ESTÁTICA ELEMENTAL PARA INGENIEROS

ESTÁTICA
UNIDAD II

- Tipos de fuerzas
- Momento estático
- Cuplas
- Sistemas de fuerzas
- Reducción de los sistemas de fuerzas
- Equilibrio

Tipos de fuerzas

Son varias las características con las que podemos diferenciar las fuerzas:

Fuerzas gravitatorias: el peso de los cuerpos (W = m.g)

Fuerzas de contacto: las que se producen por la interacción de dos cuerpos

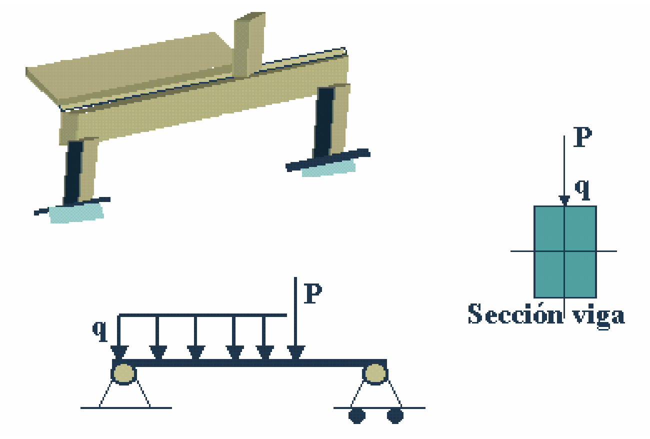
Fuerzas de cuerpo: actúan sobre el volumen del cuerpo (las fuerzas gravitatorias)

Fuerzas de superficie: las que se producen entre dos superficies en contacto. (la presión de un liquido, la sobrecarga de una losa)

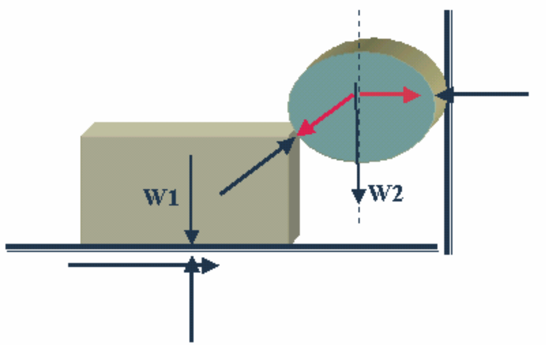
A las de superficie por simplificaciones que a veces permiten la geometría del cuerpo y la simetría de las cargas, las podemos considerar:

Lineales (desarrolladas sobre una línea) por ej. peso propio mas la sobrecarga accidental de una viga de sección simétrica.

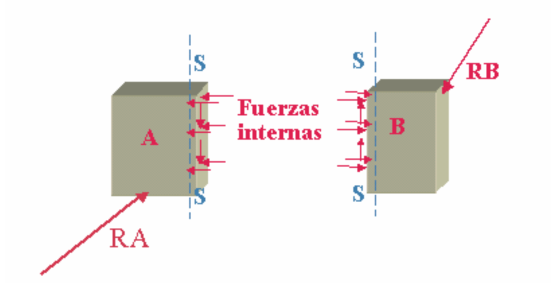
Puntuales (aplicadas en un punto) una superficie pequeña por ej. una columna.



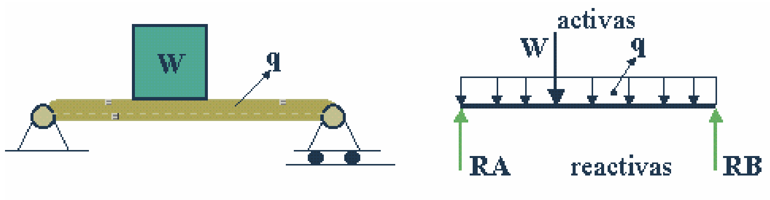
Fuerzas externas: aquellas que son ejercidas por otro cuerpo.



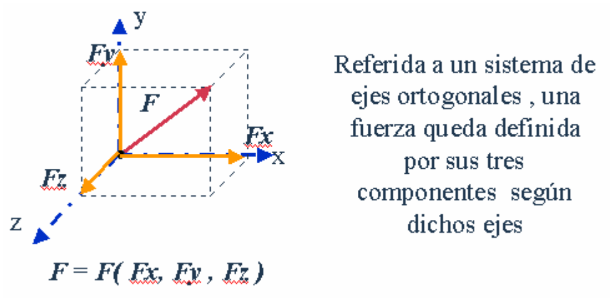
Fuerzas internas: las que se producen entre dos partes de un mismo cuerpo.

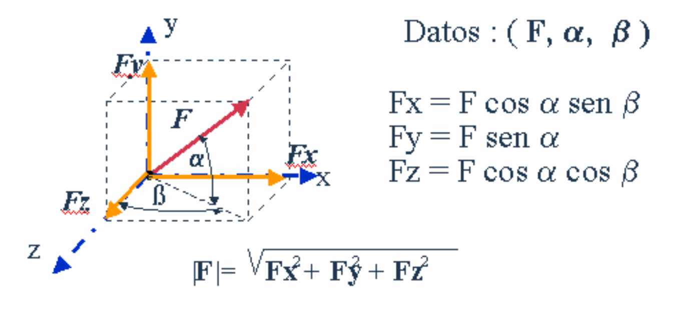


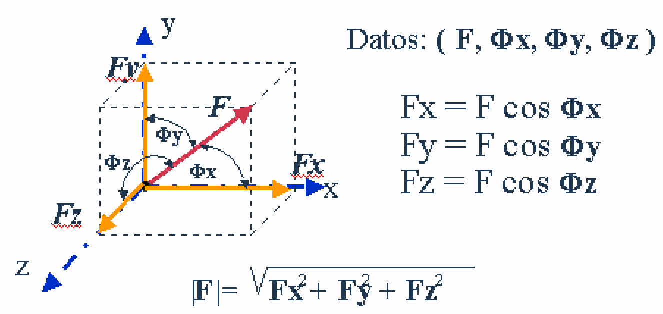
Fuerzas activas: las que recibe el cuerpo por su peso y debidas a la acción de otros cuerpos.
Fuerzas reactivas: las que se producen en los apoyos de conexión de un cuerpo.

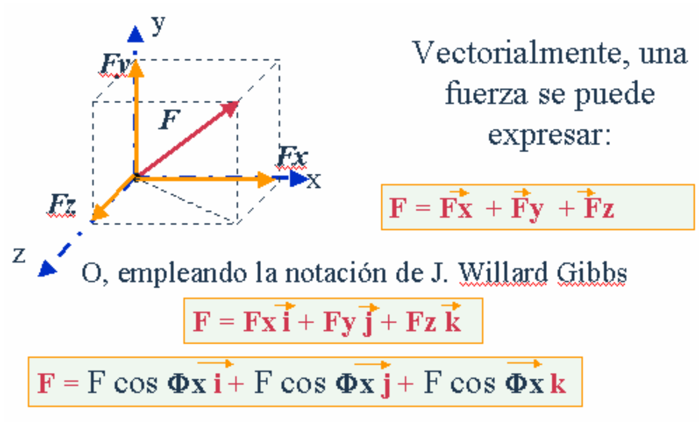


<u>Componentes ortogonales</u>
<u>de una fuerza</u>

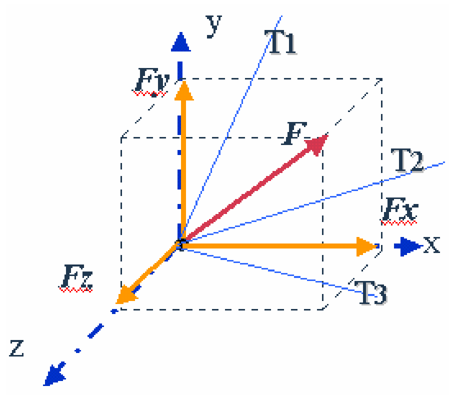








Descomposición de una Fuerza en tres Componentes



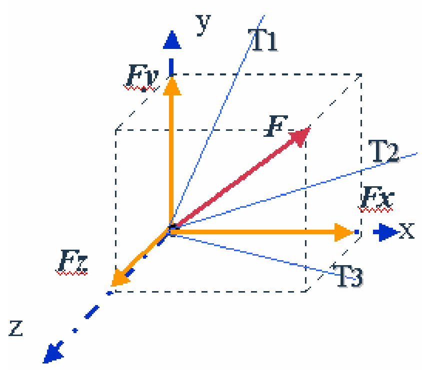
Método de las Proyecciones

La relación entre una fuerza ***F = F(Fx, Fy, Fz)***
Y tres componentes cualesquiera definidas por sus direcciones:

T1(α1x, α1y, α1z)

T2(α2x, α2y, α2z)

T3(α3x, α3y, α3z)



Son las siguientes:

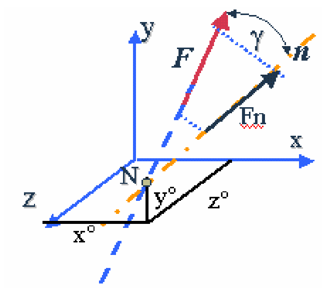
Fx = T1x + T2x + T3x
Fy = T1y + T2y + T3y
Fz = T1z + T2z + T3z

Fx = T1 cos⟨1x + T2 cos⟨2x +T3 cos⟨3x
Fy = T1 cosα1y + T2 cosα3y +T3 cosα3y
Fz = T1 cosα1z + T2 cosα2z +T3 cosα3z

Son Tres ecuaciones con Tres incógnitas:

Los datos pueden ser las direcciones (necesitamos sólo dos ángulos para cada una) o las magnitudes de las fuerzas.

Proyección vectorial de una fuerza sobre un eje n que la corta



Sea un eje *n*(βx, βy, βz), y una fuerza *F*(F, Φx, Φy, Φz), tal que se corten en un punto cualquiera N (x°, y°, z°)

Fn = ***F . n*** = F . n . cos γ (*producto escalar)*

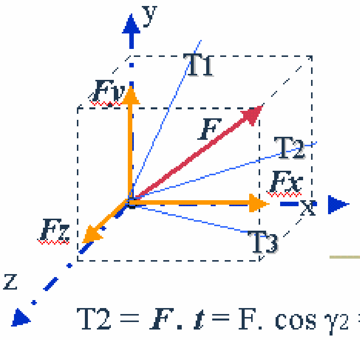
F = F (***i*** cos Φx, ***j*** cos Φy, ***k*** cos Φz)

n = 1. (***i*** cos βx, ***j*** cos βy, ***k*** cos βz)

Su producto escalar será

Fn = ***F . n*** = F . 1 . cos γ = F (cos Φx cos βx , cos Φy cos βy , cos Φz cos βz) cos γ = (cos Φx cos βx , cos Φy cos βy , cos Φz cos βz)

Descomposición de una Fuerza en tres Componentes



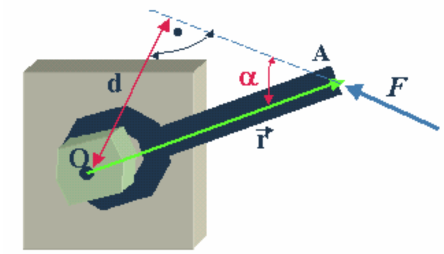
Método Vectorial

T1 = ***F*** . ***t*** = F. cos γ_1 =
F (cosΦx cosα1x
+ cosΦy cosα1y
+ cosΦz cosα1z)

T2 = ***F*** . ***t*** = F. cos γ_2 =
F (cosΦx cosα2x
+ cosΦy cosα2y
+ cosΦz cosα2z)

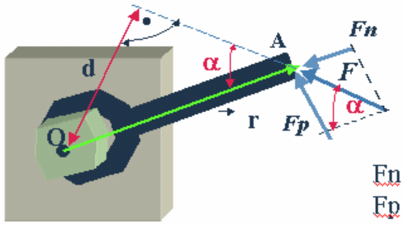
T3 = ***F*** . ***t*** = F. cos γ_3 =
F (cosΦx cosα3x
+ cosΦy cosα3y
+ cosΦz cosα3z)

Momento estático de una fuerza respecto a un punto (MF /o)



O es el **centro de momentos**, **d** es el **brazo** de palanca o de momentos y ***r*** es el ***vector posición*** del punto de aplicación de la fuerza

El valor del Momento de una fuerza F respecto de un punto "O" es por definición el producto de la fuerza *F* por la menor distancia "d" desde el punto "O" a la fuerza F.

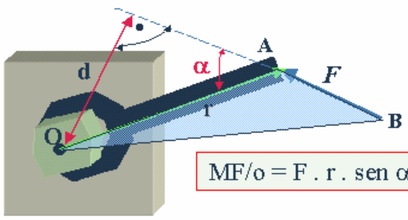


Fn = F cos α
Fp = F sen α

Expresión matemática

| MF/O| = | F | **.** d o también:
|MF/O| = | Fp| **.** | ***r*** | En ambos casos
|MF/O| = |F| **.** | ***r*** | **sen α**

El significado geométrico



MF/o = F . r . sen α = F . d

La representación gráfica de ***r*** y de ***F*** en escala de longitudes y de fuerzas respectivamente permite ver que el valor de MF/o es igual al doble del área del triángulo AOB, que tiene al segmento representativo de la fuerza como base y al centro de momentos como vértice opuesto

Momento de una fuerza respecto a un punto

El **significado físico:** produce giro, es la importancia de una fuerza para producir un giro alrededor de un punto.

El **signo del momento** es convencional, dependiendo del sentido del giro que tiende a producir dicha fuerza.

Unidades: Están expresadas en unidades de fuerza multiplicadas por unidades de longitud (kg-m, Tn-m , kg-cm, N-m, KN-m, etc.)

Diferencias con el concepto de Trabajo:

Ambos son el producto de magnitudes de fuerza por longitudes, pero

Momento es el producto del valor de la fuerza por el de una distancia perpendicular a la dirección de la fuerza

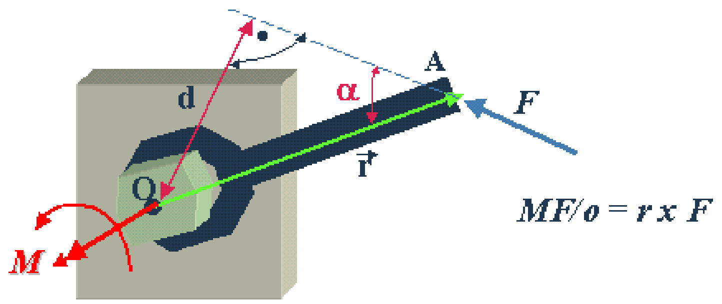
Trabajo es el producto del valor de la fuerza por el de una distancia en la dirección de la fuerza

El Momento es una magnitud Vectorial y su significado físico es la tendencia a la producción de un giro por parte de una fuerza respecto a un punto

Trabajo es una magnitud escalar y su significado físico esta vinculado al desplazamiento del punto de aplicación de una Fuerza

Momento estático de una fuerza respecto a un punto (MF /o)

Representación Vectorial

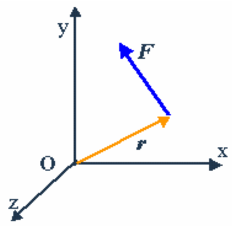


El momento estático de una fuerza con respecto a un punto es el resultado del producto vectorial entre el **vector posición** ***r*** que define a un punto de aplicación de la fuerza en relación al **centro de momentos** y el vector ***F,*** representativo de la misma.

Su representación es un vector **aplicado** al centro de momentos con recta de acción perpendicular al plano que contiene a la recta de acción de la fuerza y a dicho punto, también llamado **plano de momentos.**

El sentido o signo del vector es convencional y depende de la orientación del giro que la fuerza tiende a provocar. El sentido del vector ilustrado en la figura responde a la convención llamada “de la mano derecha”.

Momento estático de una fuerza respecto a un punto (MF /o)



Si los vectores ***r*** y ***F*** están dados por sus componentes rectangulares

$\boldsymbol{r}$ = (rx, ry, rz) $\boldsymbol{r}$ = ($\boldsymbol{i}$ rx + $\boldsymbol{j}$ ry + $\boldsymbol{k}$ rz)

$\boldsymbol{F}$ = (Fx, Fy, Fz) $\boldsymbol{F}$ = ($\boldsymbol{i}$ Fx + $\boldsymbol{j}$ Fy + $\boldsymbol{k}$ Fz)

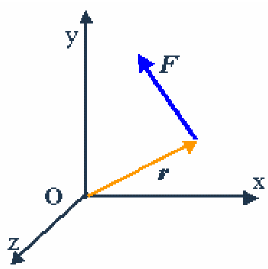
El producto vectorial ***r x F*** queda definido por la expresión:

MF/o = i (Fz ry – Fy rz) + ***j*** (Fx rz – Fz rx) + ***k*** (Fy rx –Fx ry)

Si los vectores ***r*** y ***F*** están dados por sus componentes rectangulares

r = (rx, ry, rz) ***r*** = (***i*** rx + ***j*** ry + ***k*** rz)

F = (Fx, Fy, Fz) ***F*** = (***i*** Fx + ***j*** Fy + ***k*** Fz)

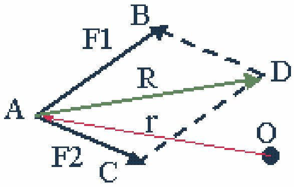


O expresado en la forma del determinante

$$\overrightarrow{MF}/o = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ rx & ry & rz \\ Fx & Fy & Fz \end{vmatrix}$$

Teorema de Varignón

El momento de la resultante de dos fuerzas concurrentes respecto a un punto cualquiera es igual a la suma de los momentos de las componentes respecto al mismo punto.

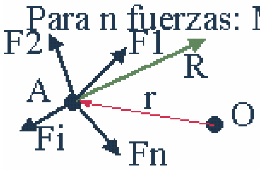


MR/o = MF1/o +MF2/o

r x R = r x F1 + r x F2 = r x (F1 +F2)

Para n fuerzas: MR/o = r x F1+ r x F2 +...+ r x Fi +...+ r x Fn

= r x (F1+F2+..+Fi+..+Fn) = r x R



$$MR/o = \sum_{i=1}^{i=n} MFi/o$$

Momento de una fuerza respecto a un eje "t"

MF/o = Momento de F respecto al centro de reducción O

MF/t = Proyección de ***MF/o*** sobre ***t***

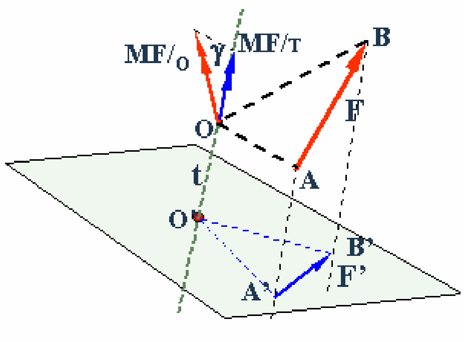
MF/o = 2. Área OAB

MF/t = *MF/o . t* = MF/o. cos γ

MF'/o' = 2. Área O'A'B'

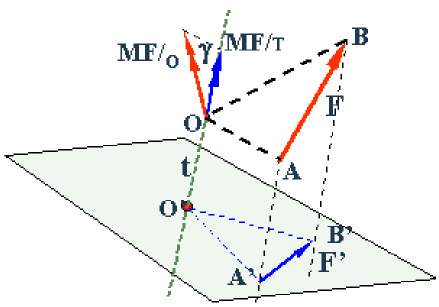
[O'A'B'] = [OAB]. cos γ

<u>MF/t = *MF/o*. cos γ = *MF'/o'*</u>



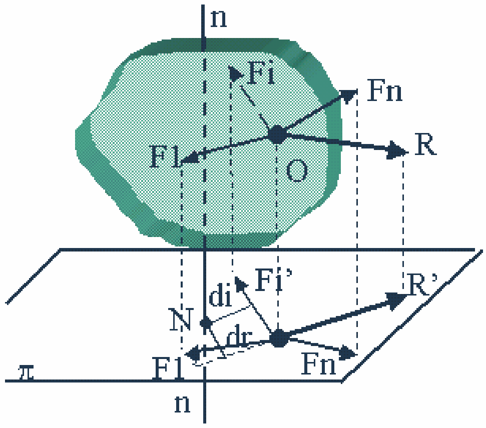
De donde...

Se define que el Momento estático de la fuerza F con respecto al eje ***t*** es igual al momento de la proyección de ***F*** sobre un plano normal al eje, con respecto al punto en que el eje corta al plano de proyección.



Extensión del T. de Varignon. Fuerzas conc. respecto a un eje n

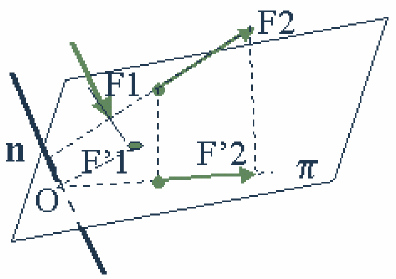
Si tenemos un sistema de fuerzas concurrentes Fi cuya resultante es R y lo proyectamos sobre un plano π la proyección R' de la resultante será la resultante del sistema de las Fi'(proyecciones de las Fi sobre el mismo plano) por lo tanto seguirá cumpliendo que: MR'/N = ∑MFi'/N



R'.dr = ΣFi.di ; es decir: MR/n = ΣMFi /n

Momento de una fuerza respecto a un eje "n" (casos particulares)

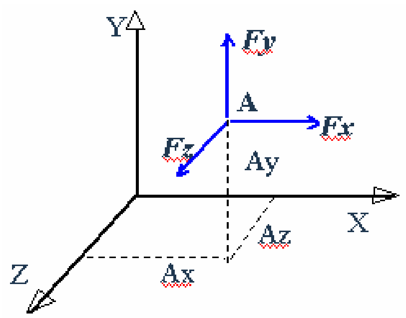
La fuerza F1 es paralela al eje y su proyección sobre el plano es un punto. La proyección de la fuerza F2 sobre el plano corta al eje n.



Una fuerza no produce momento respecto a un eje cuando su dirección lo corta o es paralela al mismo.

Significado físico: El MF/n es la importancia de la fuerza para producir un giro alrededor del eje.

Momentos de una fuerza respecto a un sist de ejes (x, y, z)



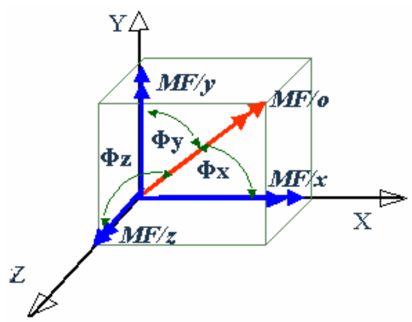
Dada ***F* (*Fx, Fy, Fz*)** y su punto de aplicación A(Ax, Ay, Az)

Los momentos de la misma con respecto a cada eje serán

MF/x = Fz . Ay – Fy. Az
MF/y = Fx .Az – Fz . Ax

$$MF/z = Fy \cdot Ax - Fx \cdot Ay$$

<u>Relación entre el momento de una fuerza respecto a un punto y el momento de la misma fuerza respecto a un sist. de ejes con origen en dicho punto.</u>



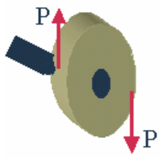
$MF/x = MF/O \cos \theta x$
$MF/y = MF/O \cos \theta y$
$\underline{MF/z = M\, F/O \cos \theta z}$
Elevando al cuadrado y sumando:

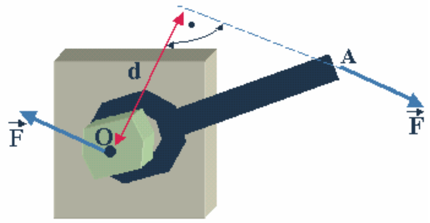
La suma de los cuadrados de los cos directores es 1

$$MF/x^2 + MF/y^2 + MF/z^2 = MF/O^2$$
$$\mathbf{MF/O^2 = \sqrt{MF/x^2 + MF/y^2 + MF/z^2}}$$

<u>Pares o Cuplas - Definición</u>

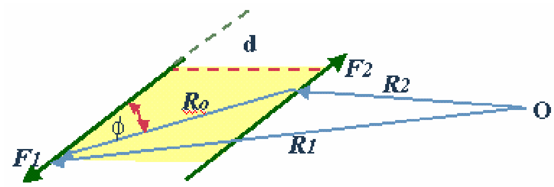
Llamamos **Par o Cupla** a un conjunto de dos fuerzas paralelas, no colineales, iguales en valor y de sentido contrario.





Vemos en el ejemplo empleado para la def. del momento estático la estrecha relación que hay entre el par y el momento.

<u>Pares o Cuplas. Elementos</u>



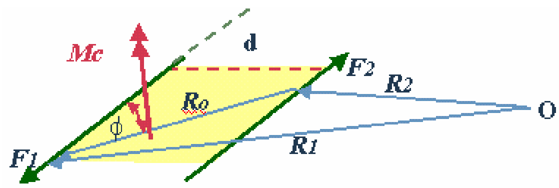
El momento de la cupla **Mc será:**

$\boldsymbol{Mc = R1 \times F1 - R2 \times F2 = (R1 - R2) \times F}$

Como $\boldsymbol{R2 + Ro = R1}$

$\boldsymbol{Mc = (R2 + Ro - R2) \times F = Ro \times F}$

Por lo que $\underline{\mathbf{Mc = Ro \cdot F \cdot sen\ \phi = F \cdot d}}$



Observamos que cualquiera sea el punto O del plano que elijamos como centro de momentos el momento de la cupla será constante e igual a $\boldsymbol{Mc = r \times F} =$ F. d

Las dos fuerzas de la cupla forman un plano que llamamos **plano de la cupla (π) y el vector representativo** es normal a ese plano.

El sentido de Mc se determina con la regla del tirabuzón, El efecto externo de la cupla sobre un cuerpo es independiente del punto de aplicación por ello Mc es un **vector libre.**

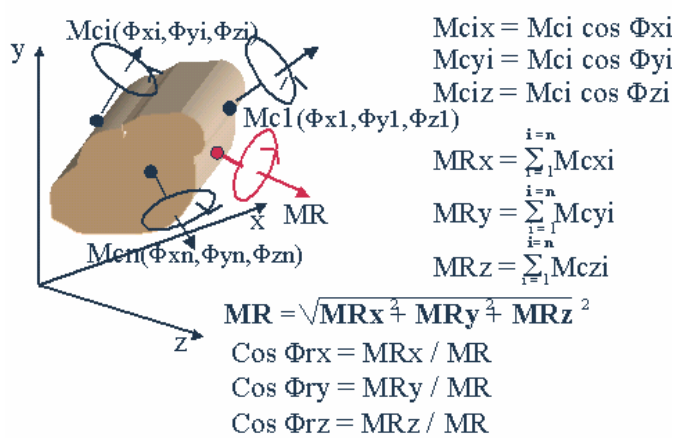
Una cupla queda perfectamente definida por el valor de su momento y por la dirección y sentido de su vector representativo.

Propiedades de las cuplas en el plano

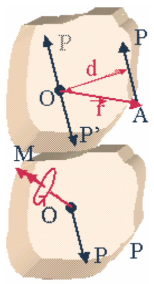
Enunciaremos las propiedades sin demostrarlas:

1. El efecto externo de una cupla sobre un cuerpo no varía si esta es rotada en su plano.
2. El efecto externo de una cupla sobre un cuerpo no varia si es trasladada en su plano.
3. El efecto externo de una cupla no cambia si modificamos el valor de sus fuerzas y de su brazo de palanca manteniendo fijo el valor de su momento Mc.
4. La suma de “n” cuplas en el plano se obtiene haciendo la suma algebraica de los valores de sus momentos y estará en equilibrio si esta suma es nula.
5. Las cuplas pueden ser trasladadas a planos paralelos sin que su efecto externo sobre el cuerpo cambie.
6. Las cuplas ubicadas sobre planos que se cortan pueden componerse mediante la suma geométrica de sus vectores sin variar el efecto externo sobre el cuerpo.

Composición de un sistema de “n” cuplas en el espacio – Método de las proyecciones



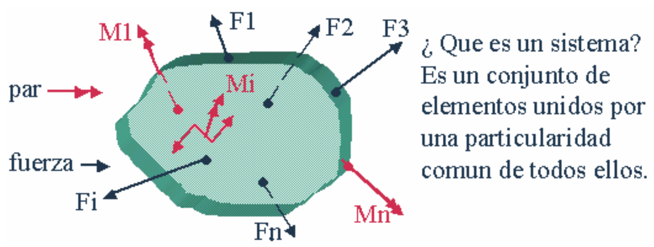
Traslación de una fuerza. Sistema fuerza – par equivalente



Supongamos la fuerza P aplicada en A y un punto O que no pertenece a su recta de acción, agregamos en O el sistema en equilibrio (P, P’) no cambia el sistema original, ahora actúa en O la fuerza P y el par M = P3r = P. d lo que permite expresar:

La traslación de una fuerza cualquiera P desde un punto A a otro cualquiera del espacio “O” genera un par M obteniéndose en O un sistema de una fuerza y un par (P, M) llamado <u>sistema fuerza-par equivalente</u> que no cambia el efecto externo sobre el cuerpo

Sistemas de fuerzas y momentos (y / ó Pares) El caso general

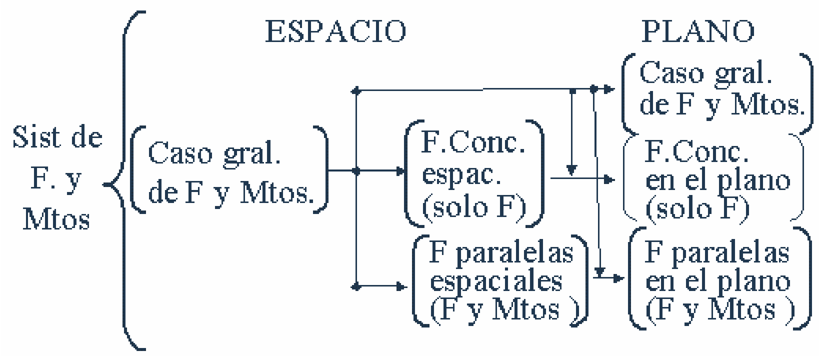


Llamamos así a un conjunto de fuerzas y momentos (ó pares) que actúan sobre un cuerpo o sistema de cuerpos interconectados.

Llamamos **caso general** al conjunto que abarca a todos los subconjuntos que podamos confeccionar.

Clasificación de los Sistemas de fuerzas y momentos

Clasificamos los sistemas desde lo general a lo particular, de acuerdo a sí su desarrollo es espacial o en el plano y según sea su punto de concurrencia o disposición de las fuerzas, obtenemos la siguiente clasificación:



Esto lo podemos representar gráficamente como

Estudio de los sistemas de fuerzas y momentos

¿ Que nos interesa conocer de los sistemas de fuerzas y momentos? Nos interesan tres aspectos:

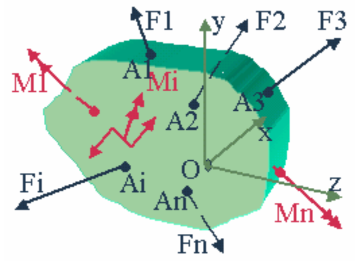
1. **La clasificación del sistema:** saber determinar si pertenece al conjunto gral. o en que subconjunto se encuadra el sistema

2. **La máxima reducción del Sistema (los Casos de reducción):** para los casos en que el sistema no está en equilibrio cual es su expresión física mas reducida. (permitirá prever el efecto del

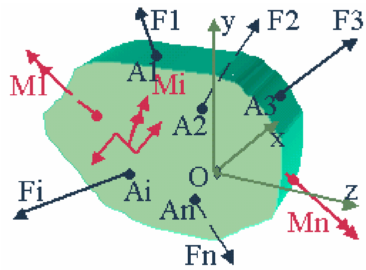
sistema activo sobre el cuerpo, ayudando a diseñar sus conexiones o también a determinar el efecto interno sobre una sección del cuerpo de todo el sistema externo).

3. **Las condiciones de equilibrio:** las condiciones que se deben cumplir para asegurar que el sistema esta en equilibrio.

Caso gral. de fuerzas y momentos. Reducción a un sistema fuerza par equivalente.



Adoptado un centro de reducción “O”, siempre se puede reducir un sistema de fuerzas y mtos. a un sistema fuerza-par equivalente aplicado en el centro de reducción.

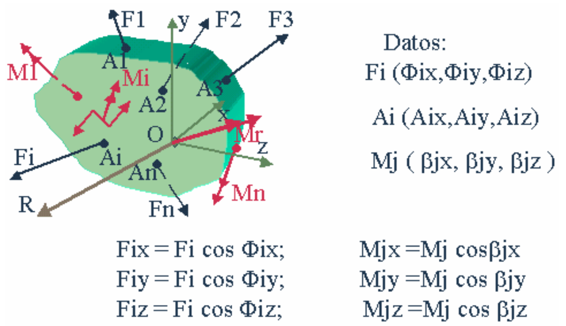


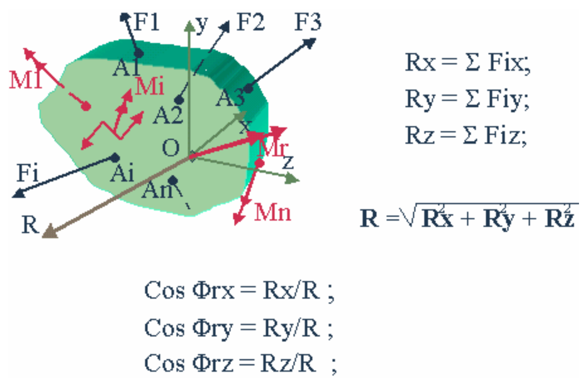
Método de las proyecciones

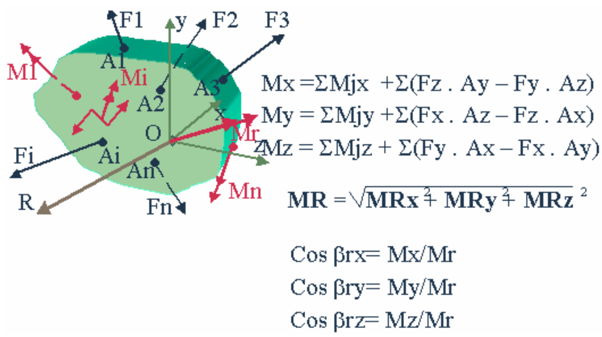
Se adopta un sistema de ejes coordenados con origen en el centro de reducción.

Los elementos del sistema son datos conocidos**, el método consiste en descomponer los elementos (F y Mtos) en las direcciones de los ejes adoptados y sumarlos como sistemas colineales según su magnitud componiéndolos luego por Pitágoras**

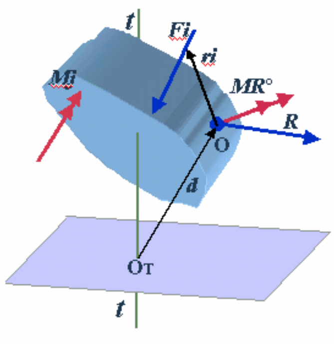
Caso General de Fuerzas y Mtos. en el Espacio
Reducción a un sistema Fuerza - Par equivalente. Método de las proyecciones







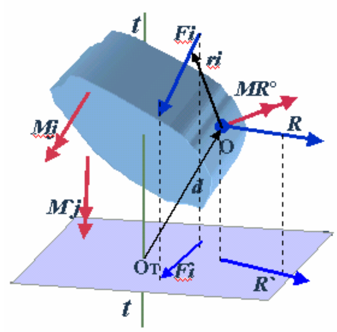
Extensión del teorema de Varignon, caso gral de F. y Mtos



Si tenemos un sistema de fuerzas y momentos [***Fi, Mj***] actuando sobre un sólido

R y ***MR°*** son el sistema fuerza-par equivalente con respecto al centro de reducción O, donde:

$$\boldsymbol{M}[\, \boldsymbol{Fi},\boldsymbol{Mj}]\,^{\circ} = \Sigma\, \boldsymbol{Mj} + \Sigma\, \boldsymbol{ri} \times \boldsymbol{Fi} = \boldsymbol{MR}^{\circ}$$

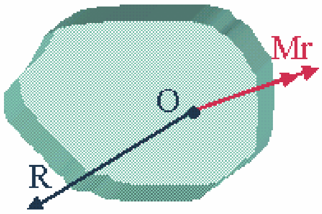


Si llamamos ***t*** al vector unitario que define la dirección de un eje n, y ***d*** a un vector posición que refiere el centro O a un punto cualquiera de dicho eje,

$$\boldsymbol{M}[\, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{MR}^{\circ}]/\, n = (\, \boldsymbol{d} \times \boldsymbol{R}\,) \,.\, \boldsymbol{t} + \boldsymbol{MR}^{\circ} \,.\, \boldsymbol{t}$$
$$=(\, \boldsymbol{d} \times \textstyle\sum \boldsymbol{Fi}\,) \,.\, \boldsymbol{t} + (\sum \boldsymbol{Mj} + \sum \boldsymbol{ri} \times \boldsymbol{Fi}\,) \,.\, \boldsymbol{t}$$
$$= \textstyle\sum \boldsymbol{d} \times \boldsymbol{Fi} \,.\, \boldsymbol{t} + \sum \boldsymbol{ri} \times \boldsymbol{Fi} \,.\, \boldsymbol{t} + \sum \boldsymbol{Mj} \,.\, \boldsymbol{t}$$
$$\textstyle\sum (\boldsymbol{d} + \boldsymbol{ri}\,) \times \boldsymbol{Fi} \,.\, \boldsymbol{t} + \sum \boldsymbol{Mj} \,.\, \boldsymbol{t}$$

MR/n + MR´= ΣMFi`/ oT + ΣMj`

Caso General de Fuerzas y Mtos. en el Espacio
Condiciones de Equilibrio. Ecuaciones Fundamentales de la Estática

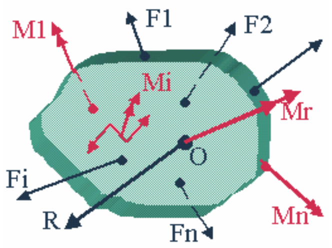


En la reducción anterior la fuerza resultante es la suma vectorial de todas las fuerzas y el momento resultante es la suma vectorial de los momentos de la traslación de las fuerzas al punto O más las de los pares externos aplicados en el cuerpo

Si ambas sumas vectoriales son nulas el sistema estará en **Equilibrio,** siendo entonces las **condiciones de equilibrio: R= 0; Mr = 0**

Las sumatorias de fuerzas y mtos son las **Ecuaciones Fundamentales de la Estática: (∑Fix = 0; ∑Fiy = 0; ∑Fiz = 0)** SUMAS DE FUERZAS y (**∑Mix = 0; ∑Miy = 0; ∑Miz = 0**) SUMAS DE MOMENTOS.

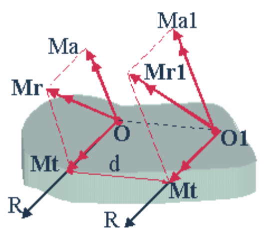
Invariante vectorial



Dado un sistema de cualquiera de fuerzas y momentos, independientemente del punto elegido como Centro de reducción la resultante es la suma vectorial de las fuerzas del sistema que es constante..

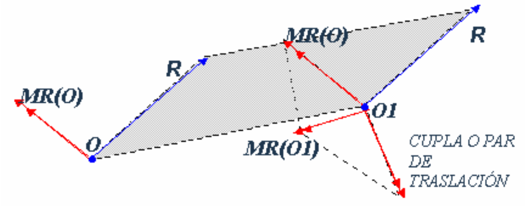
Llamamos <u>Invariante Vectorial</u> de un sistema de fuerzas y mtos. a la fuerza resultante "R" obtenida de la suma vectorial de todas la fuerzas del sistema.

Invariante Escalar

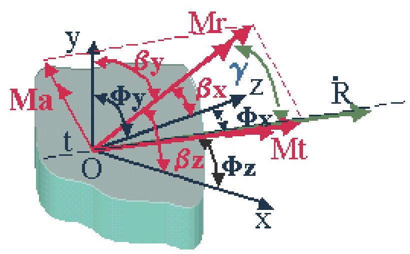


Supongamos que tenemos un sistema fuerza par R y Mr en "O", proyectamos Mr sobre la dirección de R y una normal a R obteniendo Mt y Ma, trasladamos el sistema al centro de reduc. O1 la fuerza R no cambia (inv.vect.) pero al trasladarla genera el momento R. d con la dirección de Ma y será Ma1= Ma + R.d.

Cambia Mr a Mr1. En cuanto a **Mt** sea cual fuere el c. de reduc. elegido no cambiará por que al trasladarse la F no produce momento en esa dirección es el **Invariante Escalar. : Es la proyec. del Mr sobre la dirección de R.**



Obtención del Invariante escalar



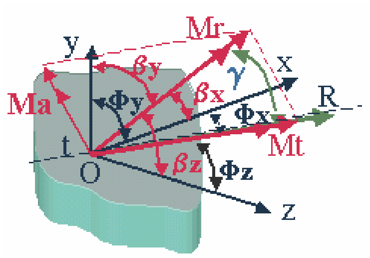
Datos: R (φx, φy, φz,). **Mr (βx, βy, βz)**

Proyectamos Mr sobre el eje t dirección de R para lo que hacemos el producto escalar (Mr . t), de ahí el nombre del invariante.

Mt = Mr **. t = | Mr | . | t | cos γ = | Mr | cos γ = Ie (inv. esc.) Ie = Mr (cos φx . cos βx + cos φy . cos βy + cos φz . cos βz) cos γ = cos φx . cos βx + cos φy . cos βy + cos φz . cos βz**

Mt no varía con el lugar geométrico del **centro de reducción**

La otra componente del Mr, (Ma) Momento asociado perp. a Mt

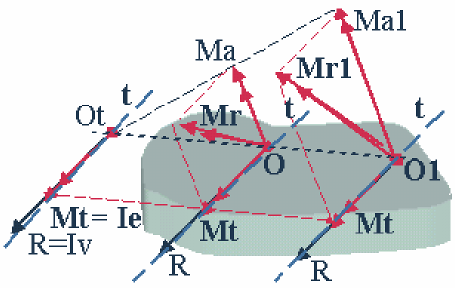


Conocido el cos ©, la componente del Mr normal a Mt y que llamamos Ma será:

Ma = | Mr | cos ©

Podemos hacer el siguiente razonamiento: si la componente Mt no varía con la ubicación del C. de reducción y el Mr <u>**sí**</u> cambia de valor y dirección con la elección del C. de reducción, es solo la componente Ma la que produce esa variación y también podemos inferir que existirán puntos que como C. de reducción anularán la componente Ma coincidiendo entonces Mt (Ie) y Mr.

El eje central (t)

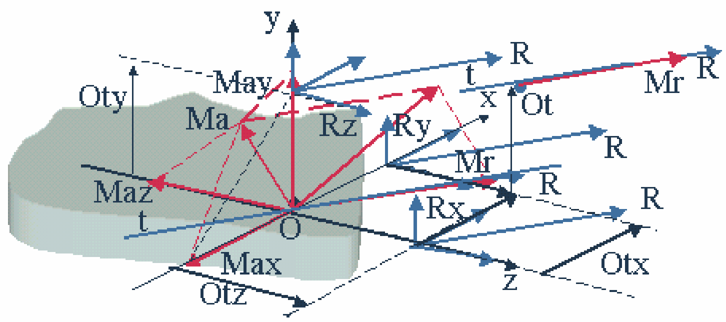


En la deducción anterior establecimos que existirán centros de reducción como“ Ot ” que anulan la componente Ma donde: Mt = Mr = Ie y el conjunto original (R, Mr) se reduce a (R, Mt) ó (Iv, Ie).

Observamos ahora en el origen Ot, que los C de reducción que no pertenezcan a “ t ” y no pasen por “ Ot ” producirán una componente Ma ≠ 0 por lo tanto: **El eje central es el lugar geométrico de los centros de reducción que se encuentran sobre un eje paralelo a R y en los que se cumple que Mr = Ie**

La ubicación del eje central (t)

Condic.:
Ma = 0



Ma pertenece al plano(R Mr) sus proyecciones son: Max = Ma cos φx ; ∑ M/x=0; Max – Rz Oty=0; Oty =Max/Rz May = Ma cos φy ; ∑ M/y=0; May – Rx Otz=0; Otz =May/Rx Maz = Ma cos φz ; ∑M/z=0; Maz – Ry Otx=0; Otx =Maz/Ry Ot (Otx, Oty, Otz) ; t (φx, φy, φz)

Sist. general de fuerzas y mtos. en el espacio, Casos de reducción

Este conjunto incluye a todos los subconjuntos de la clasificación de los Sistemas de Fuerzas y Momentos.

Llamamos Casos de Reducción a las distintas formas Físicas a que se puede reducir en su mínima expresión un sistema de fuerzas y momentos, que variarán en función de sus componentes.

Conocidas las componentes del sistema, utilizaremos su reducción a un sistema fuerza –par equivalente a un Centro de Reducción apropiado y los conceptos de Invariante Vectorial e Invariante Escalar para identificar el caso a que puede reducirse cada sistema en particular y también con que ecuaciones calcularemos las componentes de reducción.-

Identificación de los Casos de Reducción 1er. Caso Equilibrio

Son cuatro casos de reducción - 1er. Caso: **Equilibrio :**

Ya identificamos este caso, si el sistema esta en equilibrio cualquiera sea el Centro de Reducción elegido en el sist. Fuerza –Par serán, R = Iv(inv. Vect) = 0 y el par Mr = 0 también será nulo por lo tanto el Mt = Ie = 0 con cualquiera de los dos conjuntos (Mr = 0 ; R = 0) ó (Iv = 0 ; Ie = 0) se puede definir el caso, son las **Condiciones de Equilibrio;** en nuestro curso utilizaremos los invariantes para definir los casos por que con el conjunto (R, Mr) no podemos identificar todos los casos que se pueden presentar.-

Ecuaciones del equilibrio

Las ecuaciones para hallar las componentes del conjunto (R Mr) igualadas a cero se corresponden con las condicione de Equilibrio y las denominamos :

ECUACIONES FUNDAMENTALES DE LA ESTÁTICA

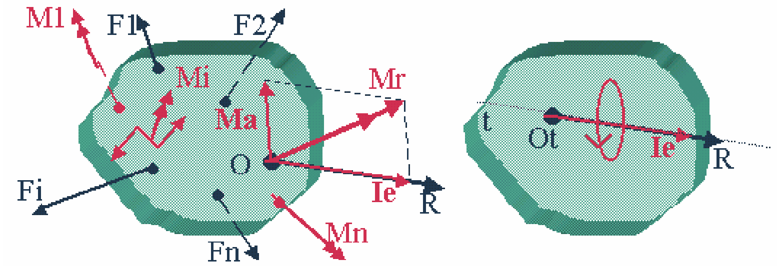
$$\text{DE FUERZAS} \qquad R\begin{cases}\sum_{i=1}^{i=n} Fix = 0\\ \sum_{i=1}^{i=n} Fiy = 0\\ \sum_{i=1}^{i=n} Fiz = 0\end{cases} \qquad\qquad \text{DE MOMENTOS} \qquad Mr\begin{cases}\sum_{i=1}^{i=n} Mix = 0\\ \sum_{i=1}^{i=n} Miy = 0\\ \sum_{i=1}^{i=n} Miz = 0\end{cases}$$

Para los otros tres casos de reducción el sistema ya no estará en equilibrio

2do. Caso de reducción – Conjunto torsor o Fzas. Alabeadas

El conjunto (R, Mr) es distinto de cero, aquí debemos aclarar que siendo Mr ≠ 0 puede ocurrir que Ie y Ma sean distintos de cero; que sea el Ie = 0 será entonces Mr =Ma y que Ma = O coincidirán Mr e Ie será Ie = Mr = Mt ≠ 0

Las **Condiciones para este caso:** (es el caso mas general) **(Iv ≠ 0; Ie ≠ 0)**



Conjunto torsor o fuerzas alabeadas - Ecuaciones

$$\text{DE FUERZAS} \qquad R = Iv\begin{cases}\Sigma\, Fix \neq 0\\ \Sigma\, Fiy \neq 0\\ \Sigma\, Fiz \neq 0\end{cases} \qquad\qquad \text{DE MOMENTOS} \qquad Mr\begin{cases}\Sigma\, Mix \neq 0\\ \Sigma\, Miy \neq 0\\ \Sigma\, Miz \neq 0\end{cases}$$

$$Iv = \sqrt{Rx^2 + Ry^2 + Rz^2}\,; \qquad Mr = \sqrt{Mx^2 + My^2 + Mz^2}$$

Cos φx = ∑Fix /R; Cos φy= ∑Fiy /R; Cos φz=∑Fiz /R

Cos βx = ∑Mix /Mr; Cos βx= ∑ Miy /Mr; Cos ∑Miz /Mr

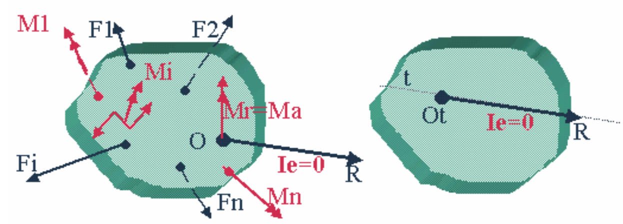
Ie =Mr(cos φx . cos βx+cos φy . cos βy+cos φz . cos βz)= 0

Si componemos una de la fuerzas del Ie con R se obtienen dos fuerzas alabeadas

3er Caso de reducción. Fuerza Resultante

En este caso en el conjunto (R,Mr) la resultante es distinta de cero, y el Mr es distinto de cero si el centro de reducción no esta sobre el eje central es decir Mr = Ma y Mr es nulo si el C. de reducción pertenece al eje central

Las condiciones para este caso: (Iv ≠ 0 ; Ie = 0)



Fuerza resultante - Ecuaciones

DE FUERZAS — DE MOMENTOS

$$R = Iv \begin{cases} \Sigma\ Fix \neq 0 \\ \Sigma\ Fiy \neq 0 \\ \Sigma\ Fiz \neq 0 \end{cases} \qquad Mr \begin{cases} \Sigma\ Mix \neq 0 \\ \Sigma\ Miy \neq 0 \\ \Sigma\ Miz \neq 0 \end{cases}$$

$$Iv = \sqrt{Rx^2 + Ry^2 + Rz^2}; \qquad Mr = \sqrt{Mx^2 + My^2 + Mz^2}$$

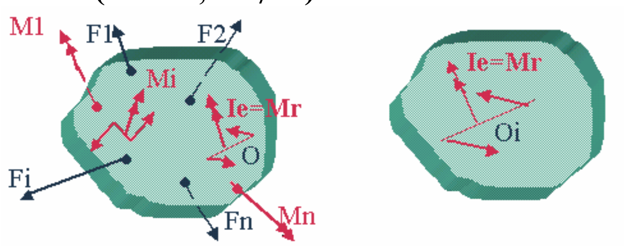
Cos φx = ∑Fix /R; Cos φy= ∑Fiy /R; Cos φz=□Fiz /R
Cos βx = ∑Mix /Mr; Cos βx= ∑ Miy /Mr; Cos ∑Miz /Mr
Ie =Mr(cos φx . cos βx+cos φy . cos βy+cos φz . cos βz) = 0

El sistema se puede reducir a una fuerza resultante para centros de reducción sobre el eje central

4to. Caso de reducción. Momento resultante

En este caso en el conjunto (R; Mr) R es siempre nulo y el momento Mr es distinto de cero y como la resultante es nula su valor es el Ie = Mr. **El sistema se reduce a un par cuyo valor es el Mr para cualquier centro de reducción.**

Condiciones para este caso: (Iv = 0 ; Ie ≠ 0)



Momento resultante - Ecuaciones

DE FUERZAS — DE MOMENTOS

$$R = Iv \begin{cases} \Sigma\ Fix = 0 \\ \Sigma\ Fiy = 0 \\ \Sigma\ Fiz = 0 \end{cases} \qquad Ie = Mr \begin{cases} \Sigma\ Mix \neq 0 \\ \Sigma\ Miy \neq 0 \\ \Sigma\ Miz \neq 0 \end{cases}$$

$$Mr = \sqrt{Mx^2 + My^2 + Mz^2}$$

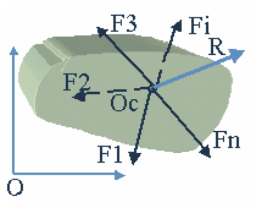
Cos βx = ∑Mix /Mr; Cos βx= ∑ Miy /Mr; Cos ∑Miz /Mr
Ie = Mr ≠ 0

El sistema se reduce a un par cuyo valor es independiente del centro de reducción. Aquí termina el C. Gral todos los subconjuntos están incluidos en este.

Resumen de las condiciones de reducción del Sist. general de fuerzas y momentos en el espacio

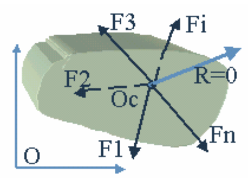
	Invariante vectorial(Iv)	Invariante escalar (Ie)
1er Caso Equilibrio	Iv = 0	Ie = 0
2do C. Conj. Torsor	Iv = 0	Ie = 0
3er C. Fza. Resultante	Iv = 0	Ie = 0
4to C. Mto. Resultante	Iv = 0	Ie = 0

Sist. de Fuerzas concurrentes en el espacio



Todas las fuerzas concurren a “Oc” por lo tanto el subconjunto no admite momentos. Puede ser reducido a un sistema fuerza par (R, Mr) en un centro distinto de Oc. Ambos elementos pueden iguales o distintos a cero. En el conjunto de invariantes el escalar siempre será nulo (Ie = 0) para cualquier centro de reducción y el invariante vectorial si es nulo determina que el sistema está en equilibrio y si no lo es determina que el sistema se podrá reducir a una fuerza resultante

Sist. de Fuerzas concurrentes en el espacio 1er: Caso Equilibrio



Datos: (Oc, Fi)

CONDICIONES Del sistema fuerza par (R= 0; Mr = 0 Del conj. de invariantes (Iv= 0; Ie= 0)

ECUACIONES

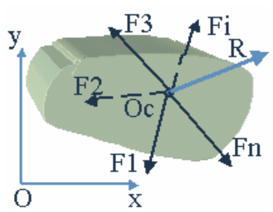
DE FUERZAS

$$R = Iv = 0 \begin{cases} \Sigma\ Fix = 0 \\ \Sigma\ Fiy = 0 \\ \Sigma\ Fiz = 0 \end{cases}$$

DE MOMENTOS

$$Ie = Mr = 0 \begin{cases} \Sigma\ Mix = 0 \\ \Sigma\ Miy = 0 \\ \Sigma\ Miz = 0 \end{cases}$$

Sist. de Fuerzas concurrentes en el espacio, 2do. C. Fuerza resultante



Datos: (Oc; Fi,)

CONDICIONES Del sistema fuerza par (R≠ 0; Mr ≠ 0) Mr ≠ 0 para centros de reducción ≠ Oc y que no pertenecen a la dirección de R Del conj. de invariantes (Iv ≠ 0; Ie = 0)

ECUACIONES

DE FUERZAS

$$R = Iv \begin{cases} \Sigma\ Fix \neq 0 \\ \Sigma\ Fiy \neq 0 \\ \Sigma\ Fiz \neq 0 \end{cases}$$

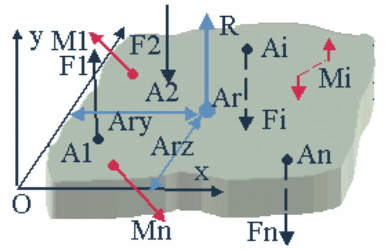
DE MOMENTOS

$$Mr \begin{cases} \Sigma\ Mix \neq 0 \\ \Sigma\ Miy \neq 0 \\ \Sigma\ Miz \neq 0 \end{cases}$$

$$Iv = \sqrt{Rx^2 + Ry^2 + Rz^2}; \qquad Mr = \sqrt{Mx^2 + My^2 + Mz^2}$$

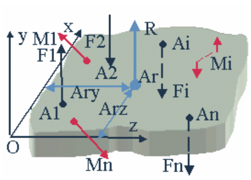
$$\cos \Phi x = \Sigma Fix\ /R; \quad \cos \Phi y = \Sigma Fiy\ /R; \quad \cos \Phi z = \Sigma Fiz\ /R$$

Sist. general de fuerzas paralelas en el espacio



Las fuerzas de cualquier sentido tienen direcciones paralelas y podrá contener pares Mi cuyas fuerzas sean paralelas a la del sistema. Puede ser reducido a un sistema fuerza par (R. Mr) Si R = 0 y Mr = 0 el sistema esta en equilibrio y si Mr ≠ 0 el sistema se reducirá a un par de valor constante y cuyo vector es normal a la dirección de las fuerzas y será Mr =Ie. Si Iv = R ≠ 0 y Mr = 0 el sistema se reduce a una fuerza resultante aplicada en Ar y si Mr ≠ 0 es un sistema fuerza par equivalente .

Sist. general de fuerzas paralelas en el espacio,1er Caso Equilibrio



Datos: (Fi, Ai, Mi)

CONDICIONES Del sistema fuerza par: (R = 0; Mr = 0)

Del conjunto de invariantes: (Iv = 0; Ie = 0)

ECUACIONES

DE FUERZAS

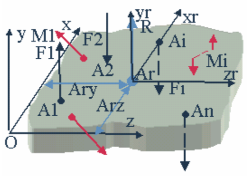
$$R = Iv = 0 \quad \{ \Sigma\ Fiy = 0$$

DE MOMENTOS

$$\begin{cases} \Sigma MFi\ /x + \Sigma\ Mix = 0 \\ \Sigma MFi\ /z + \Sigma\ Miz = 0 \end{cases}$$

$$Ie = Mr = 0$$

Sist. general de fzas. paralelas en el espacio, 2do.C. Fza. resultante



Datos: (Fi, Ai, Mi)

CONDICIONES (Iv = R ≠ 0; Ie = Mr = 0)

ECUACIONES

DE FUERZAS

$$R = Iv = \Sigma\ Fi \neq 0$$

DE MOMENTOS

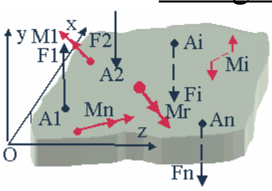
$$Ie = Mr = 0 \qquad \Sigma MFi/\ xr + \Sigma\ Mixr = 0$$

$$\Sigma MFi/zr + \Sigma\ Mizr = 0$$

Ubicación del punto de aplicaión Ar:

$$\Sigma MFi\ /x + Mix\ /\ R = Arz \qquad \Sigma MFi\ /z + Miz\ /\ R = Arx$$

Sist. general de fzas. paralelas en el espacio, 3er.C. Mto. resultante



Datos: (Fi, Ai, Mi)

CONDICIONES (Iv = R = 0; Ie = Mr = 0)

ECUACIONES

DE FUERZAS

$R = Iv = \sum Fi = 0$

DE MOMENTOS

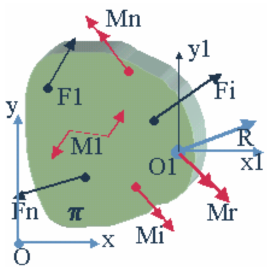
$Mx = \sum MFi/x + \sum Mix$

$Mz = \sum MFi/z + \square\ Miz$

$Mr = \quad Mx + Mz$

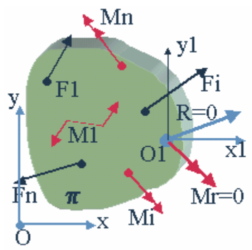
$\cos \beta x = Mx / Mr$; $\cos \beta z = Mz / Mr$

Sist. general de fuerzas y momentos en el plano



En el espacio de dos dimensiones, desaparece la coordenada “z”, todo se desarrolla en el plano “π”, las fuerzas y los pares son coplanares, los vectores momentos son normales a π y por lo tanto paralelos. Siempre se pueden reducir a un sistema fuerza Par(R,Mr), si $R \neq 0$, $Mr \neq 0$; Ie es nulo ($Mr \perp R$) y el sistema se podrá reducir a una fuerza resultante; si $R = 0$, $Mr \neq 0$; entonces $Mr = Ie \neq 0$ el sistema se reduce a un Mr y si $R = 0$, $Mr = O$ el sistema esta en equilibrio. También se lo llama sistema gral. de fuerzas no concurrentes.

Sist. gral de fuerzas y mtos. en el plano 1er caso – Equilibrio



Para identificar los casos de reducción en el plano podemos utilizar el conjunto fuerza par equivalente (R,Mr) o el conjunto de los Invariantes (Iv; Ie); Utilizaremos el (R; Mr)

Condiciones de Equilibrio (R = 0; Mr = 0) ó (Iv = 0; Ie = 0)
Ecuaciones Fundamentales de la Estática en el plano

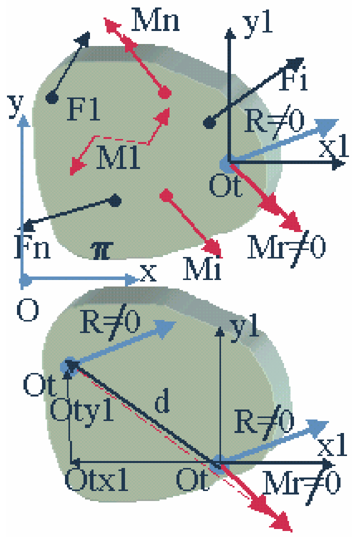
DE FUERZAS

$$R = Iv = 0 \begin{cases} \Sigma\, Fix = 0 \\ \Sigma\, Fiy = 0 \end{cases}$$

DE MOMENTOS

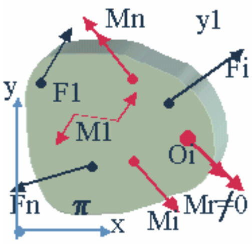
$Mr = \Sigma MFi/O + \Sigma Mi = 0$

Sist. general de fzas. y mtos. en el plano 2do C. Fuerza resultante



CONDICIONES Datos: (O1, Fi; Mi)
En el conj. Fuerza - par ($R \neq 0$; $Mr \neq 0$)
Mr =0 para los puntos que pertencen a la dirección de r y pasan por O1 y el de los invariantes (Iv= 0; Ie= 0)
ECUACIONES
FUERZAS MOMENTOS
Σ Fix= Rx; Mr=ΣMFi/O+ΣMi
Σ Fiy = Ry $R = \sqrt{Rx^2 + Ry^2}$
$\cos \Phi x = Rx / R$
Ubicación del C. de reducción Ot
ΣMFxi/O+ΣMi /O / Rx = Oty1
ΣMFyi/O+ΣMi /O / Ry = Otx1
Mr = R . d d = Mr / R

Sist. gral de fuerzas y momentos en el plano, 3er C. Mto. resultante



Datos: (Fi, Mi)

CONDICIONES: El conjunto fuerza. Par (R = 0; Mr ≠ 0). El conj. de invariantes (Iv = 0; Ie ≠ 0)

ECUACIONES

FUERZAS MOMENTOS

Σ Fix = 0; Ie=Mr=ΣMFi/O+ΣMi ≠ 0

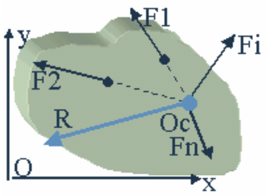
Σ Fiy = 0

El momento resultante es independiente de la ubicación del centro de reducción elegido y es constante e igual al invariante escalar: Mr = Ie

Resumen de las condiciones en el S. gral de F.y M. en el plano

	R	Mr	Iv	Ie
Equilibrio	R = 0	Mr = 0	Iv = 0	Ie = 0
Fza Resul.	R = 0	Mr = 0	Iv = 0	Ie = 0
Mto. Resul.	R = 0	Mr = 0	Iv = 0	Ie = 0

Sist. de fuerzas concurrentes en el plano, 1er caso Equilibrio



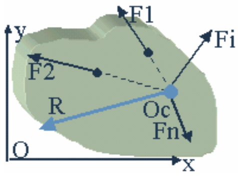
Sistema de fuerzas coplanares, siempre es factible reducirlo a un sistema fuerza par equivalente en un centro de reducción distinto de Oc.

Datos: (Fi, Oc)

CONDICIONES ($Iv = R = 0$; $Ie = Mr = 0$)

ECUACIONES $\Sigma Fix = 0$; $\Sigma Fiy = 0$;

Sist. de fuerzas concurrentes en el plano, 2do.C. Fza. resultante



Datos: (Fi, Oc)

CONDICIONES

($R \neq 0$, $Mr \neq 0$) $Mr = 0$ para centros de reducción sobre R y que pasa por Oc ($Iv \neq 0$; $Ie = 0$)

ECUACIONES

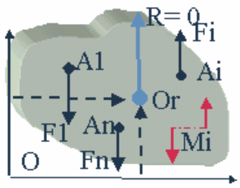
FUERZAS	MOMENTOS
$\Sigma Fix = Rx$;	**$Mr = \Sigma MFi/O + \Sigma Mi$**
$\Sigma Fiy = Ry$ $R = Rx + Ry$	$\cos \Phi x = Rx / R$

Ubicación del C. de reducción Ot

$\Sigma MFxi/O + \Sigma Mi /O /Rx = Oty1$; $\Sigma MFyi/O + \Sigma Mi /O/ Ry = Otx1$

$Mr = R \cdot d$ $d = Mr / R$

Sist. de fuerzas paralelas en el plano, 1er.Caso Equilibrio



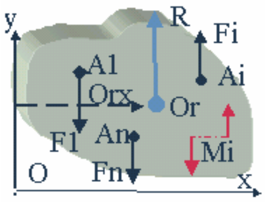
Datos: (Fi, Mi)

CONDICIONES: El conjunto fuerza. Par ($R = 0$; $Mr = 0$)
El conj. de invariantes ($Iv = 0$; $Ie = 0$)

ECUACIONES

FUERZAS	MOMENTOS
$\Sigma Fiy = 0$;	**$Ie = Mr = \Sigma MFi/O + \Sigma Mi/O = 0$**

Sist. de fuerzas paralelas en el plano, 2do. C. Fuerza resultante



Datos: (Fi, Mi)

CONDICIONES

El conjunto fuerza. Par ($R \neq 0$; $Mr \ngeqq 0$)

El conj. de invariantes ($Iv \neq 0$; $Ie = 0$)

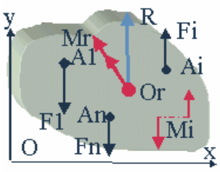
ECUACIONES

. FUERZAS	MOMENTOS
$\Sigma Fiy = R$;	**$Ie = Mr = \Sigma MFi/Or + \Sigma Mi = 0$**

Ubicación del punto de aplicación de R:

$\Sigma MFi/O + \Sigma Mi/O / R = Orx$

Sist. de fuerzas paralelas en el plano, 3er. Caso Mto. resultante



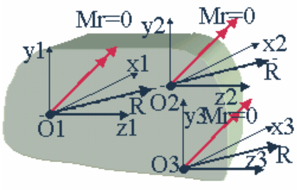
Datos: (Fi, Mi)

CONDICIONES El conjunto fuerza. Par ($R = 0$; $Mr = 0$) El conj. de invariantes ($Iv = 0$; $Ie = 0$)

ECUACIONES

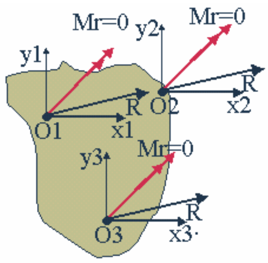
FUERZAS	MOMENTOS
$R = Iv = \Sigma Fiy = 0$;	**$Ie = Mr = \Sigma MFi/O + \Sigma Mi$**

Mét. de los momentos para el equilibrio de fzas y mtos espaciales



Teniendo como datos las fuerzas y momentos del sistema y tomando momentos respecto a un sist. de ejes con origen en O1 y obtenemos: ∑M/x1=∑M/y1=∑M/z1 = 0 significa que Ie = 0 pero puede ocurrir que Iv = R pase por O1 y no sea nula, si tomamos momento respecto un eje con otro origen O2 Ej.: ∑M/x2=0 pude ocurrir que ambos orígenes (O1,O2) estén sobre la dirección de R, si tomamos momento respecto a un eje con un tercer origen O3 no alineado Ej.: ∑M/y3 =0 el Iv = R = 0, **Podemos decir que 6 ecuaciones de momentos respecto a ejes de tres orígenes dif. No alineados son ecuaciones de equilibrio del sistema.**

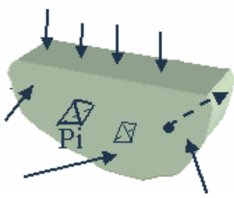
Mét. de los momentos para el equilibrio de fzas y mtos en el plano



Con el mismo razonamiento anterior si tomo momentos respecto a dos puntos (O1,O2) y □M/O1 =∑M/O2 = 0 el sistema no tiene Mr pero (O1,O2) pueden estar sobre la dirección de R = 0. Si tomamos momento respecto a un tercer punto no alineado O3 y ∑M/O3=0 Iv=R=0.

Tres sumatorias de momentos respecto a tres puntos no alineados en el plano son ecuaciones de equilibrio de un sistema de fzas. y momentos

El Equilibrio

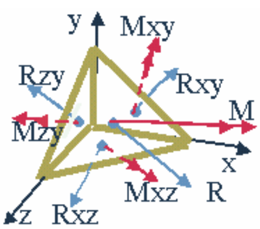


Una partícula, un cuerpo o un sistema de cuerpos bajo la acción de cargas, estará en equilibrio cuando el sistema de fuerzas y momentos que actúa sobre ellos **cumple con las condiciones de equilibrio que le corresponden** .

Este razonamiento no depende de la vinculación del cuerpo y las cargas a que hacemos referencia es **el total del sistema externo de fuerzas y momentos** que actúa sobre el elemento considerado.

Una vez que el sistema externo de fuerzas esta en equilibrio, también estará en equilibrio cualquier sector o partícula (Pi) del sistema de cuerpos o cuerpo en estudio.

Equilibrio de una partícula

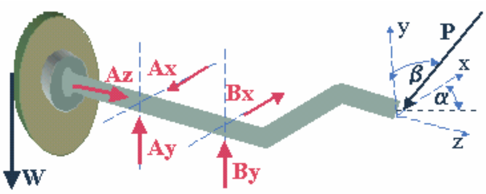


Cuando un cuerpo está bajo la acción de cargas provoca que sus partículas interactúen entre sí. Extrayendo una partícula (Pi) del interior del cuerpo estará sometida a un sistema general de fuerzas y momentos como el indicado en la figura que deberá cumplir con las condiciones de equilibrio (Iv= 0; Ie = 0) y sé cumplirán también las ecuaciones fundamentales de la Estática.

FUERZAS $\vec{R} + \vec{Rxy} + \vec{Ryz} + \vec{Rxz} = 0$

MOMENTOS $\vec{M} + \vec{Mxy} + \vec{Myz} + \vec{Mxz} = 0$

Equilibrio de un cuerpo



En realidad ya lo estudiamos como el 1er caso de reducción del sist. Gral de F. y M. Espaciales

El **sistema total externo** del cuerpo de F.y M, cualquiera sea deberá cumplir con las condiciones de equilibrio (Iv= 0; Ie= 0)

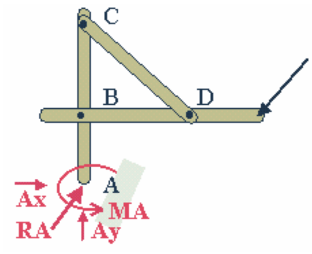
DE FUERZAS

$$Iv=R \begin{cases} \sum_{i=1}^{i=n} Fix = 0 \\ \sum_{i=1}^{i=n} Fiy = 0 \\ \sum_{i=1}^{i=n} Fiz = 0 \end{cases}$$

DE MOMENTOS

$$Ie=Mr \begin{cases} \sum_{i=1}^{i=n} Mix = 0 \\ \sum_{i=1}^{i=n} Miy = 0 \\ \sum_{i=1}^{i=n} Miz = 0 \end{cases}$$

Equilibrio de un sistema de cuerpos



Si tenemos un sistema formado por varios cuerpos el equilibrio del conjunto deberá analizarse con el **sistema total externo de fuerzas** del conjunto de cuerpos es decir no intervienen las fuerzas en las conexiones entre cuerpos que son iguales y de sentido contrario, una vez definido el D.C.L el sistema de F. y M. que resulta **debe cumplir las condiciones de equilibrio con las ecuaciones que corresponden a ese sistema**, vemos aquí la importancia de saber clasificar el sistema de fuerzas.

Sistema Mecánico Estáticamente Determinado

Sistema Mecánico ideal

Llamamos así a cualquier conjunto de cuerpos que interactúan entre sí y están bajo la acción de fuerzas y es ideal por las simplificaciones que hacemos.

Sistema Determinado

Decimos que un sistema es Estático.0 Determinado cuando las incógnitas se pueden resolver con las ecuaciones de la estática

Diferencia entre Isostático y Determinado

Un sistema puede ser Hipostático y ser determinado (al no tener acciones en la dirección de sus libertades o que el sistema actuante esté en equilibrio) ó Hiperest. (no tiene acciones en esa dirección) y ser determinado, los Isostaticos son siempre determinados

La Problemática de las fuerzas externas

Dijimos ya en un párrafo anterior que la problemática es infinita pero podemos diferenciar características de la misma que nos van a ayudar a resolver los problemas: **Sistemas de fuerzas en equilibrio:** las incógnitas serán

1 Fuerzas activas o reactivas del sistema externo
2 Configuraciones geométricas de equilibrio
3 Combinaciones de ambos

Sistemas de fuerzas que no están en equilibrio:

1 La reducción del sistema (resultantes, sistemas equiv.)
2 Componentes del sist. en función de cond. de R y Mr
3 Combinaciones de ambos

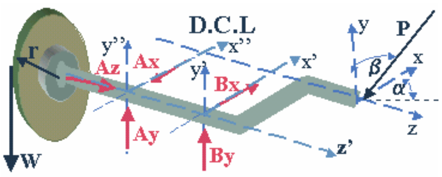
La resolución de los problemas

Los problemas de equilibrio se resuelven con las ecuaciones de equilibrio, lo que nos permite determinar hasta seis incógnitas en el espacio y tres en el plano, condiciones impuestas en el enunciado pueden permitir resolver alguna incógnita más.

Lo que debemos saber manejar:

1 Interpretación del enunciado y las cond. que contenga
2 La construcción del D.C.L. y la elecc. del sist. de refer.
3 La clasificación del sistema de fuerzas que se estudia.
4 El planteo de las ecuaciones adecuadas(indep. de incog)
5 Verificación de los resultados

La resolución de los problemas



Determinar la fuerzas en los apoyos y P (A y B radiales con axial en A).**Problema de equilibrio** ; Clasif. del sistema de externo de fuerzas: **C. Gral, de F y mtos. en el espacio**

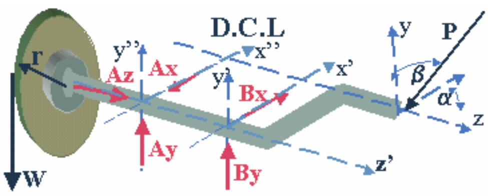
Planteo o estrategia

Elección de ecuaciones : tratamos de independizar las incógnitas

$$\Sigma M / z' = f(P) = 0 \longrightarrow P \;;\quad \Sigma Fz = f(Az) = 0 \longrightarrow Az$$
$$\Sigma M / x' = f(Ay) = 0 \longrightarrow Ay; \quad \Sigma M / x'' = f(By) = 0 \longrightarrow By$$
$$\Sigma M / y' = f(Ax) = 0 \longrightarrow Ax\;; \quad \Sigma M / y'' = f(Bx) = 0 \longrightarrow Bx$$

se plantearon , una ecuación de fuerzas y cinco de momentos respecto a ejes de tres orígenes diferentes. Si bien las ecuaciones que se pueden plantear son infinitas, superado el Nº de seis las que siguen son combinaciones lineales de las ya planteadas

La verificación de los resultados



En la estática todos los resultados son factibles de ser verificados y deben ser verificados. Primero prediciéndolos con el análisis físico del D,C.L y luego planteando otras ecuaciones diferentes a las empleadas en el cálculo de las incógnitas y en las que intervengan todas ellas comprobando así el equilibrio. Por ej.:el MP / z'debe ser de sentido opuesto a MW/z' por lo tanto el sentido indicado de P es el correcto. Ay y By por la ubicación de P y W deben tener sentido hacia arriba, Ax y Ay deben generar un momento anti horario por que Px genera uno horario Az debe ser igual y de sentido contrario a Pz Las ecuaciones para corroborar el equilibrio pueden ser: ∑M/ y = 0 verif.(Az,Ax,Bx) y ∑Fy = 0 verif. (Ay, By, P).-