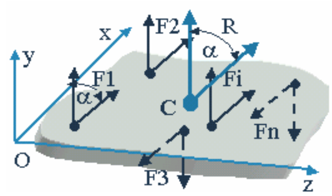
Unidad III

- Centro de fuerzas paralelas
- Centro de gravedad
- Cerntroides o Baricentros, M. de 1er orden
- Fuerzas distribuidas
- Momentos de Inercia, Mtos. de 2do orden

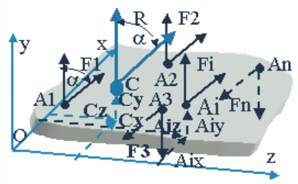
Centro de fuerzas paralelas



Supongamos un sistema general de fuerzas paralelas factible de ser rotado. Girando las direcciones de las fuerzas observamos que cualquiera sea el áng. α de giro existe solo un punto en el espacio por el que siempre pasará la resultante

Centro de fuerzas paralelas es el lugar geométrico de un punto en el espacio por el que siempre pasará la resultante de un sistema general de fuerzas paralelas cualquiera sea su dirección.

Centro de fuerzas paralelas- Ecuaciones



El momento de la resultante respecto a un eje debe ser la suma de los momentos de las componentes

$$\sum MFi/x = MR/x = R \cdot Cz$$

$$\boxed{\mathbf{Cz = \sum Fi \cdot Azi / \sum Fi}}$$

Rotando 90º en pl. (yz)

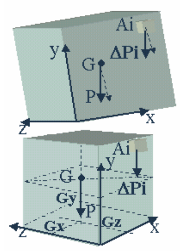
$$\sum MFi/z = MR/z = R \cdot Cx$$

$$\boxed{\mathbf{Cx = \sum Fi \cdot Axi / \sum Fi}}$$

$$\sum MFi/x = MR/x = R \cdot Cy$$

$$\boxed{\mathbf{Cy = \sum Fi \cdot Ayi / \sum Fi}}$$

Centro de gravedad

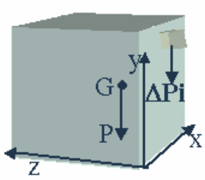


Si P es el peso de un cuerpo el conjunto del peso de sus partículas **Δpi (Axi, Ayi,Azi)** es un sistema de fuerzas paralelas. El punto de aplicación del peso total P será el C. de fuerzas paralelas de las (□**Pi**), considerando que puede no ser homogéneo será: **ΔPi = δiΔVi y las coordenadas:**

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathbf{Gz = \sum \delta i\ \Delta Vi\ \ . Azi / \sum \text{™}\iota\Delta V\iota} \\ \mathbf{Gx = \sum \text{™}i\Delta\ Vi\ \ . Axi / \sum \text{™}i\Delta Vi} \\ \mathbf{Gy = \square\text{™}i\ \Delta Vi\ \ . Ayi / \sum \text{™}i\Delta Vi}\end{array}}$$

δ = peso espec.

Centroides o baricentros



En las ecuaciones del C. de Gravedad observamos que si el cuerpo es homogéneo El C de fuerzas paralelas depende del volumen del cuerpo.

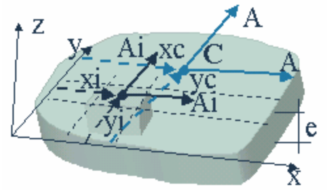
A **los centros de sistemas vectoriales paralelos de figuras geométricas los denominamos centroides o baricentros VOLÚMENES**

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathbf{Cz = \delta i \sum zi\ AVi\ \ /\delta i \sum AVi} \\ \mathbf{Cx = \sum xi\ \Delta Vi\ \ / \sum \Delta Vi} \\ \mathbf{Cy = \sum yi\ \Delta Vi\ \ / \sum \Delta Vi}\end{array}}$$

$$\mathbf{\lim \sum zi\ \Delta Vi}$$
$$\mathbf{\square V\quad 0\ \ \sum \Delta Vi}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathbf{Cz = \int z\ \ dv / \int dv} \\ \mathbf{Cx = \int x\ \ dv / \ \int dv} \\ \mathbf{Cy = \int y\ \ dv / \ \int dv}\end{array}}$$

Centroides o baricentros- Superficies



Puede ocurrir que el cuerpo tenga un parámetro geométrico constante (e) en este caso el baricentro dependerá de la forma de la superficie y estará dentro de ella si el cuerpo es Plano(e = 0) y estará a la mitad del parámetro cte (e) si es espacial

SUPERFICIES

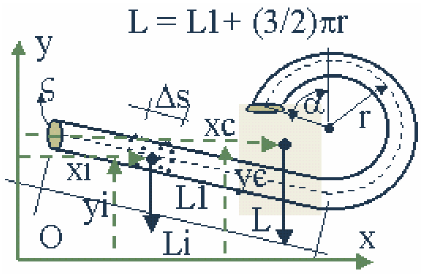
$xc = ei \sum xi\ \Delta Ai \ /\ ei \sum \Delta Ai$ **$\lim_{\Delta Ai \to 0} \sum xi\ \square ai \ /\ \sum \square Ai$**

$xc = \int x\ \ dA\ \ /\ \ \int dA$

$yc = \sum yi\ \Delta Ai \ /\ \sum \Delta Ai$

$yc = \int y\ \ dA\ \ /\ \ \int dA$

Centroides o baricentros- Líneas



Si el cuerpo tiene dos parámetros ctes. (ς) y su forma depende del tercer parámetro. La forma de su eje baricétrico determinará la ubicación del baricentro.

LINEAS

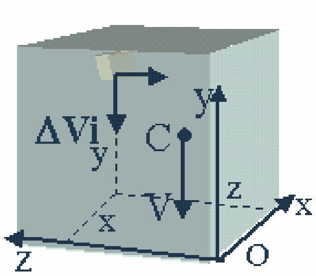
$xc = \varsigma i \sum xi\Delta Li \ /\ \varsigma i \sum \Delta Li$ **$xc= \lim_{\Delta Li\ \ 0} \sum xi\ \square li \ /\ \square\ \square Li$**

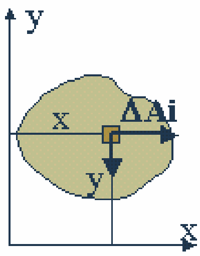
$xc = \int x\ L\ dL\ \ /\ \ +L\ dL$

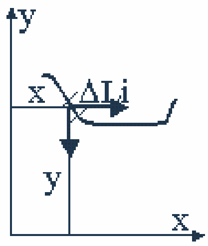
$yc = \sum yi\ \Delta Li \ /\ \sum Li$

$yc = \int y\ \ dL\ \ /\ \ \int dL$

Momentos de 1er orden

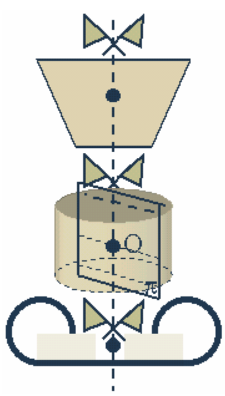






Denominamos así a esta característica geométrica por que en todos los casos las coordenadas de los Baricentros respecto de los ejes de referencia vienen dadas por los primeros momentos de la forma geométrica respecto de los ejes de referencia si es espacial y respecto del origen si es plana o lineal,. dividida por su volumen, superficie, o línea.

Centroides o baricentros y los ejes de simetría

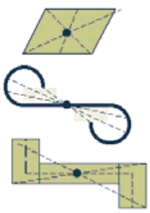


Eje de simetría : llamamos asi al eje respecto a cual a cada punto del cuerpo le corresponde uno idéntico equidistante del otro lado del eje.

La simetría puede existir también respecto a un plano (por ej. el "□") e inclusive respecto a un punto (O), en estos casos decimos que hay un centro geométrico.

Cuando un cuerpo tiene eje ó ejes de simetría su baricentro estará sobre ellos

Centroides o baricentros y los centros geométricos o de figura

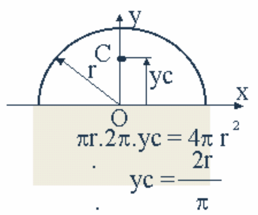


Algunos cuerpos o figuras planas tienen un punto medio de cualquier diámetro posible del mismo

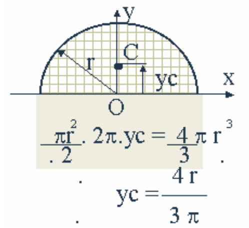
Si un cuerpo tiene centro geométrico el centroide o baricentro siempre estará ubicado sobre el mismo.

Centroides o baricentros- Teoremas de Pappus

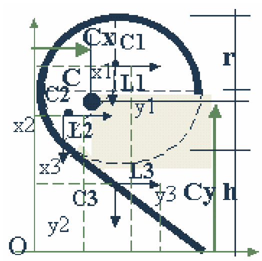
1. El Área de la superficie engendrada por la rotación de cualquier curva plana alrededor de un eje que no la corte en su plano, es igual a al producto de la longitud L de la curva por la distancia que recorre su baricentro



2. El volumen engendrado por un área rotando alrededor de un eje que no la corte en su plano, es igual al producto del área A por la distancia que recorre su baricentro.



Centroides o baricentros de curvas planas compuestas



Adoptamos un sistema de referencia, la ubicación del baricentro en el cuerpo será independiente del sistema elegido aunque sus coordenadas lógicamente cambiarán respecto a cada sistema adoptado. Dividimos al cuerpo en curvas y rectas de baricentros conocidos (Li, xi, yi) y aplicamos las fórmulas ya vistas:

$L1 = r\pi$; $x1 = r$; $y1 = h + r \cos 45^\circ + (2.r) / \pi$

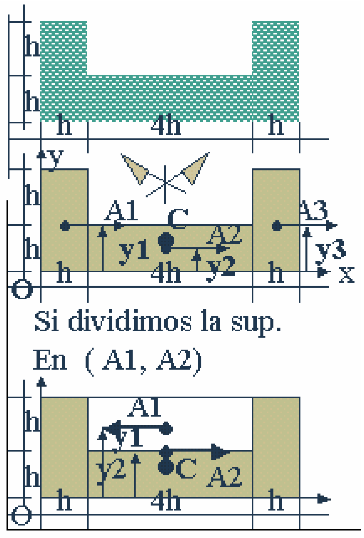
$L2 = (\pi r) / 4$; $x2 = 2 - (2r) / \pi$ $y2 = h + r \cos 45^\circ - (2r) / \pi$

$L3 = h$; $\sqrt{x3^2} = [2 - r \cos 45^\circ + h / 2]$; $y3 = h / 2$

Cx =∑xiLi / ∑Li **Cy = ∑yiLi / ∑Li**

Li	xi	Yi	xi.Li	yi.Li
L1	x1	y1	x1L1	y1L1
L2	x2	y2	x2L2	y2L2
L3	x3	y3	x3L3	y3L3
□Li	Cx	Cy	∑xiLi	□yiLi

Centroides o baricentros de superficies planas compuestas[5]



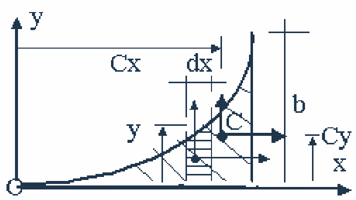
Referimos a un sistema de ejes, (origen O), observamos que la superficie tiene un eje de simetría, por lo tanto conocemos la coord. Cx y solo debemos determinar Cy. Dividimos la superfice en (A1, A2, A3)

Ai	$2\ h^2$	$4\ h^2$	$2\ h^2$	$\sum Ai = 8h^2$
yi	h	h / 2	h	Cy= ·3/4h
yiAi	$2\ h^3$	$2\ h^3$	$2\ h^3$	$\sum yiAi = 6h^3$

Ai	$-\ 4\ h^2$	$12h^2$	$\sum Ai = 8h^2$
yi	3 / 2 h	h	Cy= ·3/4h
yiAi	$-\ 6\ h^3$	$12\ 3^3$	$\sum yiAi = 6h^3$

Centroides o baricentros, aplic. del cálculo diferencial e integral

Determine el baricentro de la superficie definida por los ejes(x,y) y la curva $x = 4\alpha\ y$; fijados (a, b) podemos determinar la constante que corresponde a esta parábola.



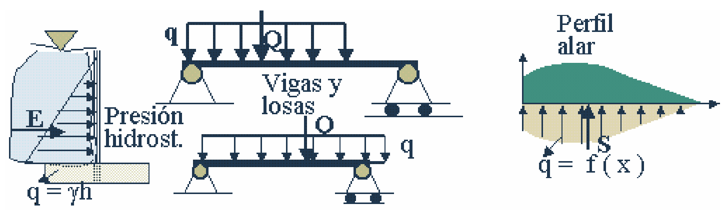
Para $x = a$, $y = b$; $a^2 = 4\alpha b$; $\alpha'' = a / 4b$ la curva del borde superior de la superficie es : $y = (b / a^2)\ x^2$; aplicamos ahora las formulas:

$$C\,x = \frac{\int_0^a x\,dA}{\int_0^a dA} = \frac{\int_0^a xy\ dx}{\int_0^a y\,dx} = \frac{(b / a^2)\int_0^a x^3 dx}{(b / a^2)\int_0^a x^2 dx} = \quad Cx = \frac{3}{4}\,a$$

$$Cy = \frac{\int_0^a y/2\,dA}{\int_0^a dA} = \frac{\int_0^a (y^2/2)\,dx}{\int_0^a y\,dx} = \frac{(b / a^2)^2 /2\int_0^a x^4 dx}{(b / a^2)\int_0^a x^2 dx} = \quad Cy = \frac{3}{10}\,b$$

Fuerzas distribuidas

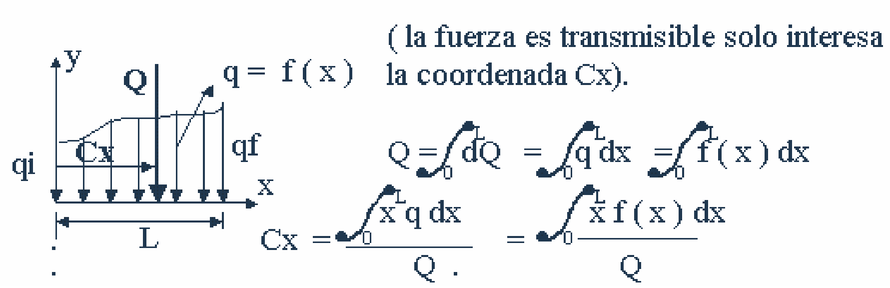
Ya hemos mencionado que hay fuerzas que se distribuyen sobre un cuerpo, sobre una superficie ó linealmente. Esencialmente estas fuerzas son fuerzas de gravedad y presiones hidrostáticas. La simetría permite muchas veces analizarlas en el plano considerando una profundidad unitaria. Son fuerzas paralelas y las manejamos como tales .Se representan por medio del **diagrama de intensidad de carga. Ejemplos:**



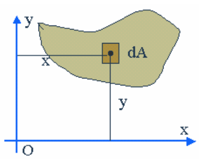
Fuerzas distribuidas

Vemos en los ejemplos que la intensidad puntual (q) puede ser constante o variable (q = f (x) y sus unidades serán, si son de volumen (q = F /m), de superficie (q = F / m) y lineales (q = F / m).

En todos los casos **su resultante será igual al área del diagrama de intensidad de carga** y **estará ubicada en el baricentro de ese diagrama.** En un caso gral. de una fuerza linealmente distribuida será:



Momentos de inercia de Áreas ó Momentos de 2do. orden



MOMENTO DE INERCIA AXIAL

El **momento de Inercia** de un área plana respecto a los ejes **x** e **y** se define mediante las **Integrales :**

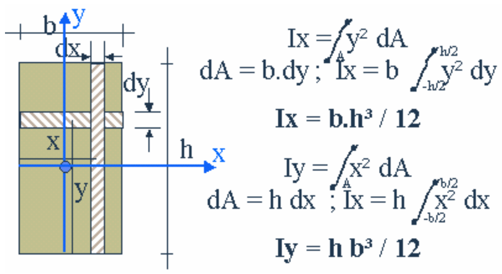
$Ix = \int_A y^2 dA$; $Iy = \int_A x^2 dA$

El dA esta multiplicado por la distancia al cuadrado al eje respectivo por eso también los llamamos momentos de segundo orden.

El mto. de inercia es siempre positivo

Momentos de inercia de Áreas

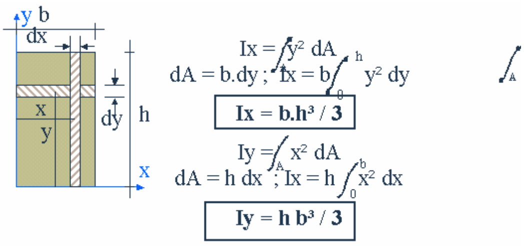
OBTENCIÓN DE LOS MOMENTOS DE INERCIA DE UN RECTÁNGULO respec. (x,y) baricéntricos



El Mto. de inercia aumenta a medida que el eje se aleja del baricentro

Momentos de inercia de Áreas

OBTENCIÓN DE LOS MOMENTOS DE INERCIA DE UN RECTÁNGULO respec. (x,y)

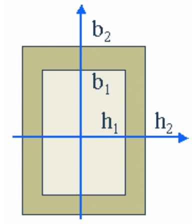


El Mto. de inercia aumenta a medida que el eje se aleja del baricentro

Momentos de inercia de Áreas

El momento de inercia de una sección compuesta respecto a un eje de referencia es igual a la suma algebraica de los momentos de inercia de sus partes respecto del mismo eje.

Ej: SECCIÓN CAJÓN



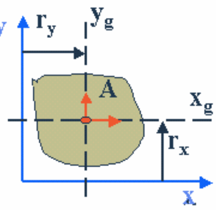
$$\mathbf{Ix = b.h^3{}_2 / 12 - b.h^3{}_1 / 12}$$

$$\mathbf{Iy = h.b^3{}_2 / 12 - h.b^3{}_1 / 12}$$

Momentos de inercia de Áreas- Radio de giro

Se define como la raíz cuadrada del cociente entre el momento de inercia del área y el valor del área misma.

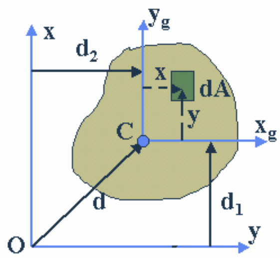
$$r_x = \sqrt{I_x / A} \qquad r_y = \sqrt{I_y / A}$$



Tiene unidades de longitud

Significado físico**: es la distancia desde el eje considerado a la que puede concentrarse el área con el mismo momento de inercia que área original**

Teorema de los ejes paralelos para momentos de inercia (Steiner)



Los ejes (x_g,y_g), origen C, son baricéntricos y (x,y) paralelos a los anteriores tiene origen en O y están separados por las distancias d_1 y d_2 el Mto de inercia Ix será: $\mathbf{Ix = \int_A (y + d_1)^2\, dA}$

$Ix = \int_A y^2\, dA + 2d_1 \int_A y.dA + d_1^2 \int_A dA =$

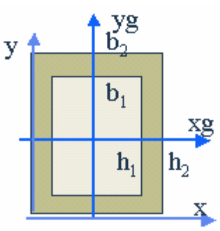
$\mathbf{Ix = I_{xg} + Ad_1^2}$ **y de la misma manera**

$\mathbf{Iy = I_{yg} + Ad_2^2}$

Teorema de los ejes paralelos para momentos de inercia (Steiner)

$$\mathbf{Ix = I_{xg} + Ad_1^2} \qquad \mathbf{Iy = I_{yg} + Ad_2^2}$$

El momento de Inercia de un respecto a cualquier eje que pertenezca a su plano es igual al momento de inercia respecto a un eje baricéntrico paralelo mas el producto del áreas por la distancia al cuadrado entre los ejes .

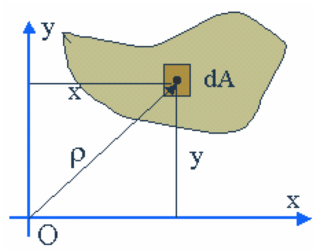


Este teorema es muy útil para hallar los momentos de inercia de áreas compuestas Ej:

$$Ix = Ix_g + A.\,(h_2 / 2)^2 =$$

$$=(b_2h_2^3 - b_1h_1^3) / 12 + (b_2h_2^2 - b_1h_1h_2) / 4$$

Momentos polares de inercia



En el caso anterior calculamos Ix e Iy respecto a ejes contenidos en el plano del área, consideramos ahora un eje que pasa por el origen anterior y es normal al plano del área.

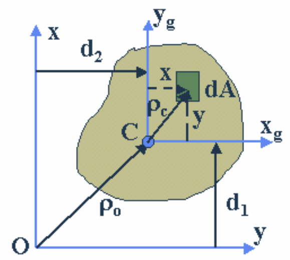
El momento de inercia polar se define mediante la integral:

$$\mathbf{I\rho \;=\; \int_A \rho^2 \, dA} \qquad \text{pero} \qquad \rho^2 = x^2 + y^2$$

$$I\rho = \int_A (x^2 + y^2)\, dA = \int_A x^2 \, dA + \int_A y^2 \, dA =$$

$$\mathbf{I\rho = \; Ix + Iy}$$

Teorema de los ejes paralelos para momentos polares de inercia



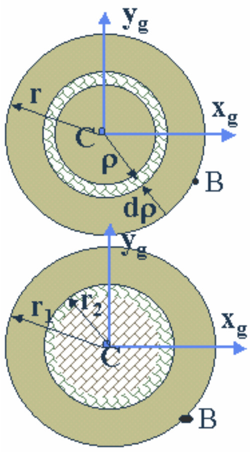
$$\mathbf{I\rho_O = Ix + Iy \;\; ; \;\; I\rho_C = Ix_g + Iy_g}$$

$$Ix = Ix_g + Ad_1{}^2 \; ; \; Iy = Iy_g + Ad_2{}^2 \quad Ix + Iy = Ix_g + Iy_g + A(d_1{}^2 + d_2{}^2)$$

$$\mathbf{I\rho_O = \; I\rho_C + A \,.\, \rho_O{}^2}$$

El momento de inercia respecto a cualquier punto del plano O es igual momento de inercia polar respecto al baricentro del área mas el producto del área por el cuadrado de la distancia (O,C) .

Aplicación del Mto. de inercia polar - secciones circulares



$$dA = 2\pi\rho \, d\rho \;\; ; \;\; I\rho = \int_A \rho^2 \, dA$$

$$\mathbf{I\rho_c = \; 2\pi \int_0^r \rho^3 \, d\rho = \pi r^4 / 2}$$

$$I_B = I\rho_c + A \,.\, r^2 = \pi r^4 / \, 2 + \pi r^2 \,.\, r^2 = \quad I_B$$

$$= \mathbf{3\pi r^4 / \, 2}$$

$$\mathbf{I\rho_C = \pi/2 \; (\, r_1{}^4 - r_2{}^4)}$$

$$\mathbf{I_B = I\rho_C + Ar_1{}^2 = \pi/2 \; (\, r_1{}^4 - r_2{}^4) \; +}$$

$$\mathbf{+ \; \pi/2 \; (r_1{}^2 + r_2{}^2) \,.\, r_1{}^2 =}$$

$$\mathbf{I_B = \pi/2 \; (2r_1{}^4 - r_2{}^4 + r_1{}^2 \, r_2{}^2)}$$