UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE MECANICA APLICADA

ESTABILIDAD I

unidad 2

SISTEMAS DE FUERZAS

ING. CARLOS ABEL AZCONA
PROFESOR ADJUNTO

2007

SISTEMAS DE FUERZAS

- *INTRODUCCIÓN: CONCEPTO DE SISTEMAS DE FUERZAS. CLASIFICACIÓN.*
- *REPASO DEL CONCEPTO DE FUERZA Y SU REPRESENTACIÓN. FUERZA RESULTANTE. EXPRESIONES ANALITICAS DE UNA FUERZA.*
- *MOMENTO ESTATICO DE UNA FUERZA RESPECTO A UN PUNTO. CONCEPTO Y REPRESENTACION. TEOREMA DE VARIGNON.*
- *CUPLAS O PARES DE FUERZAS. PROPIEDADES. REPRESENTACION.*
- *COMPOSICION DE UNA FUERZA CON UN PAR. SISTEMA FUERZA-PAR EQUIVALENTE.*
- *MOMENTO DE UNA FUERZA RESPECTO A UN EJE. CONCEPTO. RELACION ENTRE EL MOMENTO DE UNA FUERZA RESPECTO A UN PUNTO CON EL MOMENTO DE LA MISMA FUERZA RESPECTO A UN EJE QUE PASA POR ESE PUNTO. RELACION ENTRE EL MOMENTO DE UNA FUERZA RESPECTO A UN PUNTO CON EL MOMENTO DE LA MISMA FUERZA RESPECTO A LOS EJES DE UN SISTEMA DE EJES DE UN SISTEMA DE COORDENADAS CON ORIGEN EN DICHO PUNTO.*
- *MOMENTO DE UNA FUERZA CON RESPECTO A UN EJE OBLICUO QUE PASA POR EL ORIGEN Y CON RESPECTO A UN EJE QUE NO PASA POR EL ORIGEN.*
- *CASO GENERAL DE FUERZAS EN EL ESPACIO: REDUCCIÓN A UN SISTEMA FUERZA – PAR EQUIVALENTE. OBTENCION ANALITICA DE LAS COMPONENTES DE LA FUERZA Y EL MOMENTO RESULTANTE. METODO DE LAS PROYECCIONES. CONCEPTOS DE INVARIANTE VECTORIAL E INVARIANTE ESCALAR. EJE CENTRAL: CONCEPTO, SU DETERMINACIÓN.*
- *EQUILIBRIO. CONDICIONES DE EQUILIBRIO PARA EL CASO GENERAL.*
- *CASOS PARTICULARES. POSIBILIDADES DE REDUCCION, SUS EXPRESIONES ANALITICAS. CONDICIONES NECESARIAS Y SUFICIENTES ÀRA EL EQUILIBRIO DE CADA CASO PARTICULAR.*

SISTEMAS DE FUERZAS

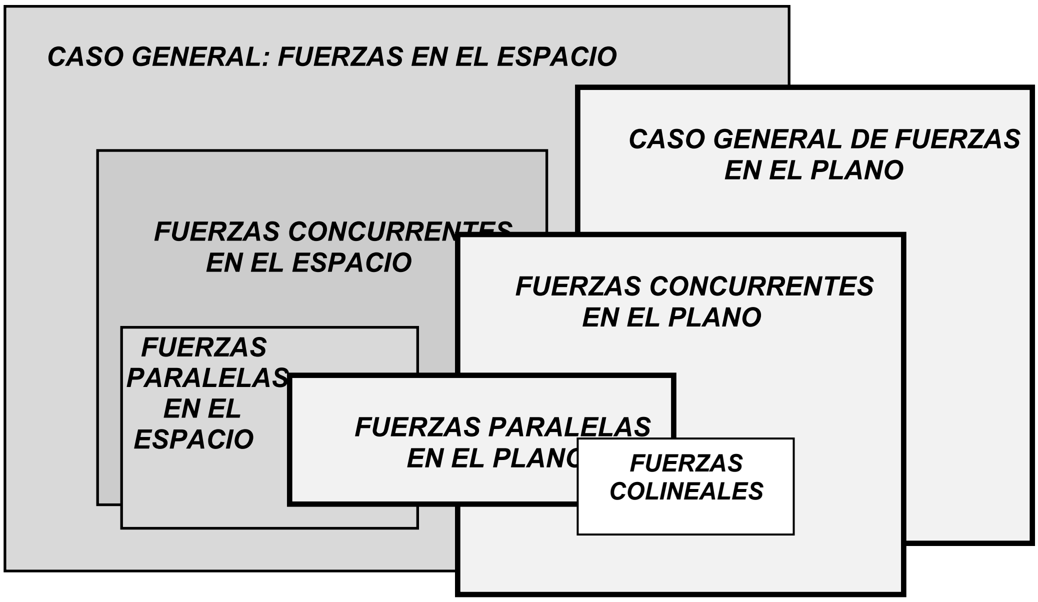
INTRODUCCION

Cuando un conjunto de fuerzas actúa sobre un cuerpo determinado decimos que estamos en presencia de un *Sistema de Fuerzas.*

Los sistemas de fuerzas suelen clasificarse en dos grandes grupos: coplanares o espaciales.

Dentro de cada uno de estos pueden a su vez distinguirse los conjuntos de fuerzas según sean estas concurrentes a un punto o no. Además, de entre las concurrentes se distingue un subgrupo con particularidades tan distintivas que habitualmente es considerado como un grupo aparte: el compuesto por fuerzas que concurren a un punto impropio, las *Fuerzas Paralelas.*

Otra manera de clasificar los sistemas de fuerzas es diferenciarlos en tres grupos, según estén compuestos por fuerzas no concurrentes, concurrentes o paralelas, y dentro de cada uno de estos en coplanares o espaciales. También suelen considerarse como un caso particular de sistemas de fuerzas paralelas a los sistemas *escalares,* es decir a los sistemas de fuerzas colineales.



El tratamiento de los sistemas de fuerzas comprende básicamente dos aspectos fundamentales: la cuestión de la **sustitución o equivalencia**, y el problema del **equilibrio.**

Se dice que dos sistemas de fuerza son equivalentes cuando la acción y el efecto que ambos desarrollan sobre un mismo cuerpo rígido son iguales.

Como surge de su propio nombre la cuestión de sustitución de un sistema de fuerzas radica precisamente en hallar otro sistema de fuerzas equivalente, apelando a la composición o descomposición de fuerzas, según las condiciones que cada problema particular pueda imponer. Aunque quizás resulte obvio cabe puntualizar que un sistema de fuerzas es equivalente a otro cuando sus **resultantes** son iguales, naturalmente teniendo en cuenta su acción sobre el mismo sólido, sobre una porción del mismo o sobre todo un sistema mecánico. A su vez la obtención de las resultantes de un sistema de fuerzas, entendido esto como la obtención del mínimo sistema equivalente (la mínima expresión a que puede reducirse todo sistema de fuerzas) es llamada justamente **reducción** de un sistema de fuerzas.

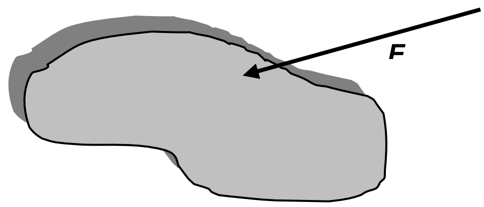
Tratándose de un sistema plano de fuerzas, la reducción será siempre a una fuerza o a un par, pudiéndose hablar de reducción a un sistema fuerza-par equivalente cuando se tome en cuenta su acción sobre un punto determinado (o centro de reducción).

En el caso de un sistema espacial de fuerzas el mismo en general podrá reducirse a un sistema compuesto por una fuerza resultante y un par o cupla actuante en un plano perpendicular a la misma. Este sistema también puede expresarse por dos fuerzas alabeadas.

Antes de abordar directamente el tratamiento de los distintos sistemas de fuerza y los métodos que pueden utilizarse para resolver los problemas correspondientes, es conveniente examinar ciertos conceptos relativos a principios y definiciones fundamentales.

REPASO DEL CONCEPTO DE FUERZA Y SU REPRESENTACIÓN

Fuerza es la acción que ejerce un cuerpo sobre otro tendiente a modificar su estado de reposo o movimiento. La misma puede ser aplicada por contacto directo (un cuerpo apoyado en otro), o a distancia. Un ejemplo de estas últimas son las fuerzas de origen gravitatorio o electromagnético.



La fuerza es una cantidad vectorial, ya que su efecto depende tanto de su magnitud como de su dirección y sentido. Además es necesario saber dónde actúa, es decir conocer su punto de aplicación.

En definitiva podemos decir que la especificación completa de una fuerza exige conocer:

- Su magnitud o intensidad (en valor y signo)
- Su dirección (su inclinación con respecto a un determinado sistema de ejes de referencia)
- Su punto de aplicación

Cuando consideramos la aplicabilidad de los principios de la estática ya que estamos en el estudio del equilibrio de los cuerpos rígidos, la fuerza puede considerarse un *vector deslizante*, es decir libre a lo largo de su recta de aplicación.

EXPRESIONES ANALÍTICAS DE UNA FUERZA

Vectorialmente se puede representar

$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F_X} + \boldsymbol{F_Y} + \boldsymbol{F_Z}$

Esto se puede escribir también, empleando la notación de J. Williard Gibbs , como

$$\boldsymbol{F} = Fx \cdot \boldsymbol{i} + Fy \cdot \boldsymbol{j} + Fz \cdot \boldsymbol{k}$$

Donde ***i, j*** y ***k*** son los vectores unitarios o *versores* y F_X, F_Y, y F_Z son las magnitudes de las componentes rectangulares y que por esto son también llamadas *componentes escalares.*

Esto es que una fuerza se puede representar por la suma geométrica (vectorial) de sus componentes rectangulares, que no son otra cosa que las proyecciones del vector representativo de la fuerza sobre cada uno de los ejes coordenados.

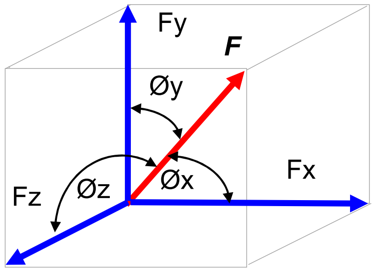
La magnitud de la fuerza en función de sus componentes queda definida por la relación pitagórica

$F = \sqrt{F_X^2 + F_Y^2 + F_Z^2}$

y su inclinación con respecto a cada uno de los ejes:

$\cos Øx = F_X / F$; $\cos Øy = Fy / F$; $\cos Øz = Fz / F$

Que son los llamados cosenos directores



La expresión vectorial antes vista puede escribirse, en función de la magnitud de la fuerza y sus cosenos directores como:

F = F. (***i*** cos Øx + ***j*** cos Øy + ***k*** cos Øz)

Para el caso de un conjunto de fuerzas, F1, F2, F3, etc. cuya suma, como vimos se puede efectuar por medio de la aplicación sucesiva del método del paralelogramo (suma *geométrica),* esta operación se expresa como la suma vectorial *FR = F1 + F2 + F3…*

O más genéricamente como $FR = \sum Fi$

Esta suma vectorial o, como dijimos, geométrica, se corresponde con las operaciones escalares que siguen:

$FR_X = \sum Fix$

$FR_Y = \sum Fiy$

$FR_Z = \sum Fiz$

Donde, por ejemplo, FR_X es la componente, o proyección, de la resultante según el eje *X,* en tanto el segundo miembro de la expresión es la suma de las componentes de las fuerzas F1, F2,... según el mismo eje. Lo propio ocurre en las direcciones de los otros dos ejes coordenados y más aún ocurriría lo mismo con respecto a cualquier otro eje pudiendo formularse que *la proyección de la fuerza resultante sobre cualquier eje considerado es igual a la suma algebraica de las proyecciones de las componentes sobre dicho eje.*

Obtenidas las componentes de la resultante, esta queda perfectamente definida por sus proyecciones en lo que hace a su magnitud, dirección y sentido. Tratándose de fuerzas concurrentes aplicadas sobre un punto al cual puede considerarse como origen del sistema de coordenadas toda fuerza queda suficientemente especificada por sus proyecciones o componentes rectangulares. Si en cambio la fuerzas están aplicada sobre cualquier otro punto será preciso que este a su vez sea determinado, para lo cual será necesario otro parámetro que llamamos *vector posición, S,* que generalmente estará dado por las coordenadas de ese punto de aplicación.

MOMENTO ESTÁTICO DE UNA FUERZA

Además de “empujar” al cuerpo sobre el cual actúa tendiendo a mover el punto de aplicación en su dirección y sentido, una fuerza tiende a hacerlo girar alrededor de cualquier otro punto que no coincida con su línea de acción.

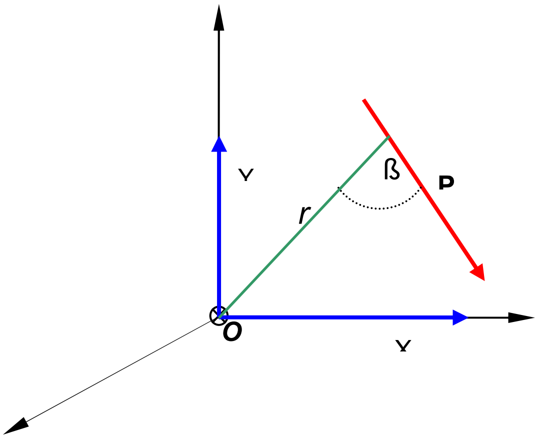
La medida o intensidad con que una fuerza tiende a provocar un giro alrededor de un punto determinado es denominada *Momento Estático* de la fuerza con respecto al punto considerado y su magnitud es proporcional tanto la intensidad de dicha fuerza como a su distancia al mismo (también llamada “brazo de momento”).

Por lo tanto el *valor* del momento estático de una fuerza con respecto a un punto es igual al producto de la magnitud de la fuerza por su distancia al mismo: M = *P* x *d*

Desde el punto de vista vectorial, y con relación a un punto de referencia o *centro de momentos,* una fuerza queda definida por dos vectores: el vector representativo de la fuerza y el vector posición o *radio vector.* Este radio vector es el segmento que vincula el centro de momentos con el punto de aplicación de la fuerza o cualquier punto de su línea de acción (teniendo en cuenta la propiedad de transmisibilidad).

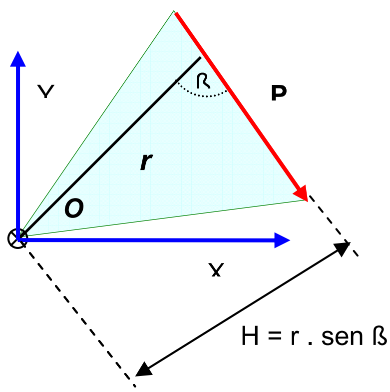
El momento es $\boldsymbol{M = r \times P}$ *(Producto vectorial)*

Su magnitud es M = P. r sen ß



Como se ve en la figura inferior, esta magnitud es igual al doble del área del triángulo que forman el segmento representativo de la fuerza y el centro de momentos, tomando a la primera como base del triángulo y a este como vértice opuesto.

Su representación es un vector, aplicado al centro de momentos, cuya recta de acción es un eje perpendicular al plano que contiene a la fuerza y al punto. Su signo es convencional dependiendo del sentido del giro que tienda a imprimir la fuerza sobre tal eje. La representación vectorial es insoslayable en el tratamiento de sistemas espaciales, ya que los vectores representativos de los momentos de las distintas fuerzas por lo general no tendrán la misma línea de acción por lo que su composición o descomposición habrán de seguir forzosamente las reglas de adición o resta de las magnitudes vectoriales.



Tratándose de sistemas coplanares, en cambio, todos los vectores representativos de los momentos estáticos de las distintas fuerzas con respecto a un mismo punto serán colineales, de manera que a efectos de su composición pueden ser considerados como cantidades *escalares*, lo que significa que únicamente tomamos en cuenta su *valor* y *signo.* Este se definirá por el sentido del giro según sea coincidente o contrario al de las agujas del reloj.

En la consideración más general, de tres dimensiones, si tomamos el centro de momentos como el origen de un sistema de ejes coordenados donde la fuerza y su vector posición están dados por sus componentes rectangulares (proyecciones sobre los ejes de ordenadas) de manera de estar definidos por:

$F = [\, F_X , F_Y , F_Z \,]$ y $r = [\, rx , ry, rz \,],$

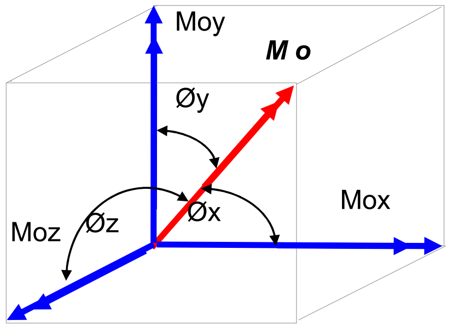
El producto vectorial $\boldsymbol{M = r \times F}$ puede escribirse en forma compacta como el determinante:

$$\boldsymbol{M = r \times F =} \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{rx} & \boldsymbol{ry} & \boldsymbol{rz} \\ \boldsymbol{FX} & \boldsymbol{FY} & \boldsymbol{FZ} \end{vmatrix}$$

COMPONENTES RECTANGULARES DEL MOMENTO DE UNA FUERZA

Como todo vector referido a un sistema de coordenadas rectangulares, el Momento de una fuerza respecto al origen del sistema queda definido por sus componentes según los tres ejes de referencia:

Mo = Mox + Moy + Moz



O, empleando la notación de Gibbs:
Mo =i. Mox + ***j.*** Moy + ***k.*** Moz

Donde Mox, Moy y Moz son las componentes rectangulares del momento ***Mo.***

Si se desarrolla el determinante ya visto se tendrá que:

Mox = ry. Fz – rz. Fy ;
Moy = rz. Fx – rx. Fz ;
Moz = rx. Fy – ry. Fx

Que son las *componentes rectangulares del momento estático de una fuerza con respecto al origen en función de las componentes rectangulares de la fuerza (* Fx, Fy, Fz) *y de su punto de aplicación (* rx, ry, rz).

Las relaciones entre los valores del vector momento con los de sus componentes quedan

establecidas por la relación pitagórica $Mox = \sqrt{Mox^2 + Moy^2 + Moz^2}$

Y los respectivos cosenos directores por las relaciones

Cos Øx = Mox / Mo ; Cos Øy = Moy / Mo ; Cos Øz = Moz / Mo

TEOREMA DE VARIGNON

El teorema de Varignon dice que *dadas dos fuerzas concurrentes, el momento estático de la resultante de ambas fuerzas con respecto a un punto es igual a la suma de los momentos estáticos de las componentes con respecto al mismo punto.*

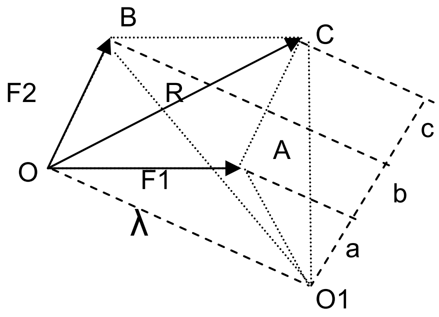
Una de las formas de demostrar este teorema es la siguiente:
Consideremos las dos fuerzas F1 y F2 concurrentes al punto O y su resultante R, hallada según el principio del paralelogramo. Este tiene como vértices los puntos O, A, B y C, y recordando lo visto anteriormente, si tomamos como centro de momentos al punto O1 vemos que:

El momento de F1 con respecto a O1 es igual a dos veces el área del triángulo formado por O, A Y O1.

El momento de F2 con respecto a O1 es igual a dos veces el área del triángulo formado por O, B Y O1

El momento de R con respecto a O1 es igual a dos veces el área del triángulo formado por O, C Y O1

Si trazamos una línea de referencia perpendicular a la recta definida por O y O1, vemos que las proyecciones de los segmentos OA, OB Y OC sobre esa perpendicular nos da las alturas correspondientes a los triángulos que forman cada uno de esos segmentos con el vértice opuesto O1.



Si llamamos λ al segmento definido por O y O1, el área de O, A, O1 será igual al producto de λ por a, lo que podemos escribir:

AREA [O,A.O1] = λ . a / 2 → ½ [MF1 / O1]
(momento estático de F1 respecto al punto O1)

Asimismo y por analogía

AREA [O,B,O1] = λ .(a+ b) / 2 → ½ [MF2 / O1]

AREA [O,C,O1] = λ.(a +b+c) / 2 → ½ [MR / O1]

Como OA es igual y paralelo a BC, resulta que a = c

Según Varignon, tendría que ser:

AREA [O,A,O1] + AREA [O, B, O1] = AREA [O, C, O1]

O sea que debe cumplirse:

$$\lambda \,.\, (a / 2) + \lambda.\, (a + b) / 2 = \lambda \,.\, (a + b + c)/ 2$$

Simplificando términos comunes quedaría $a + (a + b) = (a + b + c)$,

con lo cual, si tenemos en cuenta que a = c, resulta efectivamente

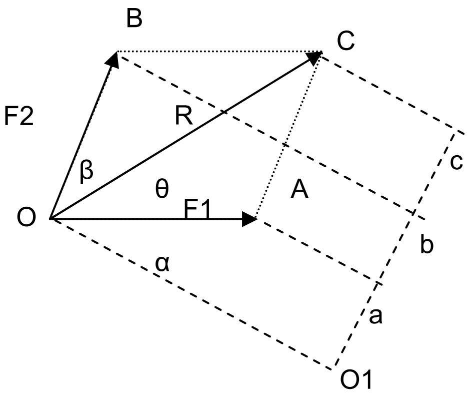
$c + (a + b) = (a + b + c)$, con lo cual queda demostrado el teorema.

Otra forma de demostrar el teorema de Varignon es como sigue:

De acuerdo con lo visto

MF1/ O1 = F1 . d . sen α

(El momento estático de la fuerza F1 Con respecto al punto O1 es igual al producto de su intensidad por la magnitud del radio vector d y por el seno del ángulo que forman ambos vectores)



Asimismo podemos decir:

MF2/ O1 = F2 . d . sen β

Y que

MR / O1 = R . d. sen θ

Puede verse que
F1 sen α = a

y también que a = c ya que BC es igual y paralela al segmento que representa a F1

También puede verse que:

F2 sen β = b ; y que: R sen θ = a + b + c

De manera que en forma casi similar a la anterior demostración puede concluirse con que:

MF1/ 01 + MF2/ 01 = MR/

Esta propiedad fue descubierta y demostrada por Varignon (1654 – 1722) mucho antes de crearse el álgebra vectorial. Si planteamos el problema de la demostración de dicho teorema desde este punto de vista, el mismo se resuelve en forma inmediata en virtud de la propiedad distributiva del producto vectorial.

r* x *F1* + *r* x *F2* + *r* x *F3* + ... = *r* x (*F1* + *F2* + *F3*.+ ...) = *r* x *R

Además, el empleo de los conceptos de álgebra vectorial permiten extender Inmediatamente el teorema de Varignon a cualquier sistema de fuerzas concurrentes sea éste plano o espacial.

PARES DE FUERZAS

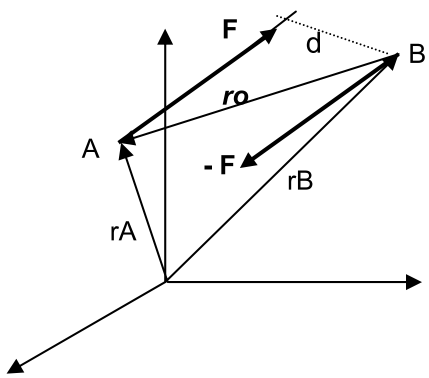
El sistema formado por dos fuerzas paralelas, de igual intensidad y de sentido contrario constituye lo que se denomina ***cupla*** o ***par de fuerzas*** (o simplemente ***par)***. Este sistema no tiene fuerza resultante, es decir que no es posible componerlas – reducirlas- a una única fuerza. Una propiedad de los pares es que *el momento estático de un par de fuerzas respecto a un punto cualquiera del plano en que actúan es constante* y su valor igual al producto de la magnitud de una de las fuerzas por la distancia que las separa. A este momento se lo denomina *Momento del Par*, su signo se define según lo visto para momento estático de una fuerza.

El momento del par será:

M = rA x F + rB x (- F) = (rA – rB) x F,

rB + ro = rA → rA – rB = ro

de donde ***M = ro x F***



Donde M es un vector cuya dirección es perpendicular al plano determinado por ambas fuerzas, su valor es igual al producto d. F, es decir a la magnitud de la fuerza multiplicada por la distancia que las separa y el sentido quedará definido por la regla de la mano derecha.

Puede observarse que tanto la magnitud como la dirección y el sentido del momento es independiente de la posición del centro de coordenadas , esta comprobación, junto al hecho de que el efecto de una cupla queda completamente definido por su vector representativo, nos permite definir una serie de propiedades que caracterizan a los pares de fuerzas.

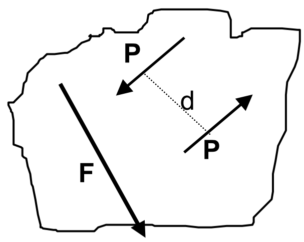
REPRESENTACIÓN VECTORIAL

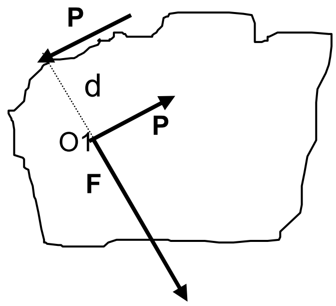
El vector representativo de un par es entonces un *vector libre*, esto es un vector que puede desplazarse paralelamente a sí mismo por todo el espacio sin que su efecto se altere. Su magnitud es igual al del momento de la cupla y su dirección es perpendicular al plano determinado por las fuerzas constitutivas del par. Su signo es convencional y, al igual que lo señalado para el momento estático de una fuerza con respecto a un punto, representa el sentido de giro que el par tiende a imprimir al cuerpo sobre el que actúa.

PROPIEDADES DE LAS CUPLAS

- El Momento de un par es constante e igual para todos los puntos del plano en el que actúa.
- El efecto del par no se modifica si su plano de acción se desplaza paralelamente a sí mismo.
- El par no varía mientras el producto **P. d** permanezca constante.
- El par puede rotar en cualquier sentido sin que su efecto se modifique.

COMPOSICIÓN DE UNA FUERZA CON UN PAR





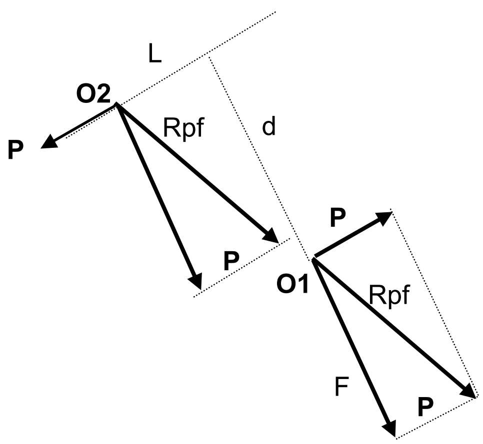
Dada una fuerza F y un par M (P. d) que actúan en un mismo plano, podemos efectuar su composición aplicando la regla del paralelogramo y las propiedades de las cuplas.

El efecto producido por una cupla es independiente de la posición que ocupa en su plano de acción y solo depende de la magnitud y sentido de su momento: es decir que podemos ubicar sus fuerzas componentes en cualquier posición con tal que el producto P por d permanezca invariable y respetando naturalmente el sentido de giro del par original.

Lo que haremos es considerarla de tal manera que una de ellas concurra con F al mismo punto de aplicación, que llamamos O1, y que la dirección de ambas componentes del par sea perpendicular a esta. A partir de esta nueva posición que, repetimos, no altera el sistema original en absoluto, podemos efectuar la composición de este sistema.

Aplicando la regla del paralelogramo componemos las dos fuerzas que concurren a O1, obteniendo la resultante parcial Rpf. Nos queda así, como primera reducción, esta fuerza, aplicada al punto O1, y la otra fuerza P ubicada a una distancia d de este punto.

Si desplazamos a ambas hasta un punto de concurrencia O2 y las componemos, obtenemos una resultante final R que es el resultado definitivo de la composición.



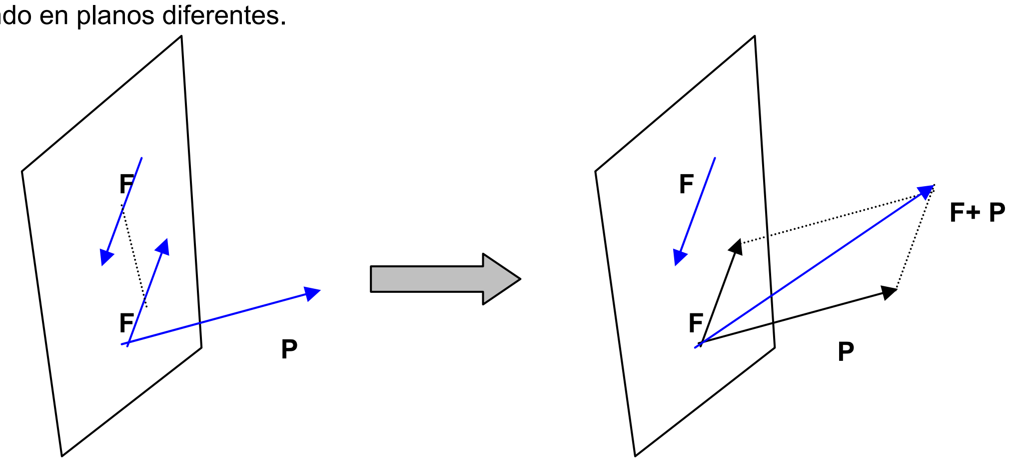
Analizando los paralelogramos construidos sobre los vértices O1 y O2, vemos que se han formado dos triángulos; uno compuesto por F, Rpf y el lado opuesto a O1, que es igual a P; el otro triángulo en O2 formado por Rpf , el lado opuesto a O2 que también es igual a P, y la resultante R. Como ambas figuran son iguales por tener dos lados similares, resulta que R es igual a F. Con lo cual hemos comprobado que el resultado de la composición entre una fuerza y un par es una traslación de la fuerza paralelamente a si misma. La magnitud de esa traslación la podemos deducir también de la figura, si observamos que hay dos triángulos que tienen el vértice común O1. Uno de ellos tiene como lados a F, Rpf y el opuesto a O1, que como vimos era igual a P. El otro tiene como catetos a d, la distancia entre las componentes del par, y a L, que es la distancia de traslación de la fuerza F. La hipotenusa es el segmento formado por O1 - O2, determinados por el deslizamiento de la fuerza Rpf hasta su concurrencia con P.

Ambos triángulos son, como se ve, semejantes; por lo que podemos plantear las siguientes relaciones entre lados correspondientes: L / d = P / F; de manera que L = p. d / F y finalmente que L = M / F

Es decir que la distancia de traslación de la fuerza es igual al cociente entre la magnitud del momento de la cupla y el valor de la fuerza.

En cuanto a la orientación de ese desplazamiento podemos deducirlo del siguiente razonamiento: puesto que el sistema formado por la fuerza y el par es equivalente al de la fuerza desplazada y el momento estático de esta con respecto a cualquier punto de su recta de acción es nulo., también deberá serlo el momento del sistema original. De manera tal que podemos afirmar que un punto de paso de la nueva línea de acción de la fuerza deberá estar orientado de modo tal que el momento estático de la fuerza en su ubicación original y respecto a cualquier punto de su recta de traslación sea de sentido contrario al del par.

En el caso en que la fuerza y el par no actúen en el mismo plano, la composición de ambos dará como resultado un sistema de fuerzas alabeadas. Y a la inversa, un sistema de dos fuerzas alabeadas siempre tendrá un sistema equivalente de una fuerza y una cupla actuando en planos diferentes.



Por su parte, la composición de cuplas sigue las reglas de la suma vectorial o geométrica, es decir la regla del paralelogramo. Cuando se trate de un sistema plano de fuerzas su tratamiento es algebraico, pues todos los vectores representativos de los pares actuantes serán paralelos debiendo tenerse en cuenta sólo su magnitud y signo.

TRASLACIÓN DE UNA FUERZA: Sistema *Fuerza – Par* Equivalente

También podemos plantear el problema inverso diciendo que para trasladar una fuerza paralelamente a sí misma de un punto o una línea de aplicación a otra, es preciso incorporar al sistema un par cuyo momento será igual y del mismo sentido al momento estático producido por la fuerza en su posición original con respecto al punto de traslación.

Veamos las figuras de la derecha: Sobre el punto A de un cuerpo actúa una fuerza P. Si queremos trasladar la fuerza al punto A* de manera que su efecto original no se modifique, podemos proceder del siguiente modo.

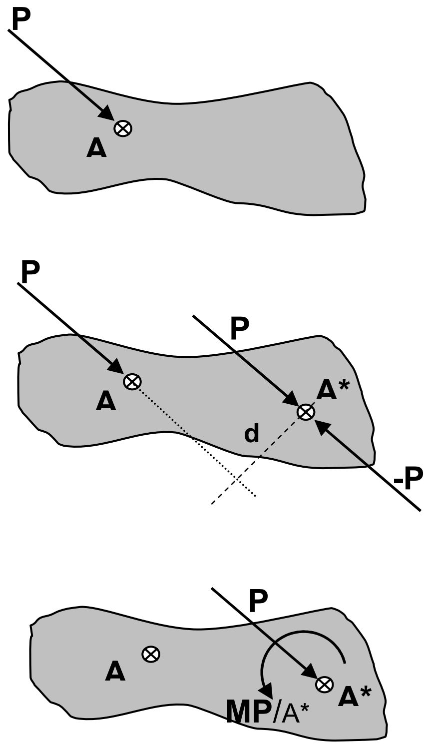
Sobre el punto de traslación A* se aplica un sistema en equilibrio de fuerzas iguales a P y a –P, esto es un sistema de fuerzas opuestas de igual magnitud y dirección que la fuerza original P.

El efecto que este nuevo sistema de fuerzas produce sobre el cuerpo no se ha modificado, es decir que son *sistemas equivalentes*.

Puede advertirse que la fuerza P aplicada sobre el punto A, y la fuerza –P, aplicada en el punto A*, configuran un par de momento $MP/_{A^*}$ y cuyo valor es igual al producto de la magnitud de P por d, es decir por la distancia de traslación de la recta de acción de P desde A hasta A*.

También puede verse que el vector representativo de ese par es igual en magnitud, dirección y sentido que el del momento estático de la fuerza P, ubicada en su posición original, con respecto al punto de traslación A*.

El sistema formado por P, aplicada sobre el punto A*, y el par $MP/_{A^*}$, es el *Sistema Fuerza Par Equivalente* del sistema original en este caso compuesto por una única fuerza aplicada en el punto A, considerándose al punto de traslación A* como *Centro de Reducción.*

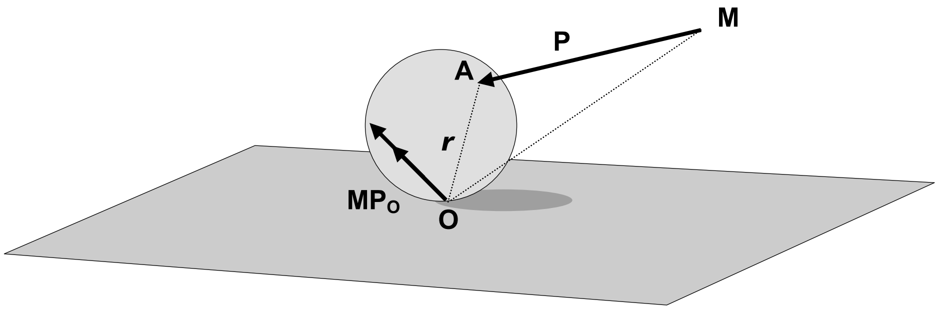


Puede concluirse en que toda fuerza aplicada sobre un punto determinado de un cuerpo puede desplazarse desde ese punto a otro arbitrariamente elegido permaneciendo igual a sí misma en magnitud y dirección sin que su efecto se modifique a condición de que a ese movimiento acompañe una cupla, que podemos llamar *Par de Traslación,* cuyo momento será igual al momento estático de la fuerza en su posición original con respecto al punto al cual se desplaza.

MOMENTO DE UNA FUERZA RESPECTO A UN EJE

Introducción

En la figura puede observarse la aplicación de una fuerza P representada por el segmento AM sobre un cuerpo, que en este caso podría tratarse de una bola de billar, que se apoya sobre la mesa en un punto O. Si tomamos este punto como centro de momentos, la fuerza P producirá un momento MP/o (Momento de la fuerza P con respecto al punto O) cuyo vector representativo será perpendicular al plano definido por la línea de acción de la fuerza y el punto O.



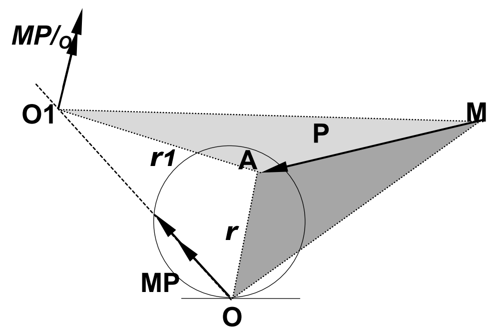
El segmento OA es el brazo de momentos y define al *vector posición* ***r***. El momento estático de la fuerza P con respecto al punto O quedará definido por el producto vectorial ***r x P = MP/$_O$***, y su valor será igual al doble del área del triángulo OMA. La elección de un centro de momentos es arbitraria, aunque en este caso es evidente que el interés del problema conduce a la elección del punto O como centro de momentos y origen del sistema de coordenadas.

El significado físico del vector ***MP/$_O$*** aplicado al punto O de la esfera en cuestión debe interpretarse como la tendencia de la fuerza a provocar un giro de la misma en torno al eje que pasando por el punto O tiene la dirección de dicho vector [1]. Si tomamos otro centro de momentos O1 que esté aplicado sobre el mismo eje tendremos otro momento que surge del producto ***r1 x P = MP/$_{O1}$***, cuya magnitud será igual al doble del área del triángulo O1AM y su dirección será perpendicular al plano definido por dicho triángulo.

Tomando como plano de referencia al definido por la recta de acción de la fuerza P y el punto O puede apreciarse que el triángulo OAM resulta de la proyección ortogonal del O1AM sobre el mismo. Si llamamos Ø al ángulo que forman estos planos sabemos que la relación entre las áreas de ambos triángulos será:

Área de OAM = Área de O1AM . cos Ø.

Como el ángulo entre ambos momentos será también el mismo Ø, puede advertirse que la proyección de MP/$_{O1}$ sobre el eje considerado será igual a MP/$_O$, independientemente de la ubicación del punto O1 sobre el eje considerado

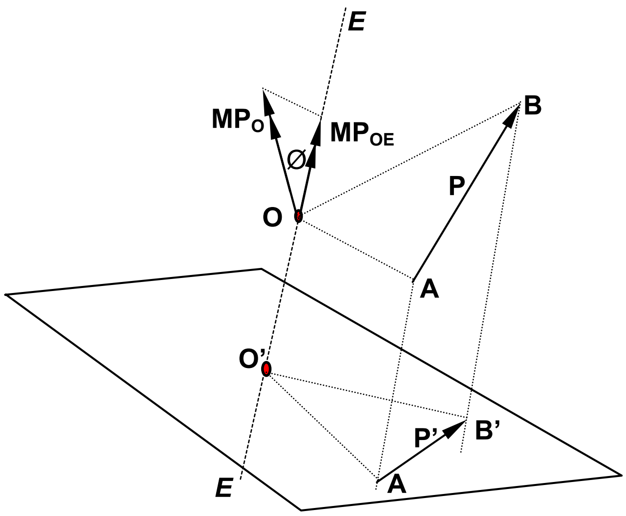


Esto nos permite afirmar que *el momento estático de una fuerza con respecto a un punto define un eje coincidente con su vector representativo y que la proyección del vector momento sobre dicho eje es invariante no dependiendo de la ubicación del centro de momentos sobre dicho eje.*

[1] Este análisis corresponde al instante de movimiento inminente del cuerpo pues una vez comenzado este su estudio escapa al dominio de la Estática.

MOMENTO DE UNA FUERZA RESPECTO A UN EJE:

Relación Entre el Momento de una Fuerza respecto a un Punto con el Momento de la misma Fuerza respecto a un Eje que pasa por ese Punto.



La fuerza, cuyo vector representativo es el segmento AB, produce, con respecto al punto O, un momento estático MP_O, cuya magnitud será el doble del área del triángulo OAB, y su recta de acción perpendicular al plano determinado por el mismo.

Si por el punto O se hace pasar un eje cualquiera, cuya inclinación con respecto a la dirección de $MP/_O$ sea el ángulo Ø , la proyección del mismo sobre dicho eje será $\mathbf{MP/_{OE}}$, Y cuya magnitud será $MP_O \cos Ø$.

Si proyectamos todo sobre un plano perpendicular al eje dado, tendremos la fuerza proyectada P' y el centro de momentos O' dado por la intersección entre dicho eje y el plano perpendicular a él. El momento estático de la fuerza P' tendrá por magnitud el doble del área del triángulo O'A'B' y su dirección coincidente con el eje.

El mismo razonamiento empleado para el punto anterior, es decir que en ángulo entre el vector momento $\mathbf{MP/_O}$ y el eje OE es el mismo que existe entre los planos determinados por OAB y O'A'B', y la consiguiente relación entre los valores de las superficies de dichos triángulos nos permite ver que:

Dado el momento estático de una fuerza con respecto a un punto y un eje cualquiera que pasa por el mismo; la componente del vector momento en la dirección de ese eje es igual al momento de la fuerza proyectada sobre un plano perpendicular al mismo con respecto al punto de intersección entre dichos eje y plano.

Puede observarse además, que dada un fuerza y un eje cualquiera, la componente del momento en la dirección del eje no depende del punto que sobre él se tome como centro de momentos puesto que, como puede advertirse en la figura, la relación entre la proyección de la fuerza y el centro de momentos proyectado, intersección entre el eje y el plano ortogonal al mismo, es invariable e independiente de la posición del punto sobre el eje.

Esto nos permite definir el concepto de **Momento estático de una fuerza con respecto a un eje** diciendo que el mismo es la tendencia conque una fuerza aplicada sobre un cuerpo tiende a hacerlo girar en torno de un eje cualquiera perteneciente al mismo y tal que no sea paralelo ni concurrente con su línea de acción. Su magnitud es igual al momento estático de la proyección de la fuerza sobre un plano perpendicular al eje con respecto al punto de intersección de ambos y su vector representativo es colineal con dicho eje.

Relación entre el momento de una fuerza respecto a un punto y el momento de la misma fuerza con respecto a los ejes de un sistema de coordenadas con origen en dicho punto:

El momento de una fuerza con respecto a un eje cualquiera es igual al momento de dicha fuerza con respecto a un punto arbitrario perteneciente al eje proyectado sobre la dirección del mismo.

El momento de la fuerza con respecto al origen de un sistema de coordenadas es MF_0

Los momentos de esa fuerza con respecto a cada eje coordenado serán:

$MFxx = MF_0 . \cos \omega x$ Momento de la fuerza F con respecto al eje X
$Mfyy = MF_0 . \cos \omega y$ Momento de la fuerza F con respecto al eje Y
$MFzz = MF_0 . \cos \omega z$ Momento de la fuerza F con respecto al eje Z

Donde ωx, ωy, y ωz son los ángulos que forma el vector MF_0 con cada uno de los ejes coordenados.

Si operamos sobre las tres igualdades elevando cada miembro al cuadrado, tendremos:

$$MFxx^2 = MF_0^2 . \cos^2 \omega x$$
$$MFyy^2 = MF_0^2 . \cos^2 \omega y$$
$$MFzz^2 = MF_0^2 . \cos^2 \omega z$$

Sumando miembro a miembro

$$MFxx^2 + Mfyy^2 + MFzz^2 = MF_0^2 (\cos^2 \omega x + \cos^2 \omega y + \cos^2 \omega z)$$

Como $(\cos^2 \omega x + \cos^2 \omega y + \cos^2 \omega z) = 1$ por propiedad de los cosenos directores

$$MFxx^2 + Mfyy^2 + MFzz^2 = MF_0^2 \rightarrow MF_0 = \sqrt{MFxx^2 + Mfyy^2 + MFzz^2}$$

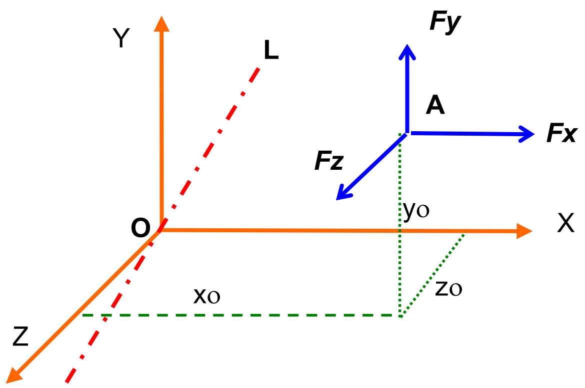
Relación que nos permite inferir que las componentes rectangulares del momento de una fuerza con respecto a un punto son iguales a los momentos de esa fuerza con respecto a los ejes correspondientes del sistema con origen en dicho punto.

Momento de una Fuerza respecto a un Eje Oblicuo

Eje que pasa por el Origen

Si suponemos tener una fuerza dada por sus componentes, ***F (*** Fx, Fy, Fz ***)*** aplicada a un punto de coordenadas ***A (*** Xo, Yo, Zo ***),*** se podrá determinar el momento estático de la fuerza con respecto al origen $MF_{0,}$, a través de la obtención de sus componentes respecto de los ejes coordenados, MF_{OX}, MF_{OY}, MF_{OZ},.

MF/o = MF/ox . ***i*** + MF/oy . ***j*** + MF/oz . ***k***



Donde

MF/ox = Fz Yo – Fy Zo
MF/oy = Fx Zo – Fz Xo
MF/oz = Fy Xo – Fx Yo

Sabemos que MF/o puede expresarse en forma compacta como el determinante:

$$\boldsymbol{MF/o} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ Xo & Yo & Zo \\ Fx & Fy & Fz \end{vmatrix}$$

Si por el origen del sistema se considera un eje **L** cualquiera cuya dirección, naturalmente, no sea coincidente con ninguno de los ejes principales, ella quedará definida por sus cosenos directores [λx, λy, λz]

La proyección del vector ***MF/o*** sobre el eje ***L*** estará dada por el producto escalar

$\boldsymbol{MF/o \cdot \lambda} = MF/ox \cdot \lambda x + MF/oy \cdot \lambda y + MF/oz \cdot \lambda z$

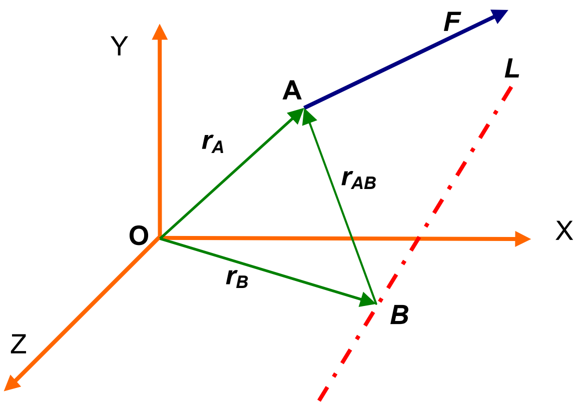
Que a su vez podrá escribirse como $\boldsymbol{MF/o \cdot \lambda} = \begin{vmatrix} \lambda x & \lambda y & \lambda z \\ Xo & Yo & Zo \\ Fx & Fy & Fz \end{vmatrix}$

Y finalmente:

$\boldsymbol{MF/o \cdot \lambda} = \lambda x\,(Fz\, Yo - Fy\, Zo) + \lambda y\,(Fx\, Zo - Fz\, Xo) + \lambda z\,(Fy\, Xo - Fx\, Yo)$

Eje que no pasa por el Origen

Partiendo de lo visto en el punto anterior, y considerando las operaciones de forma vectorial tendremos que el Momento de F con respecto al punto origen será



$\boldsymbol{MF/o = r_A \times F}$

Mientras que el momento de la misma fuerza por respecto al punto B :

$\boldsymbol{MF/_B = r_{AB} \times F}$

$\boldsymbol{r_B + r_{AB} = r_A}$ o sea que $\boldsymbol{r_A - r_B = r_{AB}}$

$\boldsymbol{MF/_B = (r_A - r_B) \times F}$

Y su proyección sobre el eje L

$\boldsymbol{MF/_{BL} = \lambda \;\; MF/_B = \lambda\, (r_A - r_B) \times F}$

Producto que se puede expresar como el determinante:

$\boldsymbol{\lambda \;\; MF/_B = \lambda\, (r_A - r_B) \times F} = \begin{vmatrix} \lambda x & \lambda y & \lambda z \\ \Delta Xo & \Delta Yo & \Delta Zo \\ Fx & Fy & Fz \end{vmatrix}$

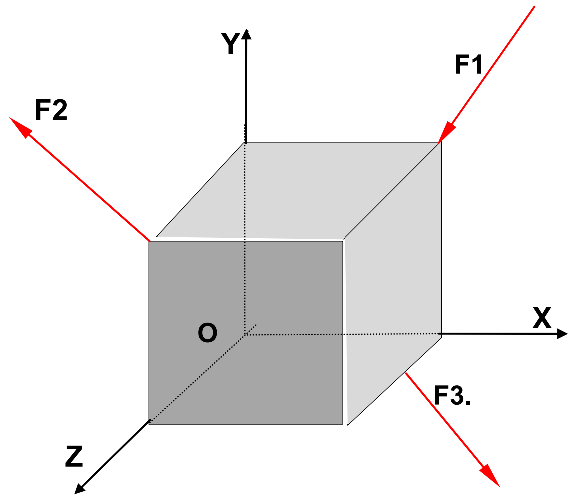
Donde $\Delta xo = r_{AX} - r_{BX}$
$\Delta yo = r_{AY} - r_{BY}$
$\Delta xo = r_{AZ} - r_{BZ}$

Operando el determinante queda que:

$\boldsymbol{MF/_{OL}} = \lambda x\,(Fz\, \Delta Yo - Fy\, \Delta Zo) + \lambda y\,(Fx\, \Delta Zo - Fz\, \Delta Xo) + \lambda z\,(Fy\, \Delta Xo - Fx\, \Delta Yo)$

CASO GENERAL DE FUERZAS EN EL ESPACIO.

“Cualquier sistema de fuerzas aplicado a un cuerpo puede siempre reducirse a una fuerza resultante, aplicada en un punto arbitrariamente elegido, y a una cupla o par resultante”



Esta afirmación, enunciada por S. Timoschenko, se demuestra fácilmente utilizando los conceptos ya vistos.

Supongamos que sobre un cuerpo cualquiera actúa un sistema de fuerzas F1, F2 y F3 como el de la figura de manera que sus líneas de acción sean alabeadas entre sí. Se observa de inmediato que su composición mediante la regla del paralelogramo no es posible pues no podemos encontrar puntos de concurrencia entre ellas.

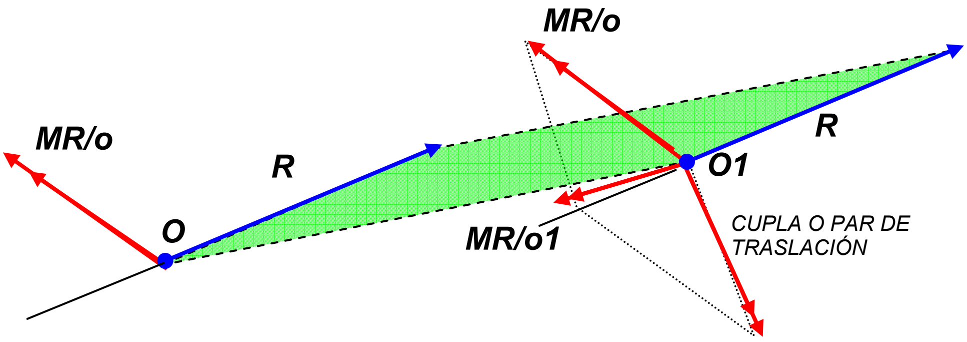
Sabemos que el efecto de una fuerza F que actúa sobre un cuerpo aplicada a un punto determinado no se altera cuando dicha fuerza se desplaza paralelamente a sí misma hasta aplicarse sobre otro punto cualquiera siempre que al desplazamiento se le acompaña con una cupla cuyo momento es igual y del mismo sentido al que produciría la fuerza en su ubicación original con respecto al punto de traslación. Este sistema de un par y una fuerza aplicada sobre un punto de traslación arbitrariamente elegido se denominaba *Sistema Fuerza Par Equivalente.*

De manera que si elegimos por ejemplo el punto **O**, que llamaremos centro de reducción, podemos trasladar todas las fuerzas del sistema hasta aplicarlas sobre él. Cada una de las fuerzas, al trasladarse al centro de reducción, producirá una cupla de traslación de magnitud igual al producto de la fuerza por la distancia del desplazamiento y cuyo vector representativo será perpendicular al plano formado por la línea de acción original de la fuerza y el centro de reducción elegido.

Ahora tenemos un sistema de fuerzas concurrentes cuya composición arrojará una fuerza resultante ***R*** y un sistema de igual número de cuplas que pueden componerse y con ello dar lugar a una cupla resultante a cuyo vector representativo llamaremos Momento Resultante ***MR/o.***

El vector *Fuerza Resultante* depende únicamente de la magnitud y dirección de las componentes del sistema original de fuerzas y es totalmente independiente del centro de reducción elegido. En otras palabras, cualquiera sea la posición del centro de reducción que se elija, la magnitud y dirección del vector ***R*** serán invariables. Por ello recibe la denominación de ***Invariante Vectorial.***

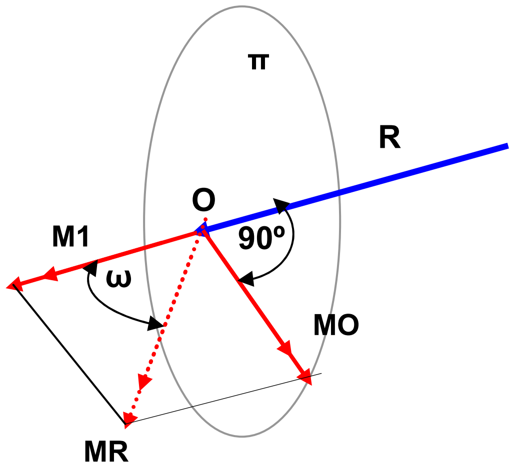
El vector *Momento Resultante*, en cambio, por ser como vimos producto de la traslación del sistema de fuerzas, sí depende del centro de reducción elegido y tanto su magnitud como su dirección serán variables en función de la ubicación del mismo con relación al sistema original.



Supongamos que en la figura de arriba tenemos el vector Fuerza Resultante ***R*** y el par o cupla ***MR/o*** que es el vector momento resultante del sistema de fuerzas con respecto al punto ***O***. Si ahora tomamos un nuevo centro de reducción ***O1***, podemos efectuar la traslación de ***R*** hacia este nuevo punto lo que motivará la incorporación de la correspondiente *cupla o par de traslación* cuya magnitud y dirección serán iguales a las del momento estático de la fuerza ***R*** , considerada en el punto ***O***, con respecto al punto ***O1.***

Tomando a este punto ***O1*** entonces, como nuevo centro de reducción, tendremos referido al mismo una fuerza de magnitud y dirección ***R***, igual que para ***O***, y de una cupla ***MR/o1***, que surge de la composición entre la cupla ***MR/o*** y la cupla producida por la traslación de la resultante de O a O1.

Se puede ver entonces que, cambiando el centro de reducción la resultante ***R permanece constante*** mientras la cupla resultante se modifica tanto en valor como en dirección.



Un detalle importante es que la cupla de traslación siempre será perpendicular a la línea de acción de la fuerza resultante por lo que su vector, que es el factor que modifica al ***MR***, nunca tendrá componente en la dirección de la fuerza. Esto nos permite inferir una importante conclusión: que ***la componente del MR en la dirección de la fuerza resultante es constante e independiente del centro de reducción***. A esta componente se la denomina **Invariante Escalar,** y representa a un par de fuerzas o cupla que actúa en un plano perpendicular a la dirección de la fuerza resultante.

En otros términos, al vector ***MR*** (Momento resultante con respecto al centro de reducción elegido) lo podemos descomponer en dos vectores ortogonales entre sí, uno, el llamado *invariante escalar*, en la dirección de la fuerza resultante y el otro, naturalmente perpendicular a estos, y que representa a una cupla que actúa en un plano paralelo a la línea de acción de la fuerza. Esta última cupla puede a su vez componerse con la resultante lo que dará como resultado una traslación de la misma, con lo cual el sistema quedará finalmente reducido a una fuerza resultante y a una cupla que actúa en un plano perpendicular a la misma. Este conjunto formado por una fuerza y una cupla cuyos vectores representativos tienen la misma dirección recibe la denominación de ***Conjunto Torsor,*** siendo también llamado *Llave de Torsión* o asimismo *Torsor de Fuerzas.* Por su parte la línea de acción de la fuerza resultante para la cual el sistema se reduce a un conjunto torsor, es decir que el ***MR*** tiene la misma dirección que la fuerza resultante es denominado *Eje de Torsión* o también *Eje Central.*

Finalmente, cabe señalar que, dado el hecho de que una fuerza y una cupla no coplanares siempre pueden componerse dando lugar a dos fuerzas alabeadas, puede afirmarse también que cualquier sistema de fuerzas en el espacio puede reducirse a dos fuerzas cuyas rectas de acción no se corten, es decir a dos fuerzas alabeadas.

RESOLUCION ANALITICA.

Método de las Proyecciones.

Si tomamos al centro de reducción elegido como origen de un sistema cartesiano cada fuerza que compone el sistema quedará definida por sus proyecciones respecto de los ejes correspondientes y por las coordenadas de su punto de aplicación.

Recordemos que si teníamos la expresión ***R* = $\sum$ *F i*** y cada fuerza ***F i*** definida por sus proyecciones o componentes rectangulares, esa expresión vectorial se corresponde con las siguientes relaciones algebraicas o escalares:

$R\,x = \sum F\,x$

$R\,y = \sum F\,y$

$R\,z = \sum F\,z$

Con lo cual quedan definidas las componentes de la Resultante. Su magnitud total será

$$R = \sqrt{(R_X^2 + R_Y^2 + R_Z^2)}$$

Su dirección respecto de los ejes correspondientes estará determinada por los llamados Cosenos Directores cuyos valores serán:

CRX = RX / R; CRY = RY / R ; CRZ = RZ / R

El vector representativo de la cupla resultante es igual en magnitud, dirección y sentido al que representa la composición o suma geométrica –vectorial- de los momentos estáticos de cada una de las fuerzas con respecto al centro de reducción.

Por lo cual ***MR/o* = $\sum$ *M F i/o***

Teniendo en cuenta además que las componentes rectangulares del momento de una fuerza con respecto a un punto son iguales a los momentos de esa fuerza con respecto a los ejes correspondientes del sistema con origen en dicho punto, podemos expresar las siguientes relaciones escalares:

$MR/_{ox} = \sum Mfi/_{OX}$

$MR/_{oy} = \sum Mfi/_{OY}$

$MR/_{oz} = \sum Mfi/_{OZ}$

Que definen las componentes rectangulares del ***MR.*** La magnitud de MR será:

$$MR/o = \sqrt{(MR_{ox}^2 + MR_{oy}^2 + MR_{oz}^2)}$$

Y los cosenos directores correspondientes:

CMX = MRox / MRo ; CMY = MRoy / MRo ; CMZ = MRoz / MRo

Con la definición de estos dos valores, ***R,*** que es el Invariante Vectorial y ***MR/o***, podemos afirmar que si ambos son iguales a cero el sistema está en equilibrio, y que si sólo la resultante es nula, el sistema se reduce a una cupla. A su vez, si el vector momento es nulo siendo distinta de cero la fuerza resultante es evidente que el sistema se reduce a una fuerza.

Si ambos, en cambio son distintos de cero lo único que podemos afirmar es la no existencia de equilibrio, y el sistema tanto puede reducirse a una fuerza como a una fuerza y una cupla de vectores paralelos. Para determinar fehacientemente en que caso de reducción estamos es necesario determinar el ángulo que existe entre los vectores ***MR/o y R***.

El ángulo entre ambos vectores se calcula sabiendo que *el coseno del ángulo comprendido entre dos vectores es igual a la suma del producto de los cosenos directores correspondientes de uno y otro vector.*

Esto es que Cos ω = CRX. CMX + CRY. CMY + CRZ . CMZ

El valor del invariante escalar será igual al producto escalar **M1 = MR/o. cos ω**

Lógicamente los cosenos directores del vector *Invariante Escalar **M1*** serán los mismos que los de la Fuerza Resultante.

Si el invariante escalar resulta ser igual a cero, esto es si el ángulo ω entre la cupla y la fuerza resultantes es de 90 º, el producto de la reducción del sistema es una fuerza y no existe par actuando en un plano perpendicular a la misma. Si en cambio el invariante escalar no es nulo el sistema puede reducirse a un *Conjunto Torsor.*

De manera que las posibilidades de reducción para un sistema del caso general de fuerzas en el espacio quedan definidas por la nulidad o no de los llamados Invariantes; escalar y vectorial, lo que puede expresarse en el siguiente cuadro:

	Invariante Vectorial	Invariante Escalar	Caso
I	Nulo	Nulo	*Equilibrio*
II	Nulo	No nulo	*Cupla* Resultante
III	No nulo	Nulo	*Fuerza* Resultante
IV	No Nulo	No nulo	*Fuerza y Par* Resultante

REDUCCION DE UN SISTEMA DEL CASO GENERAL A DOS FUERZAS.

Ya se ha visto que caso en que una fuerza y un par no actúan en planos paralelos, la composición de ambos dará como resultado un sistema de fuerzas alabeadas. También se ha visto que si la fuerza y el par actúan sobre planos paralelos su composición implicará una traslación de la recta de acción de la fuerza. De manera que se puede afirmar que cualquier sistema de fuerzas puede reducirse a dos fuerzas, cuyas características serán:

Dos Fuerzas opuestas: de igual magnitud, colineales y sentido contrario, si el sistema está en equilibrio.

Dos fuerzas paralelas de igual magnitud y sentido contrario, **no colineales,** si la resultante del sistema es una cupla.

Dos fuerzas concurrentes a un punto propio o impropio (en este último caso que no conformen una cupla), para el caso en que la composición del sistema se reduzca a una fuerza resultante.

Dos fuerzas alabeadas, en el caso que el sistema de fuerzas pueda reducirse a un sistema fuerza- par resultante.

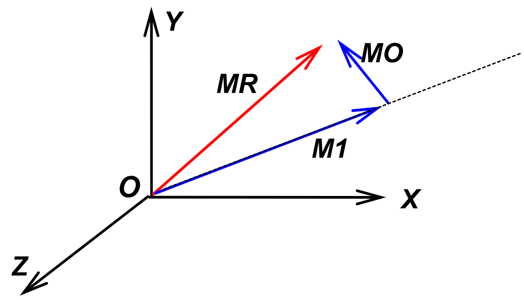
CALCULO DE LAS COMPONENTES DE MO.

Se ha visto que la magnitud de ***MO***, como la de ***M1***, es de obtención inmediata una vez conocido el ángulo entre los vectores ***MR*** y ***R.***

La dirección de ***M1*** es conocida e igual a la del vector ***R,*** por lo cual inmediatamente se pueden calcular sus componentes M1X, M1Y, M1Z que serán iguales a:

M1X = M1. CRX
M1Y = M1 . CRY
M1Z = M1 . CRZ

De la dirección de M0, lo único que sabemos deriva de su condición de componente rectangular de MR junto a M1, es decir que es perpendicular a este y que los tres son coplanares.
De todas maneras podemos calcular directamente las componentes de M0 partiendo de la relación vectorial ***M1 + M0 = MR.***



La proyección de esta suma geométrica sobre el eje X, por ejemplo, será :

M1X + M0X = MRX y despejando M0X = MRX - M1X

y análogamente M0Y = MRY - M1Y
M0Z = MRZ - M1Z

Con lo cual quedan determinadas las componentes de M0.

DETERMINACIÓN DEL EJE CENTRAL O EJE DE TORSIÓN

En algunos casos puede resultar de interés la determinación del Eje de Torsión, es decir el lugar geométrico de la recta de acción de la Fuerza Resultante que contiene a los centros de reducción para los cuales el sistema se reduce a un Conjunto Torsor. (La dirección del vector Momento Resultante coincide con el de la Fuerza Resultante).

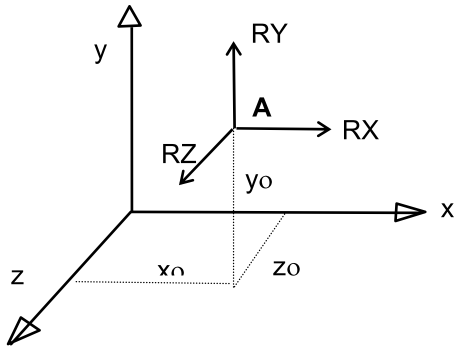
Para determinar la ubicación del eje de torsión se puede hacer la siguiente consideración:
Tenemos determinada por un lado la fuerza resultante ***R***, o *invariante vectorial*, y por el otro el momento resultante ***MR***/o al se lo puede descomponer rectangularmente en dos pares de distinta naturaleza: una es el llamado *invariante escalar*, que es un momento que no depende ni del centro de reducción ni de la resultante y que es producido por un par o cupla que actúa en un plano perpendicular a la dirección de la fuerza, la otra componente actúa en un plano paralelo al de la fuerza resultante y por propiedades de las cuplas podemos considerarlas coplanares.
De lo que se ha visto, una fuerza y un par que actúan sobre un mismo cuerpo en planos paralelos pueden componerse dando lugar a una única fuerza resultante que será igual a la fuerza dada pero trasladada paralela a sí misma hasta una línea de acción que contendrá los puntos geométricos para los cuales la suma de momentos estáticos de la fuerza y el par sean nulos, esa línea de acción es precisamente, el eje central. A la inversa si consideramos a la fuerza aplicada sobre el eje central y considerando ahora el centro de reducción como centro de momentos, el momento estático de la fuerza con respecto al mismo será de igual magnitud, dirección y sentido que el del par considerado inicialmente.
En resumen, si consideramos a la resultante ***R*** aplicada sobre un punto de paso cualquiera del eje central, su momento estático con respecto al centro de reducción será ***MO***

Supongamos que la fuerza resultante ***R*** está sobre un punto A cualquiera perteneciente al eje central Partiremos del hecho que ***MO = d x R,*** expresado como producto vectorial, donde ***d*** es el vector posición del punto A. El vector ***d*** tendrá sus componentes ortogonales que llamaremos x_o, y_o y z_o. Podemos descomponer entonces la expresión vectorial señalada en tres ecuaciones escalares lineales:

MOX = RZ . y_o - RY . z_o

MOY = RX . z_o - RZ . x_o

MOZ = RY . x_o - RX. y_o



Cada una de estas expresiones, dado que las componentes de ***R*** y de ***MO*** suponemos conocidas, son ecuaciones de rectas que no son sino las proyecciones del eje central sobre los distintos planos de referencia, ello dado que en las mismas las variables x_o, y_o, z_o determinan la ubicación de todos los puntos de paso de la Resultante que verifican la condición de que su momento estático con respecto al centro de reducción sea precisamente el momento *asociado* ***MO***

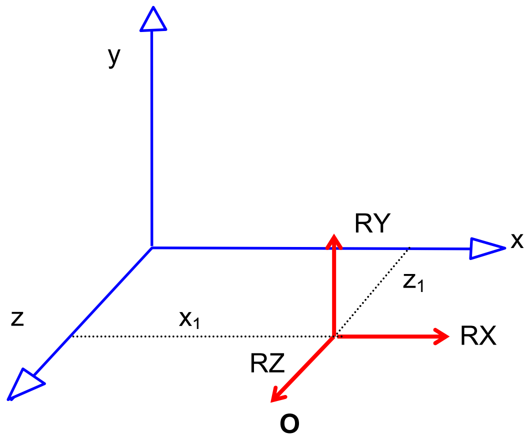
En forma cartesiana, una recta en el espacio queda definida por dos ecuaciones simultáneas de primer grado del tipo

$y = m x + b;$
$z = m_o x + b_o,$

Que vinculan linealmente a las tres variables y que representan las proyecciones de la recta espacial sobre los planos XY y XZ respectivamente. De manera que tomando dos ecuaciones cualquiera de las tres indicadas anteriormente, podríamos expresar en forma cartesiana la ecuación del eje central del sistema de fuerzas dado.

Si suponemos que trasladamos a la resultante a lo largo del eje central hasta la intersección de este con uno de los planos de proyección, por ejemplo el horizontal, como se indica en la figura, sabemos que su momento estático con respecto al centro de reducción O no se modificará.

(Llamaremos Z1 y X1 a las coordenadas del punto en que el eje central intercepta al plano horizontal)



De manera que MR / $_{OX}$, el momento de la fuerza resultante con respecto al eje X , deberá ser igual a la componente MOX del momento *asociado* ***MO***.

Como RY. Z1 = - MOX, entonces de inmediato surge que Z1 = - MOX / RY

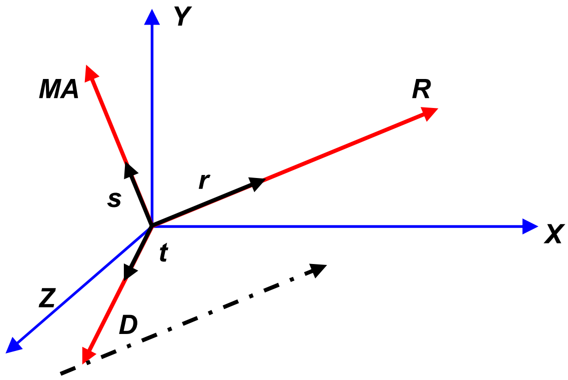
Análogamente puede obtenerse X1 = MOZ / RY

Del mismo modo se pueden obtener los puntos de intersección del eje central con los otros dos planos de proyección, es decir la **traza** del eje central sobre el plano horizontal XZ.

Se puede confeccionar un cuadro con las expresiones de la trazas del eje central sobre los tres planos de proyección

PLANO ZX	X1 = M0Z / RY Z1 = **-** M0X / RY
PLANO XY	X2 = **-** M0Y / RZ Y2 = M0X / RZ
PLANO YZ	Y3 = **-** M0Z / RX Z3 = M0Y / RX

DETERMINACION VECTORIAL



Veremos otra manera de determinar la ubicación del eje central: En la figura están representados los vectores ***R*** (Fuerza Resultante) y ***MA*** (Momento Asociado al centro de reducción). El vector ***D*** por su parte es el vector de posición del punto de menor distancia perteneciente al eje central, verificandose entonces la relación vectorial ***MA= D* X *R***

Como ***D*** es perpendicular a los otros dos vectores también se verifica que la magnitud de ***MA*** es MA = D. R .

Para definir el vector posición ***D*** sólo necesitamos definir su argumento, dado que su magnitud queda definida por el cociente D = MA / R.

Supongamos que hacemos coincidir con los vectores ***R* ,** ***MA*** y ***D*** un sistema de versores (vectores unitarios) ***r, s*** y ***t* ,** tal como se ve en la figura., de manera que cada uno de estos vendrá a ser el argumento correspondiente de cada uno de aquellos.

El versor ***r,*** que es el argumento de la Fuerza Resultante, tiene por componentes rectangulares a los cosenos directores de esta, y queda por lo tanto perfectamente especificado.

Por analogía con la relación ***i x j = k*** puede escribirse que también ***r x s = t.***

Para definir ***s*** plantearemos las siguientes relaciones:

MA = MR – M1

(El Momento Asociado es igual a la resta – geométrica- entre el momento resultante y el vector correspondiente al invariante escalar)

MR = MR. ***mr***

(Donde ***mr*** es el argumento del vector Momento Resultante)

M1 = MR. Cos ω ***r***

(El vector M1, Invariante Escalar, tiene como módulo a MR cosω y su dirección es la de la Fuerza Resultante)

Por lo tanto

MA ***s =*** MR ***mr*** – MR cosω ***r***

MA = MR senω → MR senω ***s*** = MR ***mr*** – MR cosω ***r*** → $\mathbf{s} = \dfrac{\mathbf{mr} - \cos\omega\, \mathbf{r}}{\operatorname{sen}\omega}$

$$\frac{\mathbf{mr} - \cos\omega\, \mathbf{r}}{\operatorname{sen}\omega}$$

Como ***t = r x s*** → ***t = r x***

$$\boldsymbol{t} = \frac{\boldsymbol{r \times mr}}{\text{sen}\omega}$$

r = i CRx + ***j*** CRy + ***k*** CRz y ***mr = i*** CMx + ***j*** CMy + ***k*** CMz

El producto vectorial resulta

t = 1 / senω [***i*** (CRy CMz – CRz CMy)+ ***j*** (CRz CMx – CMz CRx) + ***k*** (CRx CMy – CRy CMx)

De donde las componentes rectangulares de la directriz del vector ***D*** quedan definidas de la manera siguiente:

tx = (1/senω) (CRy CMz – CRz CMy)

ty =(1/senω) (CRz CMx – CRx CMz)

tx =(1/senω) (CRx CMy – CRy CMx)

Las componentes rectangulares de ***D***, el vector posición del punto de menor distancia perteneciente al eje centralñ queda definido por las expresiones :

Dx = (MR / R) (CRy CMz – CRz CMy)

Dy = (MR / R) (CRz CMx – CRx CMz)

Dz= (MR / R) (CRx CMy – CRy CMx)

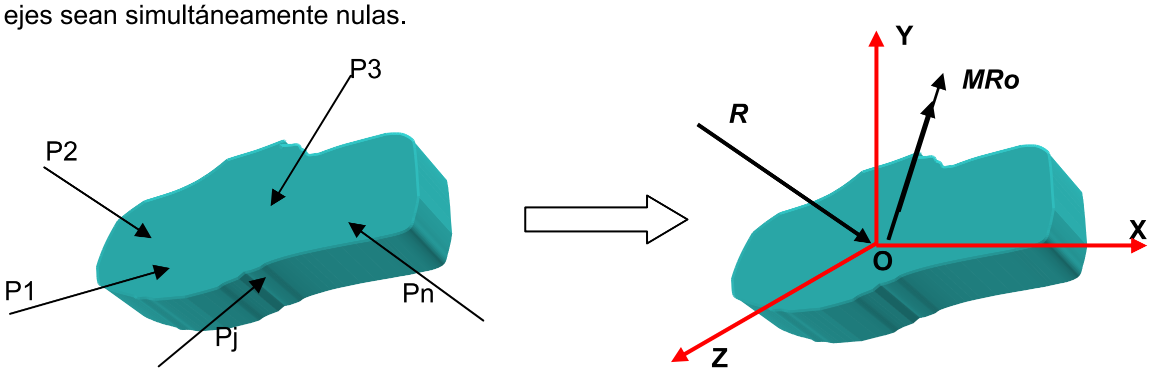
Esto se puede expresar de forma compacta con el determinante:

$$\mathbf{D} = \frac{MR}{R}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ CRX & CRY & CRZ \\ CMx & CMy & CMz \end{vmatrix}$$

ESTUDIO DEL EQUILIBRIO

Si bien en el estudio de la Mecánica de los Cuerpos Rígidos puede afirmarse que la problemática es infinita y por lo tanto no puede ser reducida al enunciado de una tipología esquemática que la abarque completamente, es posible sin embargo distinguir dos grandes cuestiones teniendo en cuenta el sistema externo de fuerzas: La de equivalencia o reducción y la cuestión del equilibrio.

El equilibrio de un sistema del caso general de fuerzas en el espacio implica que tanto ***R*** como ***MR***/o sean nulos. Esto se verificará cuando al tomar un centro de reducción cualquiera O haciéndolo coincidir con el origen de un sistema de coordenadas las tres ecuaciones escalares de proyección y las tres de momento con respecto a cada uno de los ejes sean simultáneamente nulas.



Las expresiones correspondientes a estas condiciones son las llamadas ***Ecuaciones Fundamentales de la Estática***, igualadas a cero.

$$\left.\begin{array}{l} Rx = \sum Fx = 0 \\ Ry = \sum Fy = 0 \\ Rz = \sum Fz = 0 \end{array}\right\} \quad \boldsymbol{R = 0}$$

$$\left.\begin{array}{l} MRx = \sum Mx/o = 0 \\ MRy = \sum My/o = 0 \\ MRz = \sum Mz/o = 0 \end{array}\right\} \quad \boldsymbol{MR/o = 0}$$

La hipótesis del equilibrio exige la nulidad simultánea de las seis ecuaciones, con lo cual podemos calcular hasta seis incógnitas.

CONDICIONES NECESARIAS Y SUFICIENTES PARA EL EQUILIBRIO.

Cabe aquí hacer una consideración **fundamental** para el estudio del equilibrio tanto de un cuerpo simple como de un sistema de cuerpos vinculados (lo que se verá en detalle en otro capítulo):

La condición de nulidad tanto de ***R*** como de ***MR*** es independiente del centro de reducción que se adopte, lo que quiere decir que si el sistema de fuerzas que tomamos está en equilibrio las componentes de ***R*** y ***MR*** deberán ser nulas para cualquier sistema de referencia que se adopte. Esto implica, en primer lugar, que la condición de nulidad de las componentes del momento resultante ***MR*** debe verificarse para cualquier eje o sistema de ejes que se adopte, independientemente de la posición u orientación ya sea del sistema de ejes como tal, o de cada eje por separado.

En segundo lugar, esta afirmación abre paso a la posibilidad de considerar distintas combinaciones para las condiciones de equilibrio, dado que la hipótesis del equilibrio permite que cualquiera de las seis condiciones de nulidad señaladas, basadas en un sistema de referencia con origen en un centro **O,** pueda substituirse por una ecuación de momentos con respecto a cualquier eje paralelo o no a los de referencia.

Esto implica que el equilibrio para un sistema de fuerzas general puede establecerse, además de la nulidad de las seis ecuaciones fundamentales, de estas otras siguientes maneras:

- Mediante seis condiciones de nulidad para momentos de seis ejes cualesquiera con tal que no exista un eje que los corte simultáneamente.
- Mediante cinco condiciones de nulidad de momentos respecto a cinco ejes y una condición de nulidad de proyección sobre un eje.
- Mediante cuatro condiciones de nulidad de momentos respecto a cuatro ejes y dos condiciones de nulidad de proyección sobre dos ejes.

CASOS PARTICULARES. POSIBILIDADES DE REDUCCIÓN, SUS EXPRESIONES ANALÍTICAS.

Condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio.

Las posibilidades de reducción y condiciones de equilibrio establecidas para el caso más general, así como sus expresiones analíticas correspondientes, adoptan formas específicas a los distintos casos particulares que se pueden presentar. Si bien es cierto que aquellas por su carácter general son aplicables a cualquier sistema independientemente de sus particularidades, el conocimiento de estas y sus implicancias tiene gran importancia, sobre todo desde el punto de vista práctico, para la resolución de este tipo de sistemas, por lo que procederemos a su análisis por separado.

CASO GENERAL DE FUERZAS EN EL PLANO.

Posibilidades de Reducción y Expresiones Analíticas.

Para este caso tenemos tres posibilidades de reducción: fuerza resultante, cupla resultante o equilibrio. Por ser un sistema plano no pueden coexistir los Invariantes Vectorial y Escalar (recordemos que actúan en planos perpendiculares) de manera que respecto del caso más general queda descartada la posibilidad de un *Conjunto Torsor*, que es incompatible con un sistema de fuerzas plano.

La ***R*** (Fuerza Resultante) queda definida por las expresiones escalares

$RX = \sum FX$

$RY = \sum FY$

A su vez ambos valores nos permitirán determinar tanto la magnitud de la resultante como su dirección respecto de los ejes coordenados.

En cuanto a ***MR***, tratándose de un sistema plano se trata de un vector *asociado* al centro de reducción y con dirección perpendicular al plano de acción del sistema de fuerzas, por lo que el conjunto de vectores representativos de los momentos estáticos de las fuerzas integrantes del sistema componen un sistema co*lineal o escalar:* ***MR*** tiene una sola componente y su determinación exige una única ecuación de sumatoria de momentos estáticos:

$MR = \sum MF\ i$ (Sumatoria de momentos con respecto al centro de reducción)

En el caso en que ambos, ***R*** y ***MR*** sean distintos de cero existe **fuerza resultante**. La resultante, aplicada sobre el centro de reducción, y el par representado por ***MR*** son un sistema fuerza par equivalente.

Si se necesita determinar el eje central o eje de fuerzas, en este caso, será suficiente determinar un punto en el cual la recta de acción de la fuerza corte a alguno de los ejes coordenados. Suponiendo que la resultante se encuentre sobre el eje de abcisas esa distancia será **X_0 = MR / RY**

Condiciones de Equilibrio.

Las condiciones para el equilibrio de un sistema de fuerzas perteneciente al llamado caso general de fuerzas en el plano, se pueden establecer de las siguientes maneras:

- Dos condiciones de proyección y una de momentos.
- Una condición de proyección y dos de momentos
- Tres condiciones de momentos

Para la situación 2 es necesario que los dos centros de momentos no estén alineados perpendicularmente al eje de proyección elegido. En tanto que para la tercera alternativa es condición suficiente que los tres centros no estén alineados.

FUERZAS CONCURRENTES.

a) SISTEMAS ESPACIALES

Posibilidades de Reducción. Expresiones Analíticas.

Un sistema de fuerzas concurrentes tiene sólo dos posibilidades de reducción, ya que al no ser posible la existencia de una cupla, quedan descartadas las alternativas de cupla resultante y de conjunto torsor, restando solo las de o fuerza resultante o de equilibrio.
Las correspondientes expresiones analíticas de las componentes de la resultante son
RX = ∑ FX i

RY = ∑ FY i

RZ = ∑ FZ i

La magnitud de la fuerza resultante queda determinada por la relación pitagórica

$$R = \sqrt{(R_X^2 + R_Y^2 + R_Z^2)}$$

Y su dirección respecto a los ejes de proyección se determinan por medio de los cosenos directores según lo ya visto.

Si el centro de reducción elegido no coincide con el punto de concurrencia, el tratamiento analítico de este sistema será idéntico al del caso general debiendo además determinarse el ***MR*** que en este caso será perpendicular a la dirección de la fuerza por lo que el *Invariante Escalar* será nulo.

Condiciones de Equilibrio

Las condiciones analíticas necesarias y suficientes para que un sistema de fuerzas concurrentes en el espacio esté en equilibrio pueden ser:

- Que las sumas de las proyecciones de las fuerzas sobre cada uno de los ejes cartesianos sean simultáneamente nulas.

- Que la suma sobre dos de los ejes de proyección sean nulas y que el momento con respecto a un tercer eje sea también nulo. Este último eje no debe ser perpendicular al plano formado por los anteriores ni pasar por el punto de concurrencia.

- Que la suma sobre un eje de proyección sea nulo y simultáneamente sean nulos los momentos con respecto a otros dos ejes, que no deberán pasar por el punto de concurrencia ni formar un plano con el primero.

- Que la suma de momentos con respecto a tres ejes sea nula, tal que ninguno pase por el punto de concurrencia ni exista un punto de concurrencia simultáneo para ellos.

b) SISTEMAS PLANOS

Posibilidades de Reducción.

Al igual que para el caso anterior las posibilidades de reducción son o fuerza resultante o equilibrio.

El procedimiento para determinar la magnitud y dirección de la fuerza resultante es similar al caso anterior salvo en el hecho de trabajar con sólo dos dimensiones.

Condiciones de Equilibrio

Para el caso de un sistema plano de fuerzas concurrentes las condiciones analíticas necesarias y suficientes para la existencia del equilibrio presentan las siguientes alternativas:

- Dos condiciones de nulidad de proyecciones con respecto a dos ejes no paralelos.
- Una condición de nulidad de proyección con respecto a un eje y otra de momentos con respecto a un punto que al alinearse con el de concurrencia no forme una perpendicular al eje de proyección mencionado.
- Dos condiciones de nulidad de momentos con respecto a puntos no alineados con el de concurrencia.

SISTEMAS DE FUERZAS PARALELAS

En el Espacio

El hecho de que todas las fuerzas tengan una misma dirección nos permite determinar la magnitud y sentido de la fuerza resultante mediante una única ecuación de proyección sobre un eje paralelo a la dirección de las fuerzas. De las tres expresiones de momento tenemos que eliminar la correspondiente a dicho eje. De manera que suponiendo que la dirección del sistema de fuerzas paralelo coincide con el eje Y, las expresiones analíticas que definen el sistema de fuerzas son las siguientes:

$R = \sum FY$
$MRX = \sum MF_{XX}$
$MRZ = \sum MF_{ZZ}$
Y donde $MR = \sqrt{(MRX^2 + MRZ^2)}$

Las posibilidades de reducción son las siguientes:

Si R es igual a cero siendo no nulo el valor de MR, el sistema se reduce a una cupla resultante cuyo plano de acción quedara definido por la dirección de su vector representativo.

Si ambos son no nulos, el sistema se reduce a una fuerza resultante cuya recta de acción queda definida por las dos expresiones de momentos. Suponiendo que las coordenadas del punto en que la recta de acción intercepta al plano XZ son X0 y Z0, las mismas quedan definidas por

$X0 = MRZ / R$
$Z0 = MRX / R$

Evidentemente en caso que la resultante pase por el origen de coordenadas, el MR será nulo.

Sobra decir que en caso de la nulidad de R y MR estaremos en presencia de la situación de equilibrio.

Condiciones De Equilibrio

Las condiciones para el equilibrio de un sistema de fuerzas paralelas en el espacio pueden ser las siguientes.

- Condición de nulidad de proyección con respecto a un eje (no perpendicular a la dirección de las fuerzas) y dos condiciones de nulidad de momentos respecto a dos ejes no paralelos a aquella dirección.
- Tres condiciones de nulidad de momentos con respecto a tres ejes que además de no ser paralelos a la dirección de las fuerzas no puedan ser cortados por un eje de esa dirección. (Para esto las proyecciones de los tres ejes sobre un plano perpendicular a la dirección de las fuerzas no deben concurrir a ningún punto común.)

Fuerzas Paralelas En El Plano

Este caso constituye una particularidad del anterior que prácticamente no arroja ninguna diferencia de interés.

El sistema puede estar en equilibrio, o puede reducirse o a una fuerza o a un par, del mismo modo que en el caso anterior. Las expresiones analíticas son similares pero naturalmente reducidas a las dos dimensiones que definen el plano.

También las condiciones de equilibrio surgen directamente de la aplicación de los conceptos vistos para el caso anterior aplicados a sistemas de dos dimensiones.

BIBLIOGRAFIA:

- Mecánica Técnica I – Timoshenko – Young.- Edit. Hachette S.A..- Bs. As. 1970.
- Estabilidad (primer curso) – Enrique D. Fliess.- Edit. Kapelusz. Bs. As. 1970.
- Estática - J.L. Merian. – Edit. Reverté S.A. Bs.As. 1976
- Mecánica Vectorial para Ingenieros – Ferdinand P. Beer – E. Russel Johnston. Edit. McGraw Hill.- Mexico. 1996.
- Mecánica Estructural I.- Ing. Piscitelli, Genaro Rafael (Universidad Nacional de Tucumán)