UNIDAD 7

Principio de Trabajos Virtuales

por *Javier L. Mroginski*

Este principio es muy importante dado que establece una relación entre el trabajo de las cargas o acciones exteriores, que se componen luego en las solicitaciones (esfuerzos normales, cortantes, flectores y torsores), con la energía de deformación interna, que dependerá del estado tensional y de las deformaciones del cuerpo.

El *Principio de Trabajos Virtuales (P.T.V.)* fue utilizado por Galileo (1564-1642) para el diseño y cálculo de mecanismos y desarrollado teóricamente con un enunciado más matemático y formal por Lagrange (1736-1813), ya que desarrolla la teoría variacional y escribe su "Mecánica Analítica"donde coloca las bases de dicha disciplina.

No obstante a lo anterior el núcleo teórico del P.T.V. fue enunciado por Santiago Bernouilli (1654-1705) y por Daniel Bernouilli (1700-1782): "Si una estructura, estando en equilibrio, sufre una deformación virtual debido a la acción de una carga adicional , el trabajo virtual externo de la carga en cuestión, es igual al trabajo virtual interno, desarrollado por las tensiones causadas por la carga".

En cuanto a lo que concierne a la mecánica de cuerpos rígidos, dado que por definición estos cuerpos no sufren deformación sino desplazamientos, el P.T.V. debe ser reformulado. El mismo fue enunciado por Johann Bernouilli en el año 1717 de la siguiente manera: *"Dado un cuerpo rígido mantenido en equilibrio por un sistema de fuerzas, el trabajo virtual efectuado por este sistema, durante un desplazamiento virtual, es nulo"*. Por tal motivo algunos autores prefieren llamar la P.T.V como *Principio de los Desplazamientos Virtuales (P.D.V.)*, sin embargo en el presente texto se conservará la denominación original.

7.1 Trabajo

Para empezar definiremos algunos conceptos que serviran de base al Principio de Trabajos Virtuales

7.1.1 Trabajo de una Fuerza

Consideremos una partícula A, mostrada en la figura 7.1, que sufre un desplazamiento $d\vec{r}$ debido a la aplicación de una fuerza $\vec{F}$. La partícula material A, cuyo vector posición inicial es $\vec{r}$, pasa a ocupar la posición A' definida por el verctor $\vec{r} + \mathrm{d}\vec{r}$. El trabajo de la fuerza $\vec{F}$ correspondiente al desplazamiento $\mathrm{d}\vec{r}$ se define como:

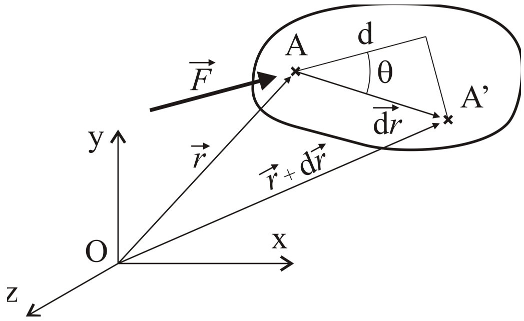

Figura 7.1: Trabajo de una Fuerza

$$\mathrm{d}U = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \tag{7.1}$$

donde $\cdot$ es el producto escalar entre los vectores $\vec{F}$ y $\mathrm{d}\vec{r}$ que por definición es

$$\mathrm{d}U = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \left|\vec{F}\right| \left|\mathrm{d}\vec{r}\right| \cos(\theta) = F\mathrm{d} \tag{7.2}$$

donde F es el módulo del vector $\vec{F}$ y d la proyección del desplazamiento sobre la recta de acción de la fuerza.

Dado que el trabajo de una fuerza se obtiene a partir del producto escalar entre dos vectores, se obtiene como resultado una magnitud escalar, es decir, el trabajo de una fuerza tendrá magnitud y signo pero carecerá de dirección al no tratarse de una magnitud vectorial. La magnitud está dada por el valor absoluto del producto $\left|\vec{F}\right| \left|\mathrm{d}\vec{r}\right| = F\,|\mathrm{d}|$, mientras que el signo lo determina el valor de $\cos(\theta)$. Dicho de otra manera, cuando el sentido del vector desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza, proyectado en la dirección de la misma, es contrario al sentido de dicha fuerza el trabajo será negativo. En la figura 7.2 se ilustran las tres posibilidades de trabajo que tiene una fuerza $\vec{F}$.

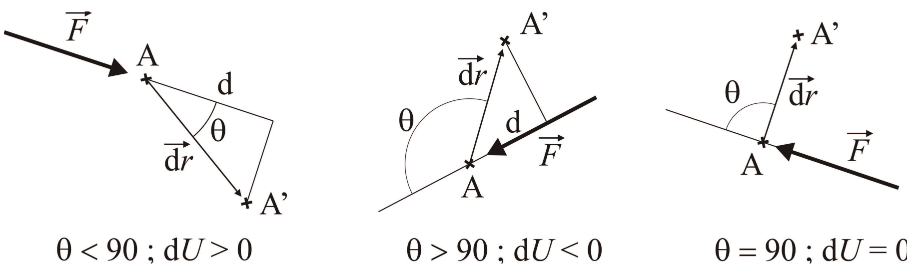

Figura 7.2: Signo del trabajo de una fuerza

Por otro lado, puede notarse de (7.2) que el trabajo debe ser expresado en una unidad de fuerza por una de longitud lo que constituye en definitiva una unidad de energía. Por ejemplo, si se emplea el Sistema Internacional de Unidades (SI), la fuerza se expresa en Newton (N) y la longitud en metros (m), y el producto Newton por metro es la unidad de energía del SI denominado Joule (J), N.m = J.

Aqui cabe realizar una diferenciación entre el concepto de *trabajo* y de *momento* de una fuerza.

- El trabajo es el producto entre una fuerza por una distancia en la dirección de la fuerza mientras que el momento es el producto entre la fuerza y una distancia perpendicular a la dirección de la misma,
- dicho de otra manera, el trabajo es el *producto escalar* entre la fuerza y el vector posición del punto de aplicación de la fuerza, mientras que el momento es el *producto vectorial* entre ambos vectores,
- por esto último, el trabajo es una *magnitud escalar* mientras que el momento es una *magnitud vectorial*.
- Si bien las unidad de trabajo y momento son las mismas, [Unidad de Fuerza].[Unidad de Longitud], no debe confundirse el significado de uno y otro, el trabajo es una energía y el momento es una acción que tiende a producir un giro sobre el cuerpo.

7.1.2 Trabajo de un sistema de fuerzas

Dado un sistema de fuerzas como el que se muestra en la figura 7.3, se intentará demostrar que el trabajo desarrollado por un sistema de fuerzas aplicado sobre un cuerpo que sufre un cierto corrimiento es igual al trabajo de su resultante.

Por efecto del sistema de fuerzas, el punto de aplicación A, sufrió un corrimiento $\mathrm{d}\vec{r}$ hasta ubicarse en una nueva posición, punto A'. Llamando $\mathrm{d}U_1$, $\mathrm{d}U_2$ y $\mathrm{d}U_R$ al trabajo producido a lo largo del desplazamiento $\mathrm{d}\vec{r}$ por las fuerzas $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ y $\vec{R}$, respectivamente, y θ_1, θ_2 y θ_R a los ángulos que forman las direcciones de dichas fuerzas con la dirección del corrimiento, se tiene

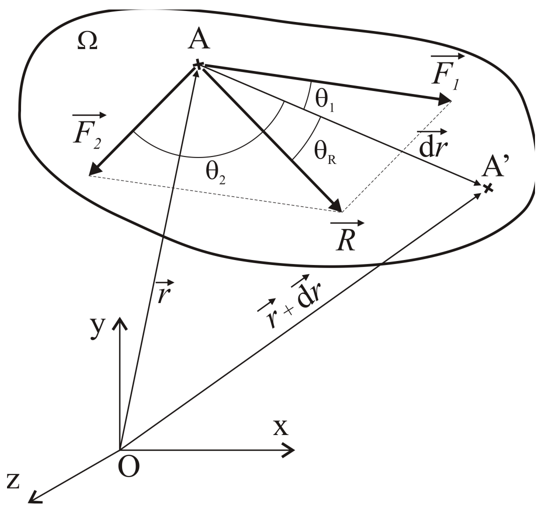

Figura 7.3: Trabajo de un sistema de fuerzas

$$\mathrm{d}U_1 = \vec{F_1} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = F_1 \mathrm{d}r\ \cos(\theta_1) \tag{7.3}$$

$$\mathrm{d}U_2 = \vec{F_2} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = F_2 \mathrm{d}r\ \cos(\theta_2) \tag{7.4}$$

$$\mathrm{d}U_R = \vec{R} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = R \mathrm{d}r\ \cos(\theta_R) \tag{7.5}$$

donde $F_1 = \left|\vec{F_1}\right|$, $F_2 = \left|\vec{F_2}\right|$, $R = \left|\vec{R}\right|$ y $\mathrm{d}r = \left|\vec{\mathrm{d}r}\right|$.

Sumando miembro a miembro las expresiones (7.3) y (7.4), se tiene

$$\mathrm{d}U_1 + \mathrm{d}U_2 = \vec{F_1} \cdot \vec{\mathrm{d}r} + \vec{F_2} \cdot \vec{\mathrm{d}r} = \underbrace{\left(\vec{F_1} + \vec{F_2}\right)}_{\vec{R}} \cdot \vec{\mathrm{d}r} = \underbrace{\left(F_1 \cos(\theta_1) + F_2 \cos(\theta_2)\right)}_{R \cos(\theta_R)} \mathrm{d}r \tag{7.6}$$

Como se observa de (7.6)

$$\mathrm{d}U_1 + \mathrm{d}U_2 = \vec{R} \cdot \vec{\mathrm{d}r} = R\mathrm{d}r \cos(\theta_R) = \mathrm{d}U_R \tag{7.7}$$

Es decir, *el trabajo de la resultante del sistema de fuerzas es igual a la suma algebraica de los trabajos de las fuerzas componentes.*

Esta demostración puede ser fácilmente generalizada para un sistema de n fuerzas, considerando a dicho sistema como uno formado por pares de fuerzas concurrentes y trabajando luego con sus resultantes.

7.1.3 Trabajo de una Cupla

El trabajo de una cupla aplicada sobre una chapa rígida que sufre una rotación es igual al producto de la intensidad de la cupla por el valor de la rotación.

Para demostrar el enunciado anterior consideremos la chapa de la figura 7.4, sobre la cual está aplicado un par de fuerzas de la misma intensidad pero de sentido contrario $\vec{F}$ y $-\vec{F}$, supongamos tambien que debido a la acción de la cupla la chapa experimenta una rotación θ.

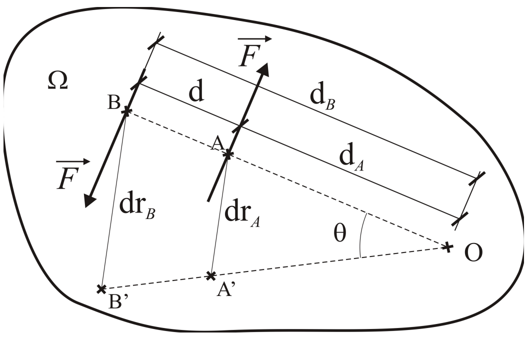

Figura 7.4: Trabajo de una cupla

Debido a esta rotación, los puntos de aplicación de las fuerzas, A y B, pasan a ocupar la posición A' y B', respectivamente, y para valores infinitesimales de la rotación, se verifica:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}r_A &= \mathrm{d}_A \operatorname{tg}(\theta) = \mathrm{d}_A\, \theta \\ \mathrm{d}r_B &= \mathrm{d}_B \operatorname{tg}(\theta) = \mathrm{d}_B\, \theta \end{aligned} \tag{7.8}$$

Obtenidos los corrimientos del punto de aplicación de las cargas es posible calcular el trabajo individual de cada fuerza

$$\begin{aligned} \mathrm{d}U_A &= -F\,\mathrm{d}r_A \\ \mathrm{d}U_B &= F\,\mathrm{d}r_B \end{aligned} \tag{7.9}$$

el signo negativo en la primer expresión de (7.9) se debe a que el sentido del corrimiento es opuesto al de la fuerza (ver figura 7.2).

Sumando miembro a miembro las ecuaciones de (7.9) y teniendo en cuenta las expresiones (7.8), se tiene

$$\mathrm{d}U_M = \mathrm{d}U_A + \mathrm{d}U_B = F\,(\mathrm{d}r_B - \mathrm{d}r_A) = F\theta\,(\mathrm{d}_B - \mathrm{d}_A) \tag{7.10}$$

pero $\mathrm{d}_B - \mathrm{d}_A = \mathrm{d}$.

Recordando que el momento de una cupla puede ser calculado como

$$M = F\,\mathrm{d} \tag{7.11}$$

siendo F el módulo de la fuerza $\vec{F}$ y d la distancia que separa ambas fuerzas que componen la cupla, donde el signo del mómento está definido por la "regla de la mano derecha", la expresión (7.10)

$$\mathrm{d}U_M = F\theta\mathrm{d} = M\,\theta \tag{7.12}$$

con lo cual queda demostrado el enunciado establecido al inicio de la sección.

7.1.4 Trabajo total de un sistema de fuerzas

Supongamos un cuerpo sometido a un sistema de fuerzas cualquier, como se muestra en la figura 7.5, es evidente que el trabajo no puede obtenerse en forma directa empleando la expresión (7.1) dado que en este caso se trata de un sistema formado por numerosas fuerzas que dependen de la posición.

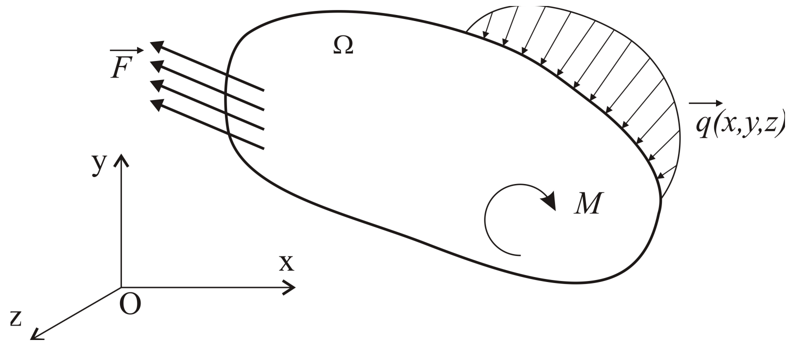

Figura 7.5: Trabajo total de un sistema de fuerzas

En este caso continua siendo válido lo enunciado al final de la sección 7.1.2, sin embargo, el trabajo total del sistema de fuerzas no será la sumatoria sino la integral de los trabajos diferenciales. Por lo tanto

$$U = \int_\Omega \mathrm{d}U = \int_\Omega \mathrm{d}U_F + \int_\Omega \mathrm{d}U_M + \int_\Omega \mathrm{d}U_q \tag{7.13}$$

donde $\mathrm{d}U_F$, $\mathrm{d}U_M$ y $\mathrm{d}U_q$, son el trabajo elemental de las fuerzas $\vec{F}$, del momento M y de la carga de superficie $\vec{q}$.

Cabe aclarar que en caso de tratarse de un sistema de fuerzas discreto las integrales de (7.13) se transforman en sumatorias, Σ.

Para ilustrar este tema se plantea la resolución del siguiente ejemplo práctico. Sea la barra AB de la figura 7.6 sometida a una fuerza por unidad de longitud $q(x)$ constante a lo largo del eje x. Supongamos que dicha barra sufre una rotación infinitésimal θ.

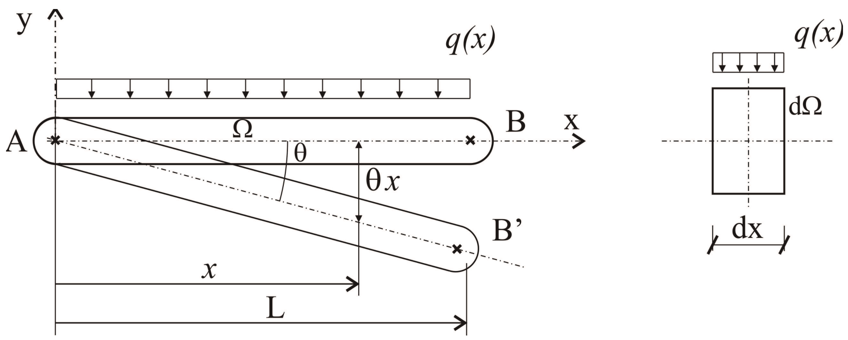

Figura 7.6: Ejemplo de aplicación del trabajo total de un sistema de fuerzas

Aislando un elemento diferencial $\mathrm{d}\Omega$ ubicado en la absisa x, se puede obtener el diferencial de trabajo empleando la expresión elemental (7.1). En este caso, la fuerza $\vec{F}$ del elemento diferencial será $q\ \mathrm{d}x$ y el desplazamiento en el cual se produce el trabajo corresponde a la ordenada $x\ \theta$ [1],

$$\begin{aligned} \mathrm{d}U &= \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = q\, \mathrm{d}x\, x\, \theta \\ \Rightarrow U &= \int_0^L q\, x\, \theta\, \mathrm{d}x = q\, \theta \frac{x^2}{2}\bigg|_0^L = q\, \theta \frac{L^2}{2} \end{aligned} \tag{7.14}$$

7.2 Principio de Trabajos Virtuales

Sea una partícula A sobre la cual actúa un sistema de fuerzas $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_n$ (ver figura 7.7). Supongamos también que dicha partícula sufre un desplazamiento imaginario $\vec{\delta r}$, que denominamos *desplazamiento virtual.* [2]

El trabajo realizado por las fuerzas $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_n$ durante el corrimiento virtual $\vec{\delta r}$ será entonces

$$\begin{aligned} \delta U &= \vec{F}_1 \cdot \vec{\delta r} + \vec{F}_2 \cdot \vec{\delta r} + \ldots + \vec{F}_n \cdot \vec{\delta r} \\ &= \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n\right) \cdot \vec{\delta r} \\ &= \vec{R} \cdot \vec{\delta r} \end{aligned} \tag{7.15}$$

[1] Cabe recordar que para ángulos diferenciales, o muy pequeños, se verifica: $\alpha = \operatorname{sen}(\alpha) = \tan(\alpha)$

[2] Cabe aclarar que el símbolo $\delta(\bullet)$ implica un diferencial de primer orden virtual, mientras que $\mathrm{d}(\bullet)$ fue empleado para indicar un diferencial real de primer orden.

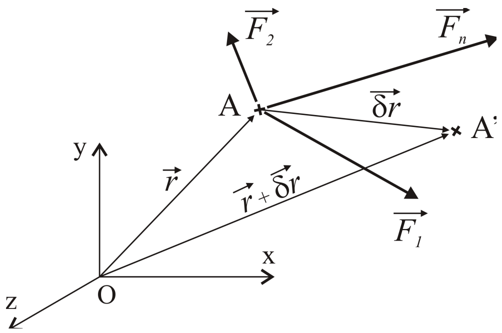

Figura 7.7: Trabajo virtual de una partícula

El Principio de Trabajos Virtuales de una partícula establece que *si una partícula está en equilibrio, el trabajo virtual total de las fuerzas que concurren a la partícula es nulo, para cualquier desplazamiento virtual considerado.*

Si una partícula está en equilibrio, la resultante del sistema de fuerzas aplicado en la misma debe ser nulo, $\vec{R} = 0$, es decir, analizando el enunciado del Principio de Trabajos Virtuales se puede observar que si se verifica $\delta \mathrm{U} = \vec{R} \cdot \vec{\delta r} = 0$ para cualquier desplazamiento virtual $\vec{\delta r} \neq 0$ la resultante debe ser nula. Por tal motivo, como será demostrado posteriormente, el Principio de Trabajos Virtuales implica que se cumplan las condiciones de equilibrio.

Al tratarse de un cuerpo rígido, formado por un conjunto de puntos materiales vinculados o no a tierra, sobre el cual actúa un sistema de fuerzas, el Principio de Trabajos Virtuales establece que *si sobre un cuerpo rígido actúa un sistema de fuerzas (y momentos) en equilibrio, el trabajo producido por dicho sistema a lo largo de un desplazamiento virtual es nulo.*

En el enunciado del Principio de Trabajos Virtuales se hace referencia a desplazamientos virtuales, al tratarse de cuerpos rígidos, estos desplazamientos debe reunir las siguientes características:

Ideal: El desplazamiento debe ser ideal o imaginario y deberse a cualquier acción, real o ficticia, independiente del sistema de fuerzas que realizan el trabajo

Pequeño: Puede ser finito o infinitesimal, de manera que no modifique la geometría del sistema[3]

Compatible: Los desplazamientos virtuales pueden ser de cualquier tipo pero no pueden violar las condiciones de vínculo.

7.2.1 El Principio de Trabajos Virtuales y las condiciones de equilibrio

A continuación veremos como la aplicación del Principio de Trabajos Virtuales a chapas rígidas conducen a las condiciones generales de equilibrio para cuerpos en dos dimensiones.

Consideremos en primer lugar, la chapa de la figura 7.8 solicitada por un sistema de fuerzas exteriores $\vec{F_i}$ y M_i en equilibrio. Como es bien sabido, las condiciones de equilibrio de cuerpos en el plano son las siguientes

[3]Dicho de otra manera, es válido en campo de las pequeñas deformaciones y los efectos de segundo orden no son tenidos en cuenta

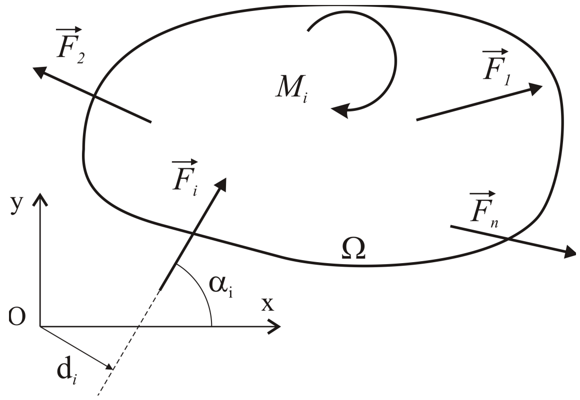

Figura 7.8: Chapa con cargas exteriores

$$\sum_i^n Fx_i = 0 \;\; ; \;\; \sum_i^n Fy_i = 0 \;\; ; \;\; \sum_i^m M_i = 0 \tag{7.16}$$

Por otro lado, una chapa en el plano posee tres grados de libertad que consisten en dos desplazamientos y una rotación, en consecuencia es suceptible de experimentar tres desplazamientos virtuales independientes entre si.

En primer lugar suponemos que la chapa sufre un desplazamiento virtual paralelo al eje x de intensidad δx. Al tratarse de un sólido rígido, todos sus puntos materiales y en particular los puntos de aplicación de las fuerzas, sufrirán el mismo desplazamiento δx, y el trabajo desarrollado por el sistema de fuerzas será

$$U = \sum_i^n Fx_i \, \delta x = \delta x \sum_i^n F_i \cos(\alpha_i) = 0 \tag{7.17}$$

siendo α_i el ángulo que forma cada fuerza $\vec{F_i}$ respecto del eje x. Dado que δx es arbitrario, para que se cumpla la igualdad (7.17) es necesario:

$$\sum_i^n F_i \cos(\alpha_i) = 0 \tag{7.18}$$

ecuación que corresponde a la primer condición de equilibrio en (7.16), $\sum Fx = 0$.

Consideremos ahora un desplazamiento virtual paralelo al eje y de intensidad δy. En forma análoga se tendrá

$$U = \sum_i^n Fy_i \, \delta y = \delta y \sum_i^n F_i \,\mathrm{sen}(\alpha_i) = 0 \tag{7.19}$$

donde debe verificarse

$$\sum_i^n F_i \,\mathrm{sen}(\alpha_i) = 0 \tag{7.20}$$

siendo la segunda condición de equilibrio en (7.16), $\sum Fy = 0$.

Por último, para una rotación virtual $\delta\theta$ de la chapa respecto del centro O, los puntos de aplicación de las fuerzas sufrirán el siguiente corrimiento virtual en la dirección de las mismas

$$\delta_i = \mathrm{d}_i\, \delta\theta \tag{7.21}$$

siendo d_i la distancia medida en forma perpendicular desde en origen de coordenadas a la dirección de las fuerzas $\vec{F}_i$. Por lo tanto, el trabajo virtual desarrollado por sistema de fuerzas, para una rotación virtual, de acuerdo con el enunciado del Principio de Trabajos Virtuales debe ser nulo

$$U = \sum_i^n F_i\, \delta_i + \sum_i^m M_i\, \delta\theta = \sum_i^n F_i\, \mathrm{d}_i\, \delta\theta + \sum_i^m M_i\, \delta\theta = \delta\theta \left(\sum_i^n F_i\, \mathrm{d}_i + \sum_i^m M_i \right) = 0 \tag{7.22}$$

de donde

$$\sum_i^n F_i\, \mathrm{d}_i + \sum_i^m M_i = 0 \tag{7.23}$$

Expresión idéntica a la tercer condición de equilibrio en (7.16), $\sum M = 0$. De esta manera se ha demostrado que *todo cuerpo que cumple el Principio de Trabajos Virtuales cumple a su vez las condiciones de equilibrio.*