibrio estático.

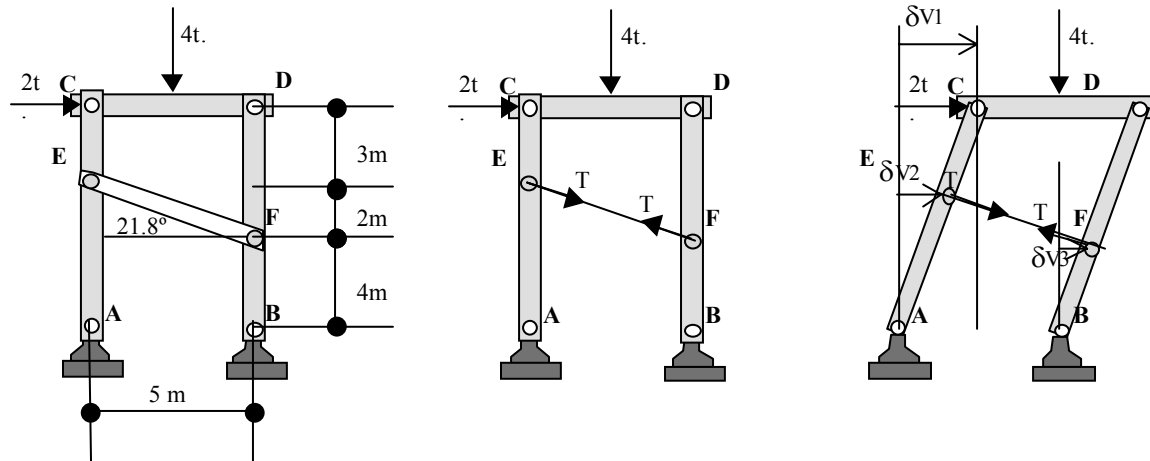
**4.d) Para el sistema espacial indicado en la Fig. 3 : La estructura tubular que soporta las cargas activas indicadas en la figura tiene además un peso propio de 120 kg. Por metro lineal. Analizar la determinación estática del sistema. Diseñar el vínculo que aplicado en el punto G produzca la mínima reacción necesaria para su equilibrio. Realizar el DCL correspondiente.**



Ver solución completa en Títulos 7 b,c y d

## 5. APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES

**5.a) Para el entramado indicado en la Fig. 2. caso B, calcular el esfuerzo en la barra EF aplicando el Principio de los trabajos Virtuales.**



El trabajo desarrollado por el sistema de fuerzas aplicado al mecanismo en un desplazamiento "virtual" (finito, pequeño) será:

$$W_{\text{virtual}} = 2t \times \delta_{v1} + 4t \times 0m + T \times \cos(21.8^\circ) \times \delta_{v2} - T \times \cos(21.8^\circ) \times \delta_{v3} = 0$$

Existe proporcionalidad entre los distintos desplazamientos virtuales, de modo que:

$$\delta_{v1} = \varphi_{\text{virtual}} \times 9m$$

$$\delta_{v2} = \varphi_{\text{virtual}} \times 6m$$

$$\delta_{v3} = \varphi_{\text{virtual}} \times 4m$$

Entonces: 
$$\varphi_{\text{virtual}} (2t \times 9m + 4t \times 0m + T \times \cos(21.8^\circ) \times 6m - T \times \cos(21.8^\circ) \times 4m) = 0$$

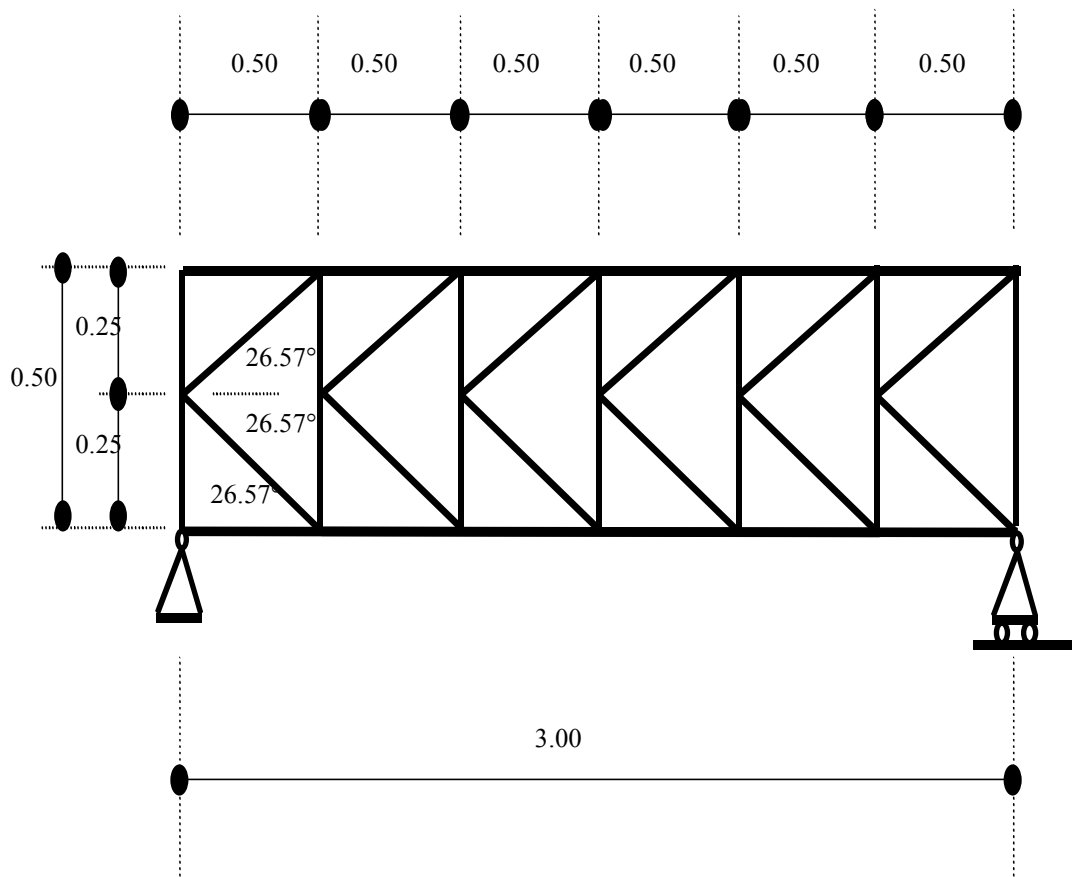
De donde: 
$$\boxed{T = -9.69\text{ton}} \text{ (compresión)}$$

Es posible verificar el resultado aplicando sumatoria de fuerzas verticales, para ello primero debemos calcular las reacciones verticales.

## 6. RETICULADOS PLANOS Y ESPACIALES

6.a) Diseñar un reticulado plano tal que para conocer los esfuerzos en un corte transversal sea necesario aplicar el método de doble corte de Ritter





ice y justifique la isostaticidad interna y externa del reticulado diseñado

Isostaticidad Interna:

El número de barras debe ser igual a dos veces el número de nudos menos tres.

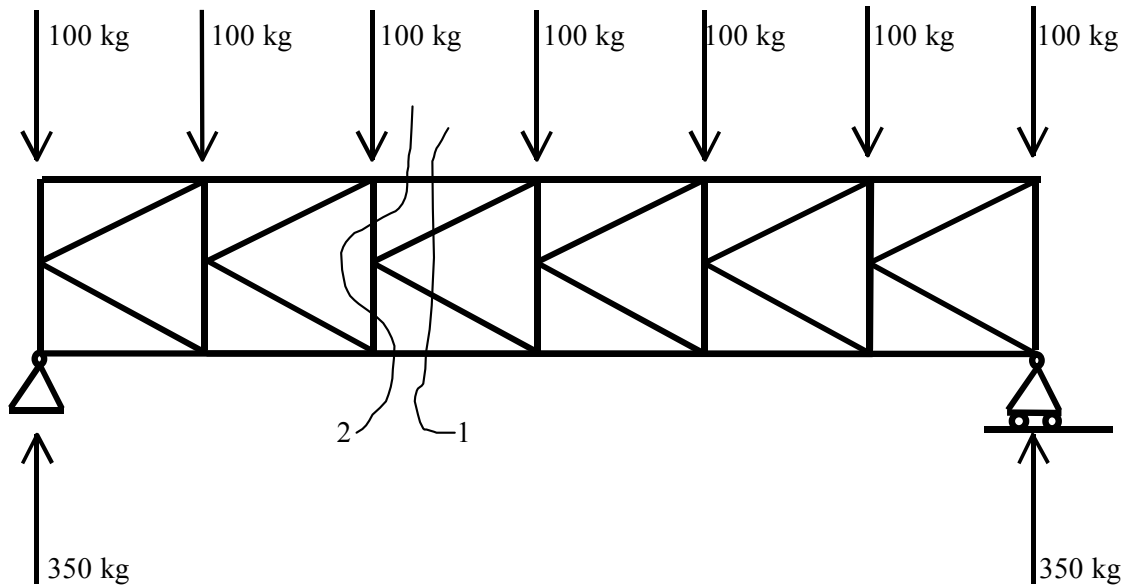
$$b = 2n - 3$$

$b = 37$  ;  $n = 20$  ;  $37 = 2 \times 20 - 3$  ..... se verifica, es isostático internamente, y cumple con la Ley de Generación del Reticulado Simple

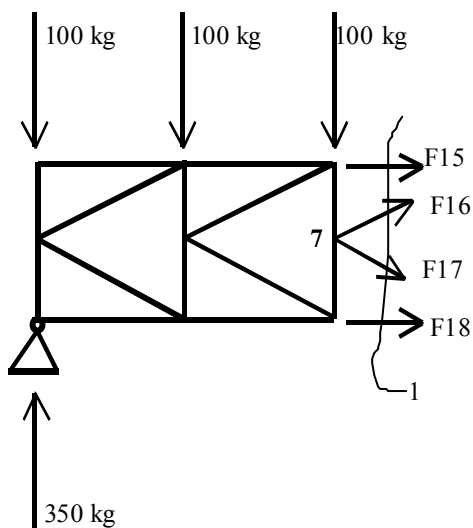
Isostaticidad externa:

La chapa conformada por las 37 barras unidas posee tres grados de libertad en el plano que son restringidos por un apoyo doble (2 gr lib) y un apoyo simple (1 gr lib). Es isostático externamente.

**6.c) Aplique un sistema externo sencillo de fuerzas activas y calcule los esfuerzos en un corte transversal de cuatro barras (Doble corte de Ritter)**



Corte 1



$$\sum M/7 = 0 \Rightarrow -350\text{kg} \times 1.00\text{m} + 100\text{kg} \times 1.00\text{m} + 100\text{kg} \times 0.50\text{m} - F15 \times 0.25\text{m} + F18 \times 0.25\text{m} = 0$$

$$F18 = F15 + 800\text{kg} \quad (\text{I})$$

$$\sum Fy = 0 \Rightarrow 350\text{kg} - 100\text{kg} - 100\text{kg} - 100\text{kg} + F16 \times \sin(26.57^\circ) - F17 \times \sin(26.57^\circ) = 0$$

$$F17 = F16 + \frac{50}{\sin(26.57^\circ)} = F16 + 111.78\text{kg} \quad (\text{II})$$

$$\sum Fx = 0 \Rightarrow F15 + F16 \times \cos(26.57^\circ) + F17 \times \cos(26.57^\circ) + F18 = 0$$

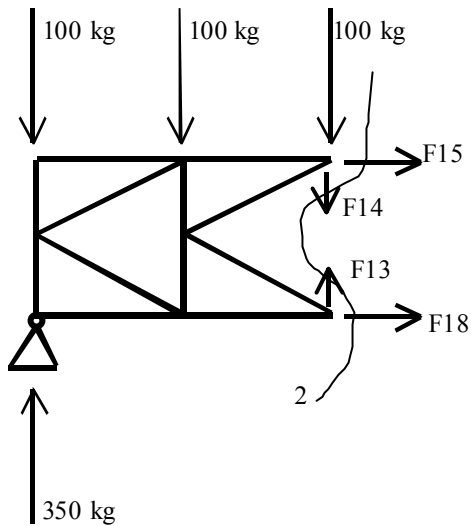
$$F15 + F18 + \cos(26.57^\circ) \times (F16 + F17) = 0$$

reemplazando (I) y (II) en esta última:

$$F15 + (F15 + 800\text{kg}) + \cos(26.57^\circ) \times (F16 + F16 + 111.78\text{kg}) = 0$$

$$F_{16} = \frac{-450\text{kg} - F_{15}}{\cos(26.57^\circ)} \quad (\text{III})$$

### Corte 2



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{15} + F_{18} = 0$$

$$F_{15} = -F_{18} \quad (\text{IV})$$

reemplazando (I) en (IV):

$$F_{15} = -F_{15} - 800\text{kg} \Rightarrow 2 \times F_{15} = -800\text{kg}$$

$$F_{15} = -400\text{kg}$$

$$F_{18} = 400\text{kg}$$

de (III):

$$F_{16} = \frac{-450\text{kg} - (-400\text{kg})}{\cos(26.57^\circ)}$$

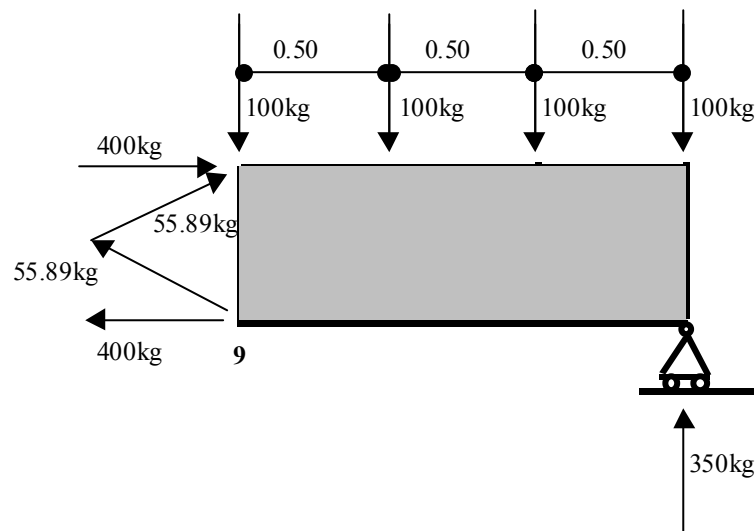
$$F_{16} = -55.93\text{kg}$$

de (II):  $F_{17} = F_{16} + 111.78\text{kg} = -55.90\text{kg} + 111.78\text{kg}$

$$F_{16} = +55.93\text{kg}$$

### **6.d. Verifique el resultado**

Para verificar tomamos el lado derecho en el corte 1:



$$\sum M/G = 0 \Rightarrow -55.93\text{kg} \times \cos(26.57^\circ) \times 0.50\text{m} - 400\text{kg} \times 0.50\text{m} - 100\text{kg} \times 0.50\text{m} - 100\text{kg} \times 1.00\text{m} - 100\text{kg} \times 1.50\text{m} + 350\text{kg} \times 1.50\text{m} \cong 0$$

## 7. SISTEMAS DE ALMA LLENA PLANOS Y ESPACIALES

### 7.a) Esfuerzo de corte. Definición. Efecto. Valor y Signo.

Es el conjunto de dos fuerzas iguales y de sentido contrario, contenidas en el plano de la sección y que actúan sobre ambas caras de la misma, que corresponden a la proyección sobre su plano de las resultantes de los sistemas de fuerzas izquierdo y derecho.

Tiende a provocar un desplazamiento relativo entre las caras de la sección, llamado efecto de cizallamiento, en la dirección y sentido de las fuerzas del corte.

El signo del corte es convencional y debe ser tal que exprese el sentido en que tiende a producirse el cizallamiento.

Su valor se obtiene, como queda dicho, de proyectar la fuerza resultante de uno u otro lado de la sección sobre el plano de la misma.

**7.b) Para la estructura indicada en la Fig. 3 determine el valor de las reacciones considerando el vínculo colocado en G.**

**7.c) Aísle el tramo AB, excluidos los extremos, y determine las ecuaciones genéricas de las solicitaciones en las mismas**

**7.d) Si hay valores máximos o mínimos en el tramo indicado calcule los mismos y determine su ubicación**

*(Las direcciones de las magnitudes positivas se corresponden con el sistema de ejes consignado en la figura)*

- El vínculo a colocar en **G** que produzca la mínima reacción necesaria es un biela vertical (paralela al eje Y)

REACCIONES:

$R_G: -195\text{ kg};$

$R_{AX} = 497,55\text{ KG.}$

$R_{AY} = 1169,45\text{ KG.}$

$R_{AZ} = 0$

$R_{CX} = -214,5\text{ KG}$

$R_{CY} = 160,70\text{ KG.}$

$R_{CZ} = 268\text{ KG.}$

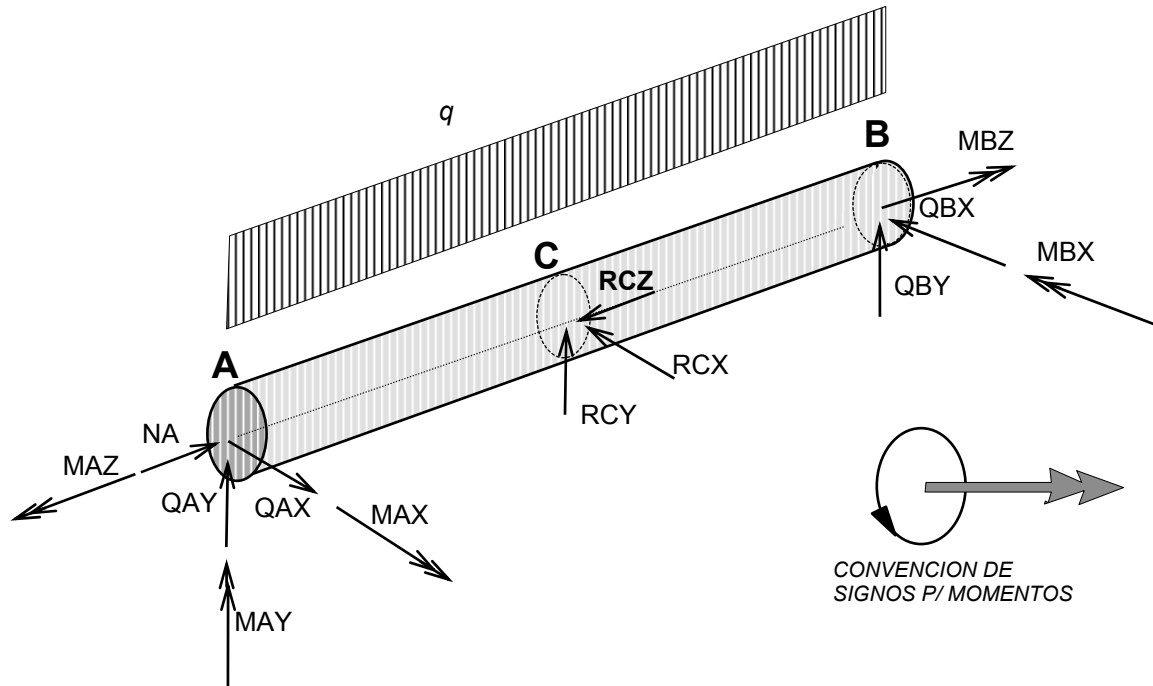
$$RBX = -130,5 \text{ KG.}$$

$$RBY = 847,85 \text{ KG.}$$

$$RBZ = 0$$

DCL. del Tramo AB

( Excluir los extremos significa considerar las fuerzas aplicadas en dichos puntos como pertenecientes a las acciones externas al tramo que se trata)



Donde las solicitaciones en los extremos son, en valor absoluto : (Los sentidos son los que se indican en el diagrama )

$$\begin{aligned} QAX &= 344,55 & QAY &= 926,44 \text{ KG,} & NA &= 268 \text{ KG.} \\ MAX &= 1996,5 \text{ KGM} & MAY &= 1186,50 \text{ KGM.} & MAZ &= 630 \text{ KGM.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} QBX &= 130,05 \text{ KG.} & QBY &= 112,85 \text{ KG.} \\ MBX &= 14622,5 \text{ KGM.} & MBY &= 0 & MBZ &= 630 \text{ KGM.} \end{aligned}$$

Y los valores de RCX, RCY, RCZ son los de las reacciones en C ya calculada

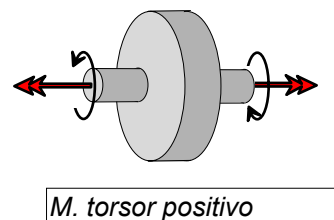
EXPRESIONES ANALITICAS DE LAS SOLICITACIONES PARA LOS TRAMOS AC y CB

El esfuerzo normal:

$N = -268 \text{ kg.}$  (compresión) para el tramo AC,  $N = 0$  para el tramo CB

El momento torsor:

$MT = 630 \text{ kgm.}$  Para todo el tramo AB. Signo positivo:



Momentos Flectores:

Para MX ( Momento que actúa en el plano YZ)

En el tramo AC (tomando A como origen,  $z=0$  )

$$MX(z) = - MAX + QAY \cdot z - q \cdot z^2 / 2 = - 1996.5 + 326.45 \cdot z - 60 \cdot z^2$$

para  $z=0$  resulta  $MX(A) = - 1996.5$  kgm.

Para  $z= 2.5$  m resulta  $MX( C ) = -1555.38$  kgm.

Para QY (Esf. De corte correspondiente al anterior)

$$QY(z) = 326,45 - 120 z$$

Para  $z=0 \rightarrow QY(0) = 326.45$  kg.

para  $z= 2,5$  m  $\rightarrow QY( C ) = 26,45$  kg.

Resulta  $QY = 0$  para  $z = 2,72$  m (fuera del intervalo de validez)

En el tramo CB ( también tomamos como punto inicial  $z=0$ , en el punto C)

$$MX(z) = - 1555,38 + 187.15 z - 60 z^2$$

para  $z = 0 \rightarrow MX(c) = - 1555,38$  kgm

para  $z = 2.5 \rightarrow MX(B) = - 1462.50$  kgm

$$QX(z) = 187.15 - 120. Z$$

para  $z=0 \rightarrow QY( C ) = 187.15$  kg

para  $z= 2.5 \rightarrow QY(B) = -112.85$  kgm.

Resulta  $QY(z) = 0$  para  $z = 1.56$  m ( cae dentro del intervalo de validez)

$MX(1.56) = - 1409.4$  kgm. ( Considerando valores absolutos resulta ser un mínimo relativo)

El momento flector total resulta

$$Mf(z) = \sqrt{MX(z)^2 + MY(z)^2}$$

derivando esta expresión e igualando a cero se obtiene que un máximo o mínimo para tal función ocurre cuando

$$Mx \cdot M'x + My \cdot M'y = 0$$

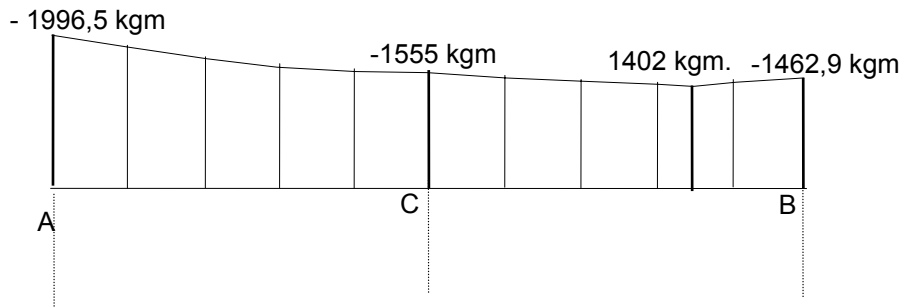
lo que ocurre para el tramo CB en el punto  $z = 1.30$  m

y su valor es  $Mf(z) = 1828$  kgm correspondiéndose con los valores  $MX = - 1674$  kgm y  $MY = 739$  kgm.

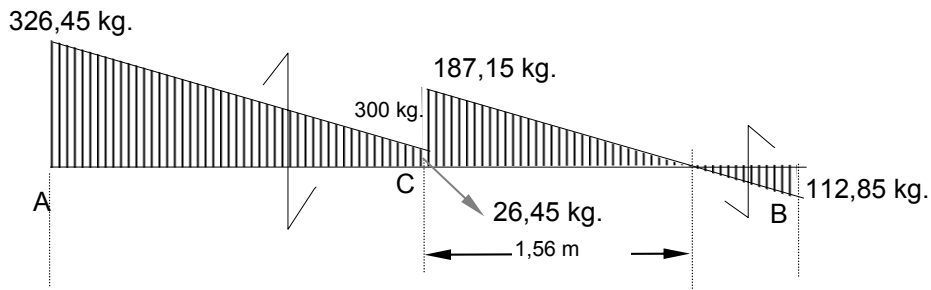
**DIAGRAMAS DE SOLICITACIONES:**

ESCALA DE LONGITUDES: 1 m : 1 cm  
 ESCALA DE FUERZAS : 200 kg.: 1 cm  
 ESCALA DE MOMENTOS: 1000 KGM : 1 cm

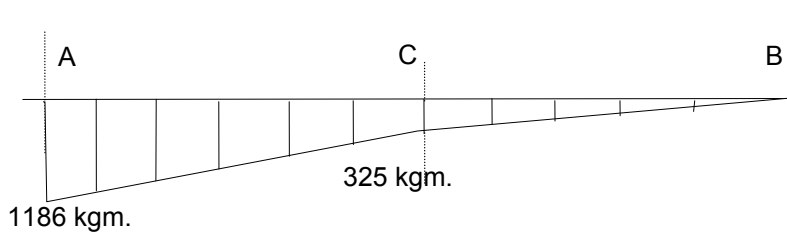
MOMENTO FLECTOR MX ( PLANO Z Y )



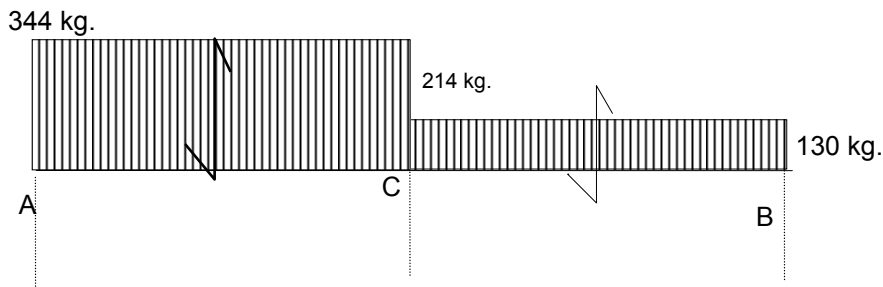
ESFUERZO DE CORTE QY ( PLANO Z Y )



MOMENTO FLECTOR MY ( PLANO Z X )



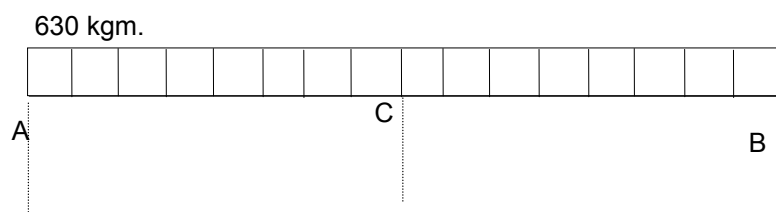
ESFUERZO DE CORTE QX ( PLANO Z X )



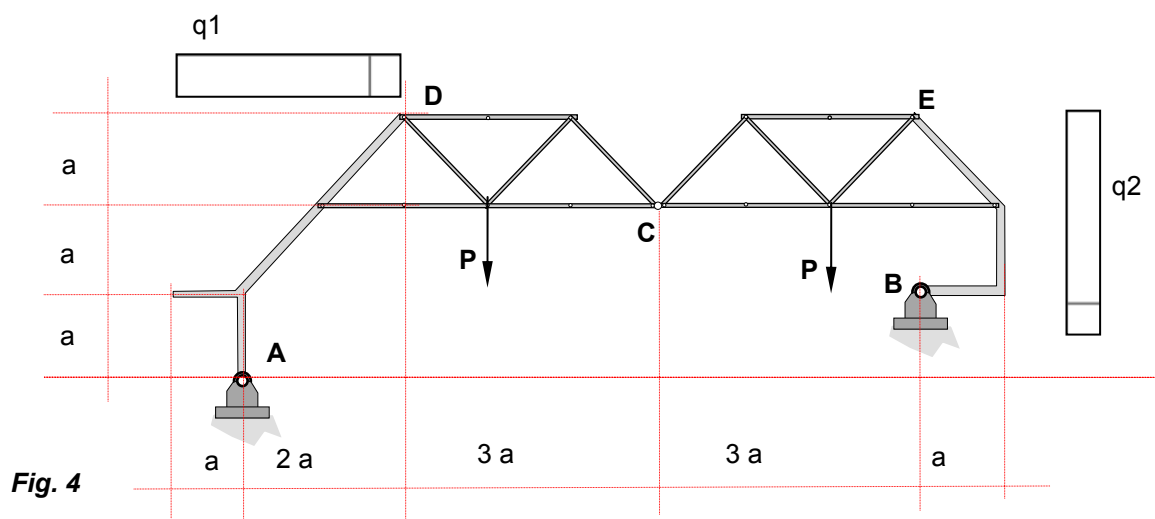
ESFUERZO NORMAL N



**MOMENTO TORSOR MT**



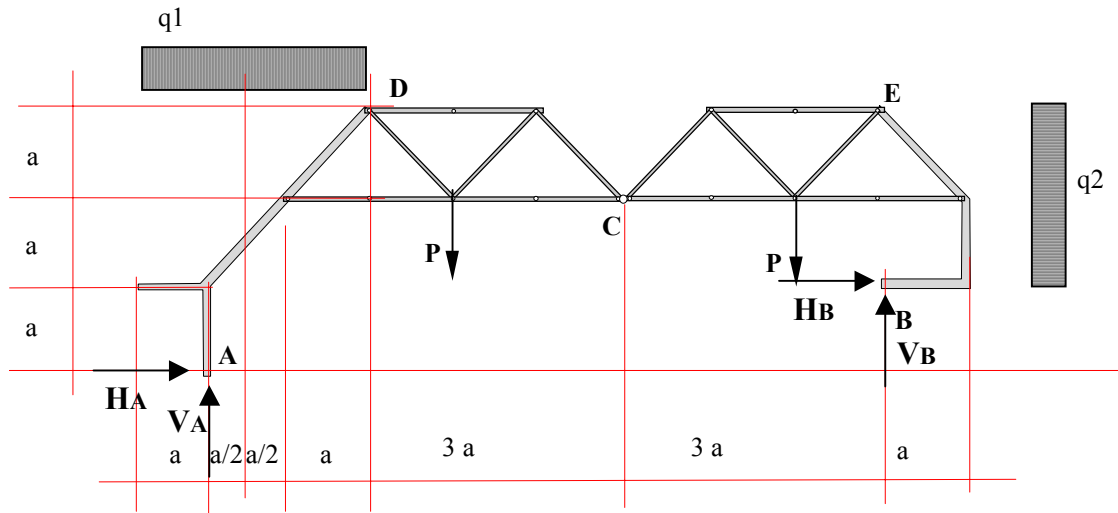
**7.e) Dada la estructura de la Fig. 4**



DATOS:  $a = 2 \text{ m.}$  ;  $q1 = 1 \text{ t/m}$  ;  $q2 = 0,5 \text{ t/m}$  ;  $P = 3 \text{ t.}$

**7.e.a) Calcular las reacciones de vínculo externo (Fig. 4)**





El sistema es isostático, un arco de tres articulaciones. Plantemos sumatoria de momentos de toda la estructura con respecto a A, sumatoria de fuerzas verticales, sumatoria de fuerzas horizontales y determinamos que la cuarta ecuación debe ser sumatoria de momentos con respecto a C de la parte derecha de la estructura, de esta manera se simplifican los cálculos porque  $q_2$  no tiene brazo de palanca con respecto a C.

$$\sum M/A = 0 \Rightarrow -(q_1 \times 3a) \times \left(\frac{a}{2}\right) - P \times 3a - P \times 7a + V_B \times 8a - H_B \times a + (q_2 \times 2a) \times 2a = 0$$

de donde:

$$V_B = \frac{\frac{3}{2} \times a \times q_1 + 10 \times P + H_B - 4a \times q_2}{8} \quad (I)$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A + H_B - q_2 \times 2a = 0$$

de donde:

$$H_A = 2a \times q_2 - H_B \quad (II)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A + V_B - q_1 \times 3a - 3P = 0$$

de donde:

$$V_A = 3a \times q_1 + 2P - V_B \quad (III)$$

$$\sum M/C(\text{derecha}) = 0 \Rightarrow V_B \times 3a + H_B \times a - P \times 2a = 0$$

de donde:

$$H_B = 2P - 3V_B \quad (IV)$$

reemplazando (IV) en (I):

$$V_B = \frac{\frac{3}{2} \times a \times q_1 + 10 \times P + (2P - 3V_B) - 4a \times q_2}{8}$$

$$\boxed{V_B = \frac{3}{22} a \times q_1 - \frac{4}{11} a \times q_2 + \frac{12}{11} P}$$

en este caso, con:  $a = 2 \text{ m.}$  ;  $q_1 = 1 \text{ t/m}$  ;  $q_2 = 0,5 \text{ t/m}$  ;  $P = 3 \text{ t.}$

$$V_B = \frac{3}{22} \times 2 \times 1 - \frac{4}{11} \times 2 \times 0,5 + \frac{12}{11} \times 3 = 3,18 \text{ ton}$$

de (III)

$$V_A = 3 \times 2 \times 1 + 2 \times 3 - 3,18 = 8,82 \text{ ton}$$

de (IV)

$$H_B = 2 \times 3 - 3 \times 3,18 = -3,55 \text{ ton}$$

de (II)

$$H_A = 2 \times 2 \times 0,5 - (-3,55) = 5,55 \text{ ton}$$

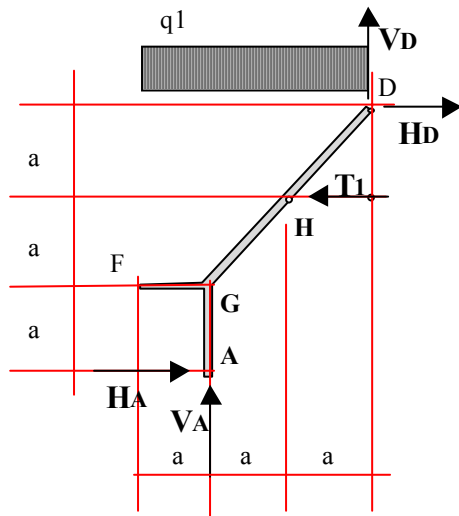
Para verificar los resultado planteamos sumatoria de momentos con respecto a C de la parte a la izquierda:

$$\sum M / C(izquierda) = 0 \Rightarrow +(q_1 \times 3a) \times 4.5a + P \times 2a - V_A \times 5a + H_A \times 2a = 0$$

$$(1 \times 3 \times 2) \times 4.5 \times 2 + 3 \times 2 \times 2 - (8.82) \times 5 \times 2 + (5.55) \times 2 \times 2 = 0$$

**7.e.b) Realizar los diagramas de solicitaciones M, Q y N en los tramos de alma llena AD y BE**

**Tramo AD**



en este caso, con:  $a = 2 \text{ m.}$  ;  $q_1 = 1 \text{ t/m}$  ;  $q_2 = 0,5 \text{ t/m}$  ;  $P = 3 \text{ t.}$

$$\sum M/D = 0 \Rightarrow (1 \text{ t/m} \times 6 \text{ m}) \times 3 \text{ m} - T_1 \times 2 \text{ m} + 5.55 \text{ t} \times 6 \text{ m} - 8.82 \text{ t} \times 4 \text{ m} = 0$$

de donde:

$$T_1 = \frac{18 + 5.55 \times 6 - 8.82 \times 4}{2} = 8.01 \text{ ton}$$

$$M_G^A = -5.55 \text{ t} \times 2 \text{ m} = -11.10 \text{ tm}$$

$$M_G^F = -1 \text{ t/m} \times \frac{(2 \text{ m})^2}{2} = -2 \text{ tm}$$

$$M_H^{AyF} = -1 \text{ t/m} \times \frac{(4 \text{ m})^2}{2} - 5.55 \text{ t} \times 4 \text{ m} + 8.82 \text{ t} \times 2 \text{ m} = -12.56 \text{ tm}$$

$$M_D^{AyF} = -1 \text{ t/m} \times \frac{(6 \text{ m})^2}{2} - 5.55 \text{ t} \times 6 \text{ m} + 8.82 \text{ t} \times 4 \text{ m} + 8.01 \text{ t} \times 2 \text{ m} = 0 \text{ tm} \dots \text{ se verificó}$$

$$Q_A^G = -5.55 \text{ t} \quad \swarrow$$

$$Q_G^F = -2 \text{ t} \quad \downarrow$$

$$Q_G^H = 8.82 \text{ t} \times x \cos(45^\circ) - 5.55 \text{ t} \times \text{sen}(45^\circ) - 1 \text{ t/m} \times 2 \text{ m} \times \cos(45^\circ) = 0.90 \text{ t} \quad \searrow$$

$$Q_H^G = 0.90 \text{ t} - 1 \text{ t/m} \times 2 \text{ m} \times \cos(45^\circ) = -0.52 \text{ t} \quad \swarrow$$

$$Q_H^D = -0.52t + 8.01t \times \sin(45^\circ) = 5.14t$$

$$Q_D^H = 5.14t - 1t / m \times 2m \times \cos(45^\circ) = 3.72t$$

$$N_A = -8.82t$$

$$N_G^A = -8.82t$$

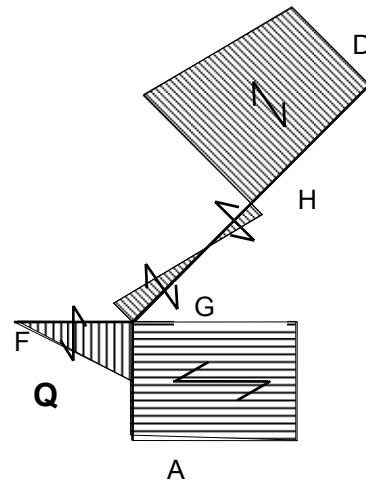
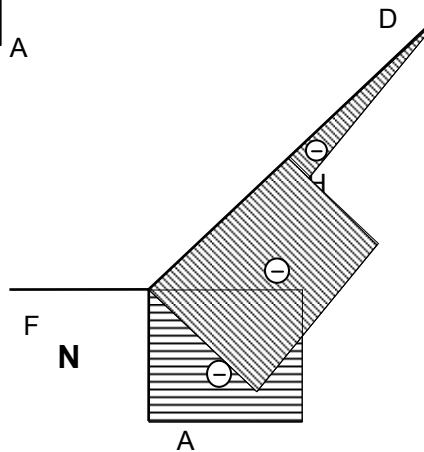
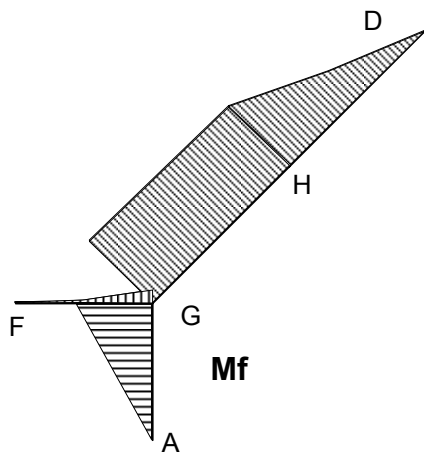
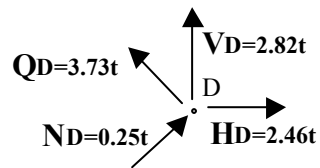
$$N_G^H = -8.82t \times \sin(45^\circ) - 5.55t \times \cos(45^\circ) + 1t / m \times 2m \times \sin(45^\circ) = -8.75t$$

$$N_H^G = -8.75t + 1t / m \times 2m \times \sin(45^\circ) = -7.33t$$

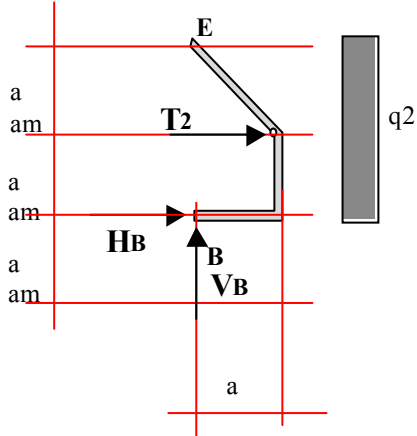
$$N_H^D = -7.33t + 8.01t \times \cos(45^\circ) = -1.67t$$

$$N_D^H = -1.67t + 1t / m \times 2m \times \sin(45^\circ) = -0.25t$$

Ahora se está en condición de verificar el equilibrio en el nudo D:



### Tramo B-E



en este caso, con:  $a = 2 \text{ m.}$  ;  $q_1 = 1 \text{ t/m}$  ;  $q_2 = 0,5 \text{ t/m}$  ;  $P = 3 \text{ t.}$

$$\sum M / E = 0 \Rightarrow -0.5t \times \frac{(4m)^2}{2} - 3.55t \times 4m + T_2 \times 2m = 0$$

de donde:  $T_2 = 9.1t$

$$M_I^B = +3.18t \times 2m = 6.36tm$$

$$M_J^B = +3.18t \times 2m + 3.55t \times 2m + 0.5t / m \times \frac{(2m)^2}{2} = 17tm$$

$$M_E^B = +3.55t \times 4m + 0.5t / m \times \frac{(4m)^2}{2} - 9.1t \times 2m = 0 \quad \dots \text{se verificó.}$$

Para graficar las parábolas calculamos las flechas:

$$f_{E-J} = f_{i-J} = 0.5t / m \times \frac{(2m)^2}{8} = 0.25tm$$

$$Q_B^I = 3.18t \quad \uparrow$$

$$Q_I^B = 3.18t \quad \uparrow$$

$$Q_I^J = +3.55t \quad \rightarrow$$

$$Q_J^I = +3.55t + 0.5t / m \times 2m = +4.55t \quad \rightarrow$$

$$Q_J^E = (3.55t + 0.5t / m \times 2m - 9.1t) \times \sin(45^\circ) - 3.18t \times \cos(45^\circ) = -5.47t \quad \downarrow$$

$$Q_J^E = (3.55t + 0.5t / m \times 4m - 9.1t) \times \sin(45^\circ) - 3.18t \times \cos(45^\circ) = -4.76t \quad \downarrow$$

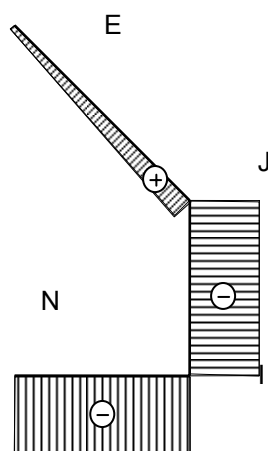
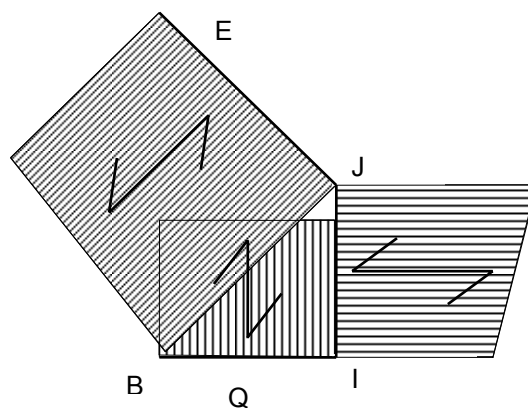
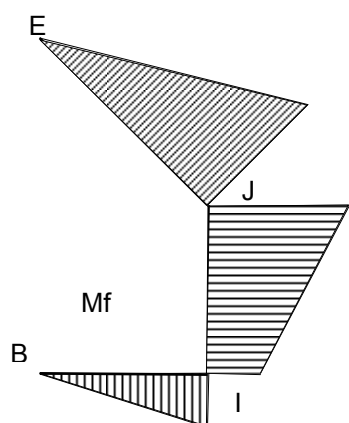
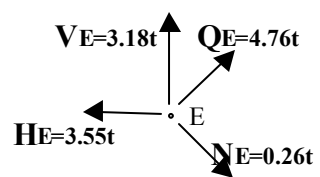
$$N_B^I = N_I^B = +3.55t$$

$$N_I^J = N_J^I = -3.18t$$

$$N_J^E = (-3.55t - 0.5t / m \times 2m + 9.1t) \times \cos(45^\circ) - 3.18t \times \sin(45^\circ) = +0.97t$$

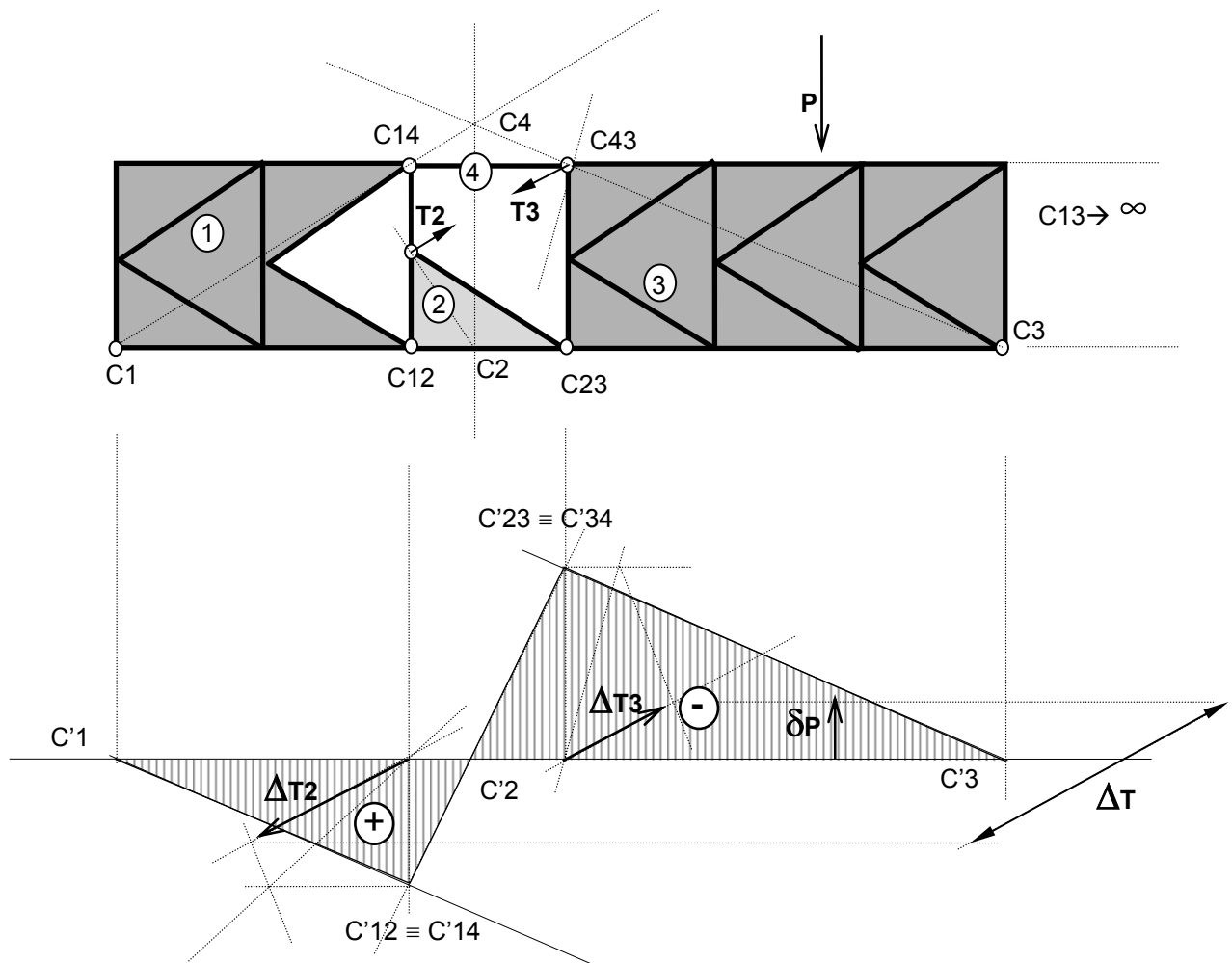
$$N_E^J = (-3.55t - 0.5t / m \times 4m + 9.1t) \times \cos(45^\circ) - 3.18t \times \sin(45^\circ) = +0.26t$$

Podemos plantear el equilibrio del nudo E:



## 8. LINEAS DE INFLUENCIA.

**8.a) En el reticulado diseñado en el punto 6, desarrolle la LI del esfuerzo de una de la barras inclinadas usadas en el cálculo. Método Cinemático**



Aplicando el principio de los trabajos virtuales :

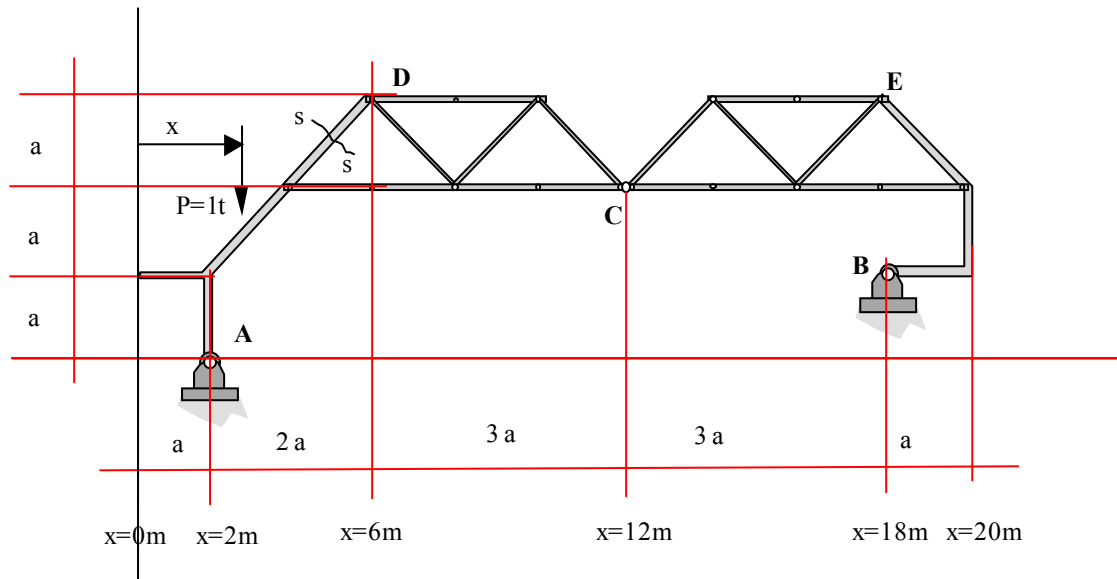
$$-P \cdot \delta P - T_2 \cdot \Delta T_2 - T_3 \cdot \Delta T_3 = 0$$

Como  $T_2 = T_3 = T$  (Tensión de la barra considerada) y  $\Delta T_2 + \Delta T_3 = \Delta T$

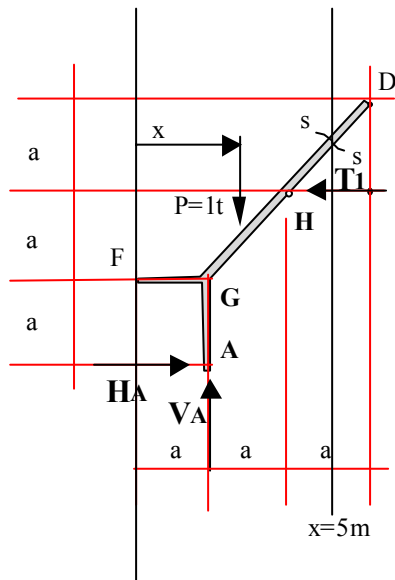
$$T = -P \cdot \delta P / \Delta T$$

Esto significa que para la posición considerada de P, el signo de la tensión T de la barra estudiada es negativo, es decir de **compresión**, dado que el sentido propuesto como positivo indica **tracción**.

8.b) En la estructura de la Fig. 4 desarrolle la LI del Mf en la sección intermedia entre el punto D y la primera barra horizontal del sistema reticulado empleando el método analítico. (a=2m)



Para el cálculo del Momento Flector en la Sección S-S ( $x=5m$ ) utilizamos el sistema de fuerzas aplicado sobre la parte izquierda a dicha sección.



$$0m \leq x \leq 5m$$

$$M_{S-S} = V_A \times 3m - H_A \times 5m + T_1 \times 1m - 1ton \times (5m - x) \quad (8.b.1)$$

$$5m \leq x \leq 20m$$

$$M_{S-S} = V_A \times 3m - H_A \times 5m + T_1 \times 1m \quad (8.b.2)$$

Vemos que  $V_A$ ,  $H_A$  y  $T_1$  dependen de la posición de la carga exterior.

### Cálculo de $V_A$ y $H_A$

Para calcular  $V_A$  y  $H_A$  planteamos dos ecuaciones de equilibrio de momentos,

$$\sum M / B = 0$$

$\sum M^{izquierda} / C = 0$ , esta ecuación cambia de forma según la carga exterior este a derecha o izquierda de C.

$$\underline{0m \leq x \leq 12m}$$

$$\sum M / B = 0 \Rightarrow 1ton \times (18m - x) + H_A \times 2m - V_A \times 16m = 0 \quad (8.b.3)$$

$$\sum M^{izquierda} / C = 0 \Rightarrow 1ton \times (12m - x) + H_A \times 4m - V_A \times 10m = 0 \quad (8.b.4)$$

de donde:

$$\boxed{H_A = -\frac{3}{11} + \frac{3}{22}x} \quad (8.b.5)$$

$$\boxed{V_A = \frac{12}{11} - \frac{1}{22}x} \quad (8.b.6)$$

$$\underline{12m \leq x \leq 20m}$$

$$\sum M / B = 0 \Rightarrow 1ton \times (18m - x) + H_A \times 2m - V_A \times 16m = 0 \quad (8.b.7) = (8.b.3)$$

$$\sum M^{izquierda} / C = 0 \Rightarrow H_A \times 4m - V_A \times 10m = 0 \quad (8.b.8)$$

de donde:

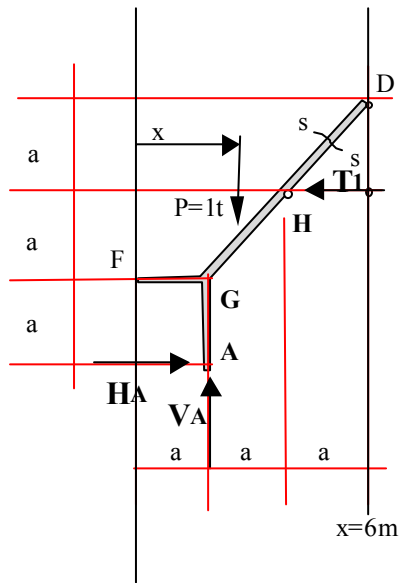
$$\boxed{H_A = \frac{45}{11} - \frac{5}{22}x} \quad (8.b.9)$$

$$\boxed{V_A = \frac{18}{11} - \frac{1}{11}x} \quad (8.b.10)$$

### **Cálculo de T<sub>1</sub>**

$$\underline{0m \leq x \leq 6m}$$



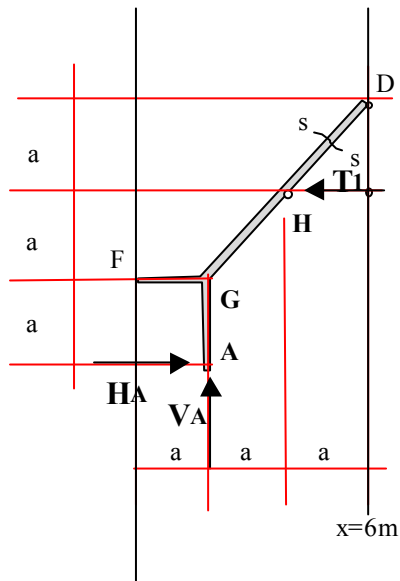


$$\sum M / D = 0 \Rightarrow 1 \text{ ton} \times (6m - x) + H_A \times 6m - V_A \times 4m - T_1 \times 2m = 0 \quad (8.B.11)$$

Reemplazando en esta última las expresiones de  $V_A$  y  $H_A$  correspondientes al intervalo de  $x$ , (8.b.5) y (8.b.6), se llega a que

$$\boxed{T_1 = 0} \text{ para todo el intervalo.} \quad (8.b.12)$$

$$\underline{6m \leq x \leq 12m}$$

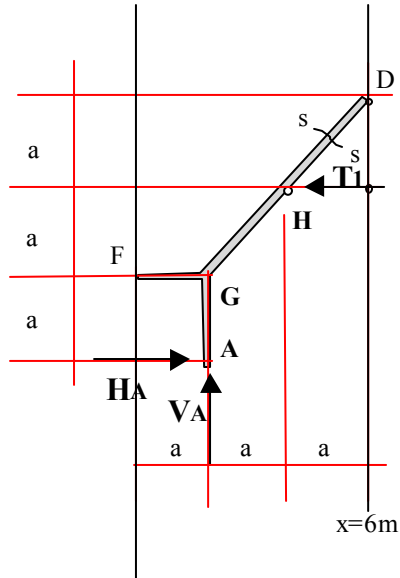


$$\sum M / D = 0 \Rightarrow H_A \times 6m - V_A \times 4m - T_1 \times 2m = 0 \quad (8.B.13)$$

Con las expresiones de  $V_A$  y  $H_A$  correspondientes al intervalo de  $x$ , (8.b.5) y (8.b.6), se llega a que

$$\boxed{T_1 = -3 - \frac{1}{2}x} \quad (8.b.14)$$

$$\underline{12m \leq x \leq 20m}$$



$$\sum M / D = 0 \Rightarrow H_A \times 6m - V_A \times 4m - T_1 \times 2m = 0 \quad (8.B.15) = (8.B.13)$$

Con las expresiones de  $V_A$  y  $H_A$  correspondientes al intervalo de  $x$ , (8.b.9) y (8.b.10), se llega a que

$$T_1 = 9 - \frac{1}{2}x \quad (8.b.16)$$

#### Expresiones de cálculo analítico de la línea de influencia buscada.

Estamos en condiciones de reemplazar las expresiones de  $H_A$ ,  $V_A$  y  $T_1$  en las ecuaciones (8.b.1) y (8.b.2)

$$0m \leq x \leq 5m$$

$$M_{S-S} = V_A \times 3m - H_A \times 5m + T_1 \times 1m - 1\text{ton} \times (5m - x) \quad (8.b.1)$$

$$H_A = -\frac{3}{11} + \frac{3}{22}x \quad (8.b.5)$$

$$V_A = \frac{12}{11} - \frac{1}{22}x \quad (8.b.6)$$

$$T_1 = 0 \quad (8.b.12)$$

$$M_{S-S} = -\frac{4}{11} + \frac{2}{11}x$$

$$5m \leq x \leq 6m$$

$$M_{S-S} = V_A \times 3m - H_A \times 5m + T_1 \times 1m \quad (8.b.2)$$

$$H_A = -\frac{3}{11} + \frac{3}{22}x \quad (8.b.5)$$

$$V_A = \frac{12}{11} - \frac{1}{22}x \quad (8.b.6)$$

$$T_1 = 0 \quad (8.b.12)$$

$$M_{S-S} = \frac{51}{11} - \frac{9}{11}x$$

$$\underline{6m \leq x \leq 12m}$$

$$M_{S-S} = V_A \times 3m - H_A \times 5m + T_1 \times 1m \quad (8.b.2)$$

$$H_A = -\frac{3}{11} + \frac{3}{22}x \quad (8.b.5)$$

$$V_A = \frac{12}{11} - \frac{1}{22}x \quad (8.b.6)$$

$$T_1 = -3 - \frac{1}{2}x \quad (8.b.14)$$

$$M_{S-S} = \frac{18}{11} - \frac{7}{22}x$$

$$\underline{12m \leq x \leq 20m}$$

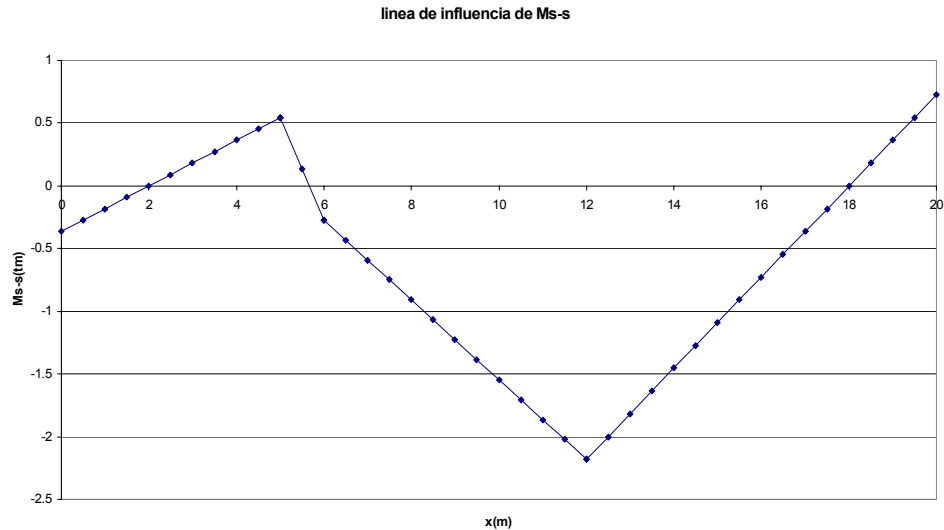
$$M_{S-S} = V_A \times 3m - H_A \times 5m + T_1 \times 1m \quad (8.b.2)$$

$$H_A = \frac{45}{11} - \frac{5}{22}x \quad (8.b.9)$$

$$V_A = \frac{18}{11} - \frac{1}{11}x \quad (8.b.10)$$

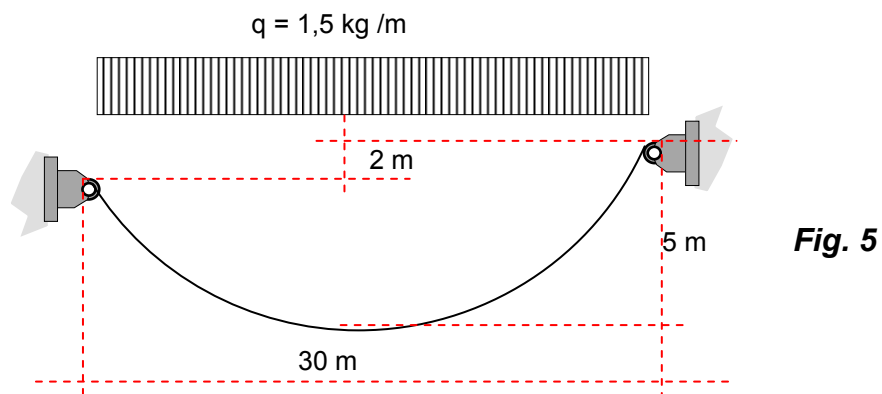
$$T_1 = 9 - \frac{1}{2}x \quad (8.b.16)$$

$$M_{S-S} = \frac{72}{11} - \frac{4}{11}x$$



## 9. CABLES Y CADENAS

9.a) Para el cable de la *Fig. 5* determine la tensión máxima del cable y la longitud del mismo para la configuración que se indica



Datos  $q = 1,5 \text{ kg. /m}$  ;  $f_A = 3 \text{ m}$  ;  $f_B = 5 \text{ m}$  ;  $L = 30 \text{ m}$

Resolución genérica:

De la expresión general: 
$$Y = \frac{q \cdot x^2}{2 \cdot H}$$

se debe cumplir que  $f_A = \frac{q \cdot a^2}{2 \cdot H}$  y que  $f_B = \frac{q \cdot b^2}{2 \cdot H}$

despejando  $2 H / q$  de ambas expresiones e igualando se llega a que: 
$$\frac{a^2}{f_A} = \frac{b^2}{f_B}$$

y como además  $a + b = L$  se llega a que  $b = L / ( 1 + \sqrt{f_A / f_B} )$

Para los datos del problema resulta  $b = 30 \text{ m} / [1 + \sqrt{(3/5)}] = 16,90 \text{ m}$

$$a = 30 \text{ m} - 16,90 \text{ m} = 13,10 \text{ m}$$

a su vez  $H = \frac{q \cdot a^2}{2 \cdot f_A}$  de donde  $H = 42,90 \text{ kg}$ .

Tomando momento con respecto al punto A

$$\Sigma M_A = 1,5 \text{ kg./m} \cdot 30 \text{ m} \cdot 15 \text{ m} + 42,90 \text{ kg} \cdot 2 \text{ m} - V_B \cdot 30 \text{ m} = 0 \rightarrow V_B = 25,36 \text{ kg}.$$

$$\Sigma M_B = 1,5 \text{ kg./m} \cdot 30 \text{ m} \cdot 15 \text{ m} - 42,90 \text{ kg} \cdot 2 \text{ m} - V_A \cdot 30 \text{ m} = 0 \rightarrow V_A = 19,64 \text{ kg}.$$

$$V_{\max.} = \sqrt{H^2 + V_B^2} = 49,84 \text{ kg}.$$

Para el cálculo de la longitud del cable ( $S = S_a + S_b$ ); se utilizan las fórmulas:

$$S_a = a (1 + 2/3 \cdot K_a^2 - 2/5 \cdot K_a^4 + \dots) \quad \text{donde } K_a = f_A / a$$

y

$$S_b = b (1 + 2/3 \cdot K_b^2 - 2/5 \cdot K_b^4 + \dots) \quad \text{donde } K_b = f_B / b$$

$$K_a = 3 \text{ m} / 13,10 \text{ m} = 0,229 \rightarrow S_a = 13,54 \text{ m}$$

$$K_b = 5 \text{ m} / 16,90 \text{ m} = 0,296 \rightarrow S_b = 17,84 \text{ m}$$

y finalmente  $S = 31,38 \text{ m}$

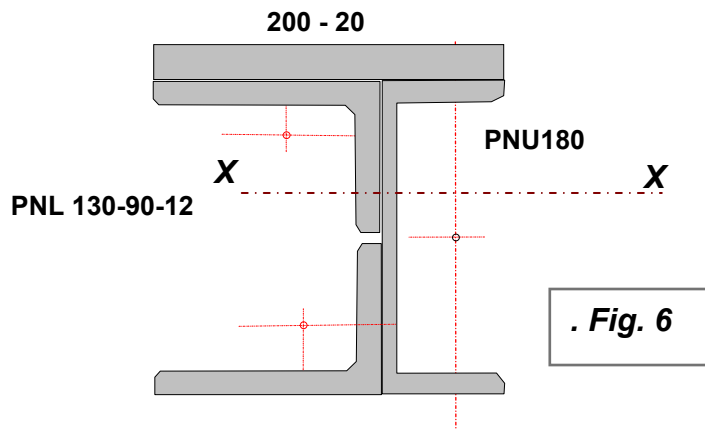
## 10. CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS DE LAS SECCIONES: MOMENTO DE INERCIA

### DATOS DE LOS PERFILES

	PNU 180	
	h = 180 mm	b = 70 mm
	Sección : 28 cm <sup>2</sup>	
	Ix = 1350 cm <sup>4</sup>	
	Iy = 114 cm <sup>4</sup>	
	ey = 1.92 cm	

	PNL 130-90-12	
	h = 130 mm	b = 90 mm
	Sección : 25,1 cm <sup>2</sup>	
	Ix = 420 cm <sup>4</sup>	
	Iy = 165 cm <sup>4</sup>	
	ex = 4.24 cm	ey = 2,26 cm

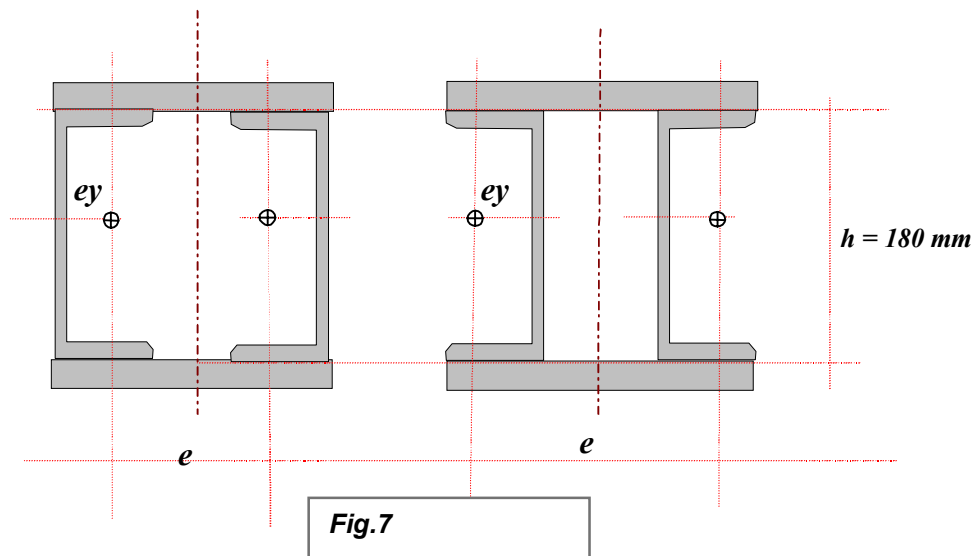
10.a) Para la viga de sección compuesta por los perfiles que se indican, calcular el momento de inercia baricéntrico  $I_x$  de la sección compuesta. Fig. 6.-



Solución por aplicación de Planilla de Cálculo:

NP	Xg	yg	Sección	lx	ly	S0X	Yi = yg - Yg	lxg
1	4.92	9	28	1350	114	252	-3.38	1670
2	-4.2	2.26	25.1	165	420	56.726	-10.12	2736
3	-4.2	15.74	25.1	165	420	395.074	3.36	448
4	0	19	40	13	1333	760	6.62	1766
			118.2			1463.8	<b>lx g</b>	<b>6620</b>
	YG =	12.38						

10.b) Disponiendo de dos perfiles PNU 180 y una planchuela de espesor de 2 mm se desea formar con ellos un perfil compuesto cuya inercia sea de igual valor en ambos sentidos. Elegir la disposición que se considera más conveniente y determinar cual será la separación e necesaria para que se cumpla la condición mencionada.



Respuesta:

La disposición más conveniente es la cerrada ( forma de "□" ) porque implica mayor aprovechamiento del material pues aleja el alma de los perfiles del centro de simetría.

Planilla de resolución:

Perfil	dx	dy	Ix*	Iy*	AREA	IX	IY
2 PNU180	$b/2 - 1.92$	0	1350	114	28	1350	$114 + 28 \cdot (b/2 - 1.92)^2$
2 planch.	0	10	$2/3 \cdot B$	$1/6 \cdot b^3$	2 b	$2/3 \cdot b + 200 b$	$1/6 b^3$

con:

dx = distancia del baricentro propio al eje de simetría Y

dy = distancia del baricentro propio al eje de simetría X

Ix\* = Momento de inercia con respecto al eje baricéntrico propio de sentido X

Iy\* = Momento de inercia con respecto al eje baricéntrico propio de sentido Y

IX e IY = Mom. De inercia con respecto a los ejes globales.

El problema plantea la necesidad de igualar IX e IY, y con esta relación calcular el b necesario.

Haciendo las correspondientes operaciones algebraicas se llega a la expresión

$$1/3 b^3 + 14 b^2 - 508,52 b - 2266 = 0$$

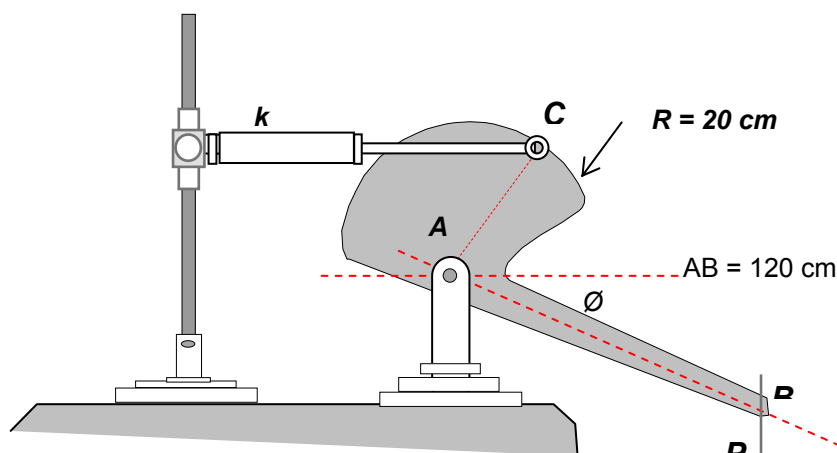
ecuación cúbica cuya resolución arroja tres raíces

$$x_1 = -64,13, x_2 = 26,18, x_3 = -4,04$$

corresponde adoptar  $b = 26,18 \text{ cm}$

por lo tanto la separación  $e = 22,34 \text{ cm}$

## 11. ENERGIA POTENCIAL Y ESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO



La pieza de la figura tiende a rotar en torno de su eje A al aplicarle un peso P en el extremo B. En el punto C está aplicado el extremo de un brazo a resorte, de constante elástica k y que está dispuesto de modo que su dirección sea siempre horizontal como se puede apreciar en la figura. El ángulo formado por CAB es recto y se supone que para la posición horizontal del brazo AB el resorte permanece en reposo. Se debe determinar, aplicando el concepto de energía potencial, la posición de equilibrio del sistema y la estabilidad del mismo.

$$P = 100 \text{ kg. } k = 35 \text{ kg. /cm; } l = 120 \text{ cm } r = 20 \text{ cm}$$

Supondremos la posición de reposo del resorte como configuración de referencia.

Por acción del peso P el sistema girará un determinado ángulo  $\emptyset$  hasta que la tensión producida por el alargamiento del resorte produzca el equilibrio.

La energía potencial es  $VG = -P \cdot y = -P \cdot l \cdot \text{sen } \emptyset$

(Partimos del hecho que la energía potencial es cero cuando el brazo está horizontal)

La energía elástica será  $VE = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k (r \cdot \text{sen } \emptyset)^2$

La energía total alcanzada por el sistema será:

$$V = VE + VG = \frac{1}{2} k r^2 \text{sen}^2 \emptyset - P \cdot l \cdot \text{sen } \emptyset$$

El equilibrio exige que  $dV / d\emptyset = 0$

$$\text{de manera que: } dV / d\emptyset = k r^2 \text{sen } \emptyset \cos \emptyset - P \cdot l \cdot \cos \emptyset = 0$$

$$\text{ordenando} \quad \cos \emptyset (k r^2 \text{sen } \emptyset - P \cdot l) = 0$$

Tenemos dos soluciones, una para  $\cos \emptyset = 0$  es decir que  $\emptyset = 90^\circ$ , lo que ocurrirá cuando el brazo AB “cuelgue” directamente del pasador en A, y la tensión del resorte también actúe en sentido radial sobre el sistema sin provocar momento sobre el centro A.

$$\text{La otra solución es para } k r^2 \text{sen } \emptyset - P \cdot l = 0$$

$$\text{de manera que } \text{sen } \emptyset = P \cdot l / k \cdot r^2$$

$$\text{como } \text{sen } \emptyset \leq 1 \text{ entonces } P \cdot l \leq k r^2$$

Para analizar la estabilidad del equilibrio se debe calcular la derivada segunda de la expresión de la energía:

$$d^2V / d^2\emptyset = k r^2 (\cos^2 \emptyset - \text{sen}^2 \emptyset) + P \cdot l \cdot \text{sen } \emptyset$$

$$\text{o bien: } d^2V / d^2\emptyset = k r^2 \cos 2\emptyset + P \cdot l \cdot \text{sen } \emptyset$$

Con las expresiones obtenidas y los valores proporcionados como datos:

$$\text{sen } \emptyset = P l / k r^2 = 100 \text{ kg. } 120 \text{ cm} / (35 \text{ kg. /cm. } 400 \text{ cm}^2) = 0.857$$

$$\text{de donde } \emptyset = 58^\circ 59' \text{ y } \cos \emptyset = 0.515$$

$$d^2V / d^2\emptyset = 35 \text{ kg./cm} \cdot 400 \text{ cm}^2 (0.515^2 - 0.857^2) + 100 \text{ kg. } 120 \text{ cm. } 0.857 = 3715$$

valor positivo, que determina que para el ángulo de  $\emptyset = 58^\circ 59'$  el equilibrio es estable, ya que la variación de la energía total alcanza un valor mínimo.

La otra solución, es decir para  $\emptyset = 90^\circ$ , resultaría:

$$\text{dado que } \cos \emptyset = 0 \text{ y que } \text{sen } \emptyset = 1$$

$$d^2V / d^2\emptyset = -35 \text{ kg./cm} \cdot 400 \text{ cm}^2 + 100 \text{ kg. } 120 \text{ cm.} = -2000$$



valor negativo, que indica la existencia de un valor máximo para la variación energética en ese punto para el cual, entonces, el equilibrio resulta ser *inestable*.