

## 2

SOLICITACION NORMAL  
Y CORTE PURO

## 2.1 SOLICITACION NORMAL

## 2.1.1 Tracción y compresión, tensiones y deformaciones

El problema que vamos a estudiar a continuación se refiere a las piezas que están sometidas exclusivamente a esfuerzos internos normales, de tracción o compresión.

Si trazamos sobre la superficie de una barra prismática una red de líneas rectas, unas paralelas y otras perpendiculares al eje de la barra, y sometemos a la misma a una fuerza de tracción, observaremos que después de la deformación las rectas de la red permanecen ortogonales entre sí en toda la superficie, excepto en una zona pequeña próxima al punto de aplicación de la fuerza y de la que ahora prescindiremos, mientras que las distancias entre las rectas varían. Las rectas horizontales se desplazan hacia abajo, permaneciendo rectas y horizontales. Es de suponer que en el interior de la barra tiene lugar el mismo fenómeno, lo cual permite enunciar una hipótesis:

“Las secciones transversales de la barra, que eran planas y perpendiculares a su eje antes de la deformación, permanecen planas y normales a éste después de ocurrir la deformación”.

Esta hipótesis, que tiene suma importancia, se conoce como “hipótesis de las secciones planas o hipótesis de Bernoulli – Navier”, y los ensayos confirman las fórmulas que se basan en la misma.

Lo expuesto sobre las deformaciones nos permite suponer que en las secciones transversales de las barras actúan solamente tensiones normales, distribuidas uniformemente. Por razones de equilibrio debe entonces ocurrir:

$$P = \int_{\Omega} \sigma \, d\Omega = \sigma \int_{\Omega} d\Omega = \sigma * \Omega \rightarrow \sigma = \frac{P}{\Omega} \quad (2.1)$$

Los ensayos también demuestran que al estirar la barra, su longitud aumenta, mientras que sus dimensiones transversales disminuyen. Cuando se trata de compresión, el fenómeno se invierte. Si consideramos que el material tiene un comportamiento elástico lineal podemos calcular analíticamente el valor de  $\delta$ .

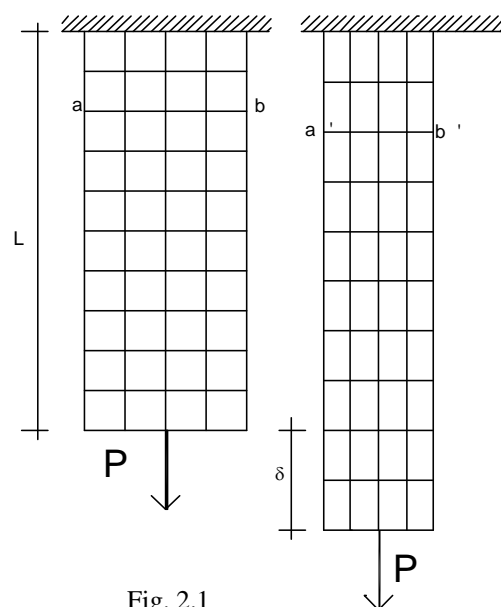


Fig. 2.1

$$\delta = \varepsilon * L \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$\delta = \frac{\sigma * L}{E} = \frac{P * L}{\Omega * E}$$

$$\delta = \frac{P * L}{\Omega * E}$$

Puede verse que el desplazamiento  $\delta$  es directamente proporcional a la carga  $P$  aplicada y a la longitud inicial  $L$  de la barra. Así mismo,  $\delta$  resulta inversamente proporcional al producto  $\Omega * E$ , el cual se denomina “Rigidez Axial”. Efectivamente, este producto representa la oposición de la pieza a la deformación, para lo cual ésta emplea sus propiedades geométricas y mecánicas.

Recordemos que no solo existe una deformación longitudinal sino que las dimensiones transversales también varían, obteniéndose una deformación  $\varepsilon'$ .

$$\varepsilon' = -\mu \cdot \varepsilon \quad (2.3)$$

La suposición anterior sobre la distribución uniforme de las tensiones internas en la sección transversal es válida siempre y cuando no se analicen las zonas próximas a la aplicación de la carga. Aquí se obra de acuerdo al principio de Saint- Venant ya enunciado, el que para el caso concreto de barras establece que la zona de perturbación influye en distancias no superiores a las dimensiones de la sección transversal.

Es de hacer notar, también, que las fórmulas anteriores son válidas cualquiera sea el signo de  $\sigma$ , es decir, tanto para solicitaciones de tracción como de compresión. Sin embargo, para estas últimas tiene sus limitaciones. En efectos, en los cuerpos sujetos a compresión la fórmula 2.1 pierde validez cuando la esbeltez de la pieza supera ciertos valores, a partir de los cuales se presenta un fenómeno denominado “pandeo”, cuyo estudio lo realizaremos en el capítulo 10.

Conociendo la relación existente entre  $P$  y  $\delta$  podemos obtener las siguientes expresiones para la energía de deformación:

$$U = \frac{1}{2} P \delta = \frac{1}{2} \frac{\Omega E}{L} \delta^2 = \frac{1}{2} \frac{L}{\Omega E} P^2 \quad (2.4)$$

### 2.1.2 Aplicaciones

En los problemas de dimensionamiento deberán cumplirse dos condiciones básicas, las cuales surgen de despejar el área de la sección transversal, de las fórmulas anteriormente vistas.

$$\Omega \geq \begin{cases} \frac{P}{\sigma_{adm}} \\ \frac{P L}{E \delta_{adm}} \end{cases} \quad (2.5)$$

En los problemas de verificación deberán cumplirse, también, dos condiciones.

$$\frac{P}{\Omega} \leq \sigma_{adm} \quad \frac{P L}{\Omega E} \leq \delta_{adm} \quad (2.6)$$

A continuación vamos a desarrollar un ejemplo, para el cual se desea dimensionar las barras del reticulado de la figura 2.2

Para las barras 1 y 2 debe emplearse madera con:

$$\sigma_{adm} = 80 \text{ kg/cm}^2$$

$$\delta_{adm} = L/300$$

$$E = 100 \text{ t/cm}^2$$

Para la barra 3 debe emplearse acero con:

$$\sigma_{adm} = 2.400 \text{ kg/cm}^2$$

$$\delta_{adm} = L/500$$

$$E = 2.100 \text{ kg/cm}^2$$

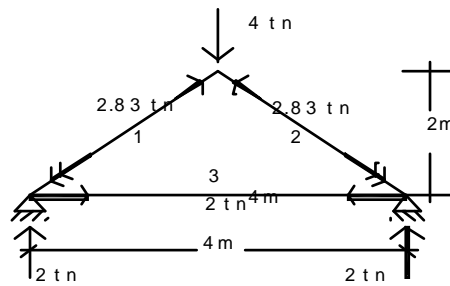


Fig. 2.2

- Barras 1-2

$$P = 2.83 \text{ tn}$$

$$\Omega_{nec} \geq \frac{P}{\sigma_{adm}} = \frac{2.83}{80} = 35.4 \text{ cm}^2$$

Adoptamos una escuadría de 3" x 2", siendo 1" = 2,54 cm  $\rightarrow \Omega = 38.7 \text{ cm}^2 > \Omega_{nec}$

$$\frac{PL}{\Omega E} \leq \delta_{adm} \rightarrow \frac{2.83 * 283}{38.7 * 100} = 0.2 \text{ cm} < \frac{283}{300} = 0.94 \text{ cm} \rightarrow \text{B.C.}$$

$$\sigma_{trab} = \frac{P}{\Omega} = \frac{2830}{38.7} = 73 \text{ kg/cm}^2$$

- Barra 3

$$P = 2 \text{ tn}$$

$$\Omega_{nec} \geq \frac{P}{\sigma_{adm}} = \frac{2000}{2400} = 0.83 \text{ cm}^2 \rightarrow \text{Adoptamos } 1\phi 12$$

$$\Omega = 1.13 \text{ cm}^2 > \Omega_{nec}$$

$$\frac{PL}{\Omega E} = \frac{2 * 400}{1.13 * 2100} = 0.34 \text{ cm} < \frac{400}{500} = 0.8 \text{ cm} \rightarrow \text{B.C.}$$

$$\sigma_{trab} = \frac{P}{\Omega} = \frac{2000}{1.13} = 1770 \text{ kg/cm}^2$$

En general, cuando existen varias condiciones de dimensionamiento se emplea una de ellas y se verifican las demás. Si alguna de éstas no es satisfecha se procede a redimensionar.

Cuando se emplean las fórmulas 2.5, por razones de economía se trata de que se cumplan las igualdades, lo que no siempre es posible ya que debemos adoptar piezas cuyas secciones transversales existan comercialmente.

Si en el ejemplo anterior quisiésemos saber el valor del descenso de la estructura en el punto de aplicación de la carga exterior de 4 tn, podríamos calcularlos mediante consideraciones energéticas. En efecto, el trabajo que realiza esa fuerza se convierte en energía de deformación, la cual será igual a la suma de la energía absorbida por cada barra.

$$\frac{1}{2} P \delta = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} \frac{L_i}{\Omega_i E_i} P_i^2$$

$$\frac{1}{2} 4 \delta = \left( \frac{1}{2} * \frac{283}{38.7 * 100} * 2.83^2 \right) * 2 + \frac{1}{2} * \frac{400}{1.13 * 2.100} * 2^2$$

$$\delta = 0.46 \text{ cm}$$

Aunque el cálculo anterior parezca muy simple debemos señalar que pudo realizarse merced a que tenemos una sola carga exterior y además calculamos el corrimiento correspondiente a su punto de aplicación. Para casos mas generales deben aplicarse otros criterios de cálculo, los que no son tratados en este curso.

### 2.1.3 Influencia del peso propio en la solicitación axial

En el estudio que realizamos en el primer ítem de este capítulo solo hemos tenido en cuenta las cargas exteriores, sin considerar el efecto que pudiera tener el peso propio de la estructura. Esto esta permitido cuando esta influencia es despreciable en relación a las tensiones originadas por las cargas exteriores.

A continuación estudiaremos el caso de barra de sección constante sometida a una carga exterior y a su propio peso.

$$N_{(x)} = P + \gamma * \Omega * x \quad (2.7)$$

$\gamma$  = peso específico del material

$$\sigma_{(x)} = \frac{N_{(x)}}{\Omega} = \frac{P}{\Omega} + \gamma x$$

$$\text{llamando } \sigma_o = \frac{P}{\Omega}$$

$$\sigma_{(x)} = \sigma_o + \gamma x$$

$$\sigma_{\max(x=L)} = \sigma_o + \gamma L \leq \sigma_{\text{adm}}$$

$$\sigma_o \leq \sigma_{\text{adm}} - \gamma L$$

$$\Omega = \frac{P}{\sigma_{\text{adm}} - \gamma L}$$

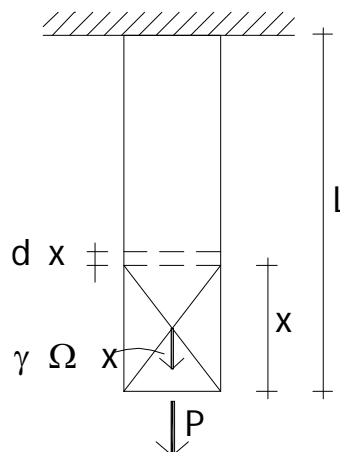


Fig. 2.3

Esta última expresión nos permite establecer el límite de utilización de la barra de sección constante. En efecto, cuando  $\sigma_{adm} = \gamma * L$ , el denominador se anula y  $\Omega$  adquiere un valor infinito. La longitud límite resulta ser:

$$L_{max} \leq \frac{\sigma_{adm}}{\gamma} \quad (2.9)$$

A partir de esta longitud es necesario recurrir a las barras de sección variable. Por otra parte, cuando las dimensiones de las barras son grandes y la influencia del peso propio es considerable, el proyectar la barra con sección constante es antieconómico.

A continuación vamos a calcular el desplazamiento máximo producido cuando además de una carga exterior actúa el peso propio.

Si a la distancia  $x$  del borde inferior de la figura 2.3 consideramos un elemento de longitud  $dx$ , el mismo tendrá aplicada una carga que viene dada por la ecuación 2.7, la cual le producirá un alargamiento  $\Delta x$ .

$$\Delta_x = \varepsilon dx = \frac{\sigma}{E} dx = \frac{N(x)}{\Omega E} dx = \left[ \frac{P}{\Omega E} + \frac{\gamma}{E} x \right] dx$$

$$\delta = \int_0^L \Delta_x = \int_0^L \left[ \frac{P}{\Omega E} + \frac{\gamma}{E} x \right] dx = \frac{PL}{\Omega E} + \frac{\gamma L^2}{2E} \quad (2.10)$$

$$\delta = \frac{PL}{\Omega E} + \frac{\gamma \Omega L}{2\Omega E} L \quad \gamma \Omega L = W \text{ (peso total de la barra)}$$

$$\delta = \frac{PL}{\Omega E} + \frac{1}{2} \frac{WL}{\Omega E}$$

De la última expresión se puede deducir que el alargamiento total resulta ser igual a la suma de dos términos, uno de ellos corresponde al alargamiento producido por la carga exterior y el otro corresponde a alargamiento debido el peso propio. Este último puede ser definido como el alargamiento de una barra ideal con su peso concentrado en la mitad de su longitud.

En lo que sigue vamos a ver la forma geométrica que tendría que tener una barra sometida a carga exterior en su extremo y a su propio peso, para que fuese un sólido de igual resistencia, es decir, que la tensión fuese constante en todas las secciones.

Supongamos que aislamos un elemento diferencial de longitud  $dx$ :

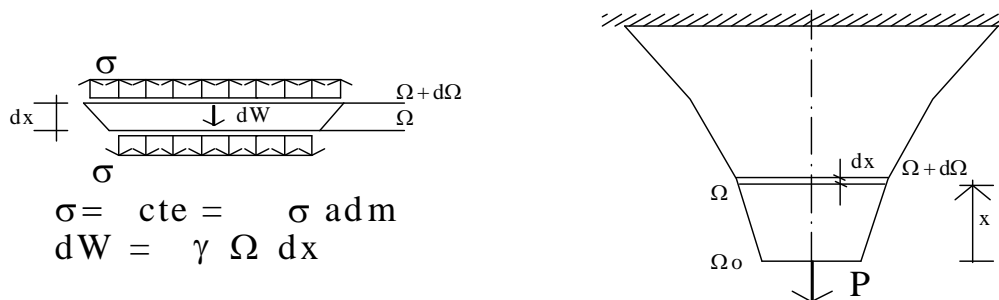


Fig.2.4

$$\sigma(\Omega + d\Omega) - \sigma \Omega - dW = 0 \leftarrow \text{por equilibrio}$$

$$\sigma d\Omega - \gamma \Omega dx = 0$$

$$\frac{d\Omega}{\Omega} = \frac{\gamma}{\sigma} dx \quad \text{integrado} \rightarrow \ln \Omega = \frac{\gamma}{\sigma} x + c \quad (2.11)$$

$$\Omega(x) = e^{\left(\frac{\gamma}{\sigma}x + c\right)} = e^c e^{\left(\frac{\gamma}{\sigma}x\right)}$$

$$\text{para } x = 0 \rightarrow \Omega_{(0)} = e^c = \frac{P}{\sigma_{adm}}$$

$$\Omega_{(x)} = \frac{P}{\sigma_{adm}} e^{\left(\frac{\gamma}{\sigma_{adm}}x\right)}$$

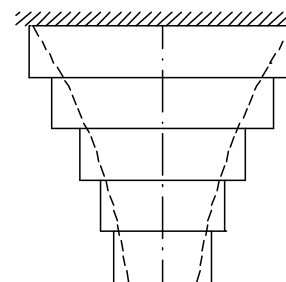


Fig. 2.5

En la práctica, la ley exponencial de la ecuación última puede aproximarse como se indica el al figura 2.5.

### 2.1.4 Deformaciones térmicas

Los cambios de temperatura producen deformación en los materiales. En el caso de materiales homogéneos e isotrópicos, un cambio de  $\Delta T$  grados origina una deformación lineal uniforme en todas las direcciones.

Las deformaciones térmicas lineales se calculan mediante:

$$\Delta l = \alpha \cdot l \cdot \Delta T$$

donde  $\alpha$  es el coeficiente de dilatación térmica lineal

Material	$\alpha (x 10^{-6}/^{\circ}C)$
Aluminio	23.2
Fundición	10.4
Cobre	16.7
Acero	11.7
Hormigón	10.8

### 2.1.5 Problemas hiperestáticos en tracción y compresión

Como ya sabemos, un sistema resulta hiperestático cuando la cantidad de grados de libertad (g) del mismo resulta menor que la cantidad de restricciones de vínculo (r) impuestas; las que, por otro lado, no configuran ningún caso crítico.

$$g < r \quad \neq \text{ caso crítico}$$

La definición anterior nos permite dar un concepto de los sistemas hiperestáticos a través de consideraciones cinemáticas. Desde el punto de vista estático, la condición de hiperestaticidad viene dada por el hecho de que la cantidad de ecuaciones (E) que surgen de los planteos de equilibrio de la Estática es menor que la cantidad de incógnitas reactivas planteadas (I).

$$E < I$$

Para poder resolver estas estructuras es necesario agregar a las ecuaciones mencionadas, (I - E) ecuaciones de compatibilidad. Estas reciben este nombre precisamente porque tratan de expresar la compatibilidad entre las deformaciones y la vinculación existente, que como hemos dicho, resulta superabundante.

A continuación vamos a tratar algunos ejemplos simples donde solamente se involucran deformaciones por esfuerzos normales.

a) Ejemplo 1

En este caso deseamos calcular las solicitaciones en las barras 1 y 2 de la figura 2.6. A la barra horizontal la suponemos perfectamente rígida.

Si planteamos las ecuaciones de equilibrio de la barra rígida tendremos:

$$\sum x = 0 \rightarrow H_A = 0$$

$$\sum y = 0 \rightarrow R_1 + R_2 + V_A - P = 0$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow R_1 a_1 + R_2 a_2 - Pa = 0$$

De estas tres ecuaciones podemos observar que la primera se cumplen con la nulidad del esfuerzo horizontal  $H_A$ , lo cual es obvio, y que las dos ecuaciones restantes no son suficientes para determinar las tres incógnitas faltantes.

Para poder calcularlas necesitamos una ecuación adicional, la cual puede obtenerse si imaginamos la forma en que se deformará el sistema. En efecto, teniendo en cuenta que la barra inferior es rígida podemos establecer:

$$\frac{\delta_c}{a_2} = \frac{\delta_B}{a_1} \quad \delta_B = \frac{R_1 l_1}{\Omega_1 E_1} \quad \delta_C = \frac{R_2 l_2}{\Omega_2 E_2}$$

$$\frac{R_1 l_1}{a_1 \Omega_1 E_1} = \frac{R_2 l_2}{a_2 \Omega_2 E_2}$$

Luego, resolviendo el siguiente sistema, pueden obtenerse las tres incógnitas restantes.

$$R_1 + R_2 + V_A - P = 0$$

$$R_1 a_1 + R_2 a_2 - Pa = 0$$

$$\frac{R_1 l_1}{\Omega_1 E_1 a_1} = \frac{R_2 l_2}{\Omega_2 E_2 a_2}$$

Para determinar los corrimientos en los puntos B y C, hemos supuesto que las barras 1 y 2 se encuentran en el período elástico en el que tiene validez la ley de Hooke. Luego de calculadas las in-

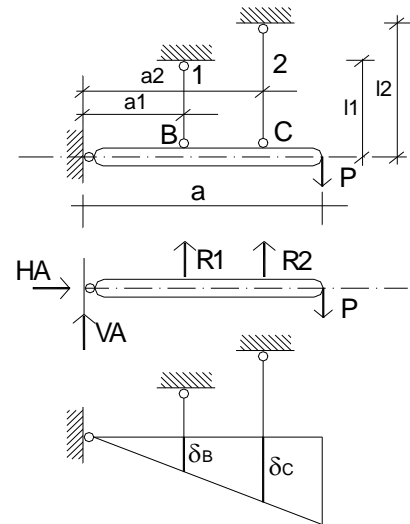


Fig. 2.6

cógnitas deberá verificarse si esto es cierto, en caso contrario deberá tenerse en cuenta la expresión que verdaderamente corresponda para los corrimientos.

Una observación importante a tener presente es que para poder plantear numéricamente la ecuación de compatibilidad, las barras tendrán que estar predimensionadas. Esta es una característica sumamente importante de las estructuras hiperestáticas, donde las solicitaciones dependen de sus características mecánicas y geométricas. Por esta razón el proceso de dimensionamiento suele ser iterativo.

b) Ejemplo 2

Deseamos determinar las relaciones de vínculo de la estructura del esquema de la figura 2.7.

Para resolver este problema en primera instancia vamos a considerar que el vínculo superior no existe.

$$R_A^0 = P_1 + P_2$$

Como el extremo B se encuentra libre, en correspondencia con el mismo existirá un corrimiento:

$$\delta_B^0 = \frac{P_1(b+c) + P_2c}{\Omega E}$$

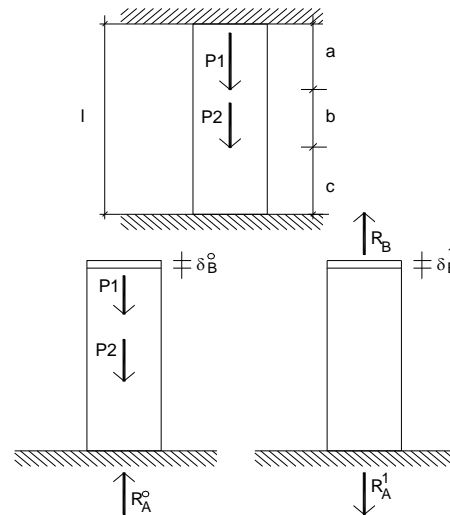


Fig. 2.7

Dado que en la realidad en B tenemos un empotramiento, el desplazamiento en dicho lugar deberá ser nulo. Para producir esto es que el vínculo genera una reacción  $R_B$  de manera tal de anular el desplazamiento total.

$$\delta_B = \delta_B^0 - \delta_B^1 = 0 \rightarrow \delta_B^1 = \delta_B^0$$

$$\delta_B^1 = \frac{R_B l}{\Omega E} \rightarrow R_B = \frac{P_1(b+c) + P_2c}{l}$$

$$R_A = R_A^0 - R_A^1$$

$$R_B = R_A^1 \rightarrow R_A = P_1 + P_2 - \frac{P_1(b+c) + P_2c}{l}$$

c) Ejemplo 3

Queremos calcular las tensiones producidas en las barras 1 y 2 cuando existe un incremento de temperatura  $\Delta t$ .

En primera instancia supongamos que hemos eliminado el vínculo en B, con lo que a raíz del incremento de la temperatura el punto B tiene un desplazamiento:

$$\Delta l = a \alpha_1 \Delta t + b \alpha_2 \Delta t$$

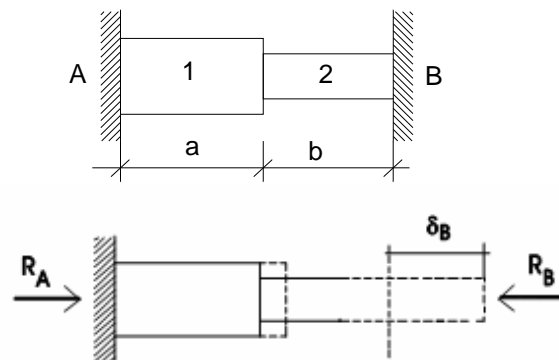


Fig. 2.9



Sin el vínculo en B la estructura resulta isostática, lo que significa que la dilatación térmica no genera solicitaciones. Ahora bien, debido a que el punto B no puede desplazarse, aparece una fuerza reactiva que tiende a anular el desplazamiento.

$$\delta_B = \Delta l \quad \delta_B = \frac{R_B b}{\Omega_2 E_2} + \frac{R_B a}{\Omega_1 E_1} \rightarrow R_B = \frac{\Delta l}{\left( \frac{b}{\Omega_2 E_2} + \frac{a}{\Omega_1 E_1} \right)}$$

$$R_A = R_B = R \quad (\text{por razones de equilibrio})$$

$$\sigma_1 = \frac{R}{\Omega_1} \quad ; \quad \sigma_2 = \frac{R}{\Omega_2}$$

d) Ejemplo 4

Deseamos determinar las tensiones originadas en la columna del esquema de la figura 2.10. La misma está formada por dos materiales distintos, y la placa superior es infinitamente rígida. Planteando las ecuaciones de equilibrio tendremos:

$$P_1 + P_2 = P$$

Dónde  $P_1$  y  $P_2$  son las fuerzas que deben absorber el material 1 y 2 respectivamente. Como la placa superior es infinitamente rígida, el desplazamiento será igual para ambos materiales.

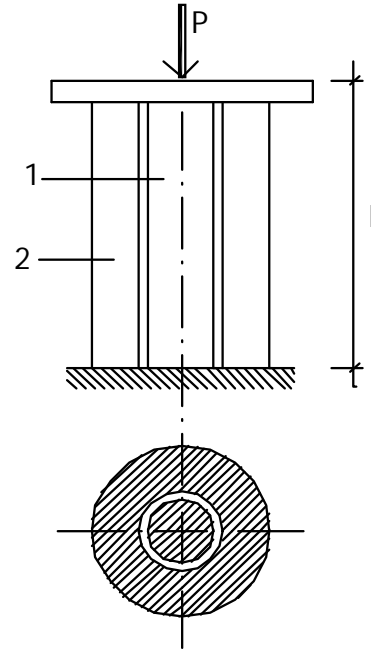


Fig. 2.10

$$\delta_1 = \delta_2 \rightarrow \frac{P_1 l}{\Omega_1 E_1} = \frac{P_2 l}{\Omega_2 E_2} \rightarrow P_2 = \frac{E_2 \Omega_2}{E_1 \Omega_1} P_1$$

$$\text{llamando } \eta = \frac{E_2}{E_1} \quad \text{y} \quad \varphi = \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \quad (\text{cuantía geométrica})$$

$$P_2 = \eta \cdot \varphi \cdot P_1 \rightarrow P_1 = \frac{P}{(1 + \eta \varphi)}$$

$$P_2 = \frac{\eta \varphi P}{(1 + \eta \varphi)}$$

$$\sigma_1 = \frac{P_1}{\Omega_1} = \frac{P}{(1 + \eta \varphi) \Omega_1}$$

$$\sigma_2 = \frac{P_2}{\Omega_2} = \frac{\eta \varphi P}{(1 + \eta \varphi) \Omega_2} = \frac{\eta P}{(1 + \eta \varphi) \Omega_1} = \eta \sigma_1$$

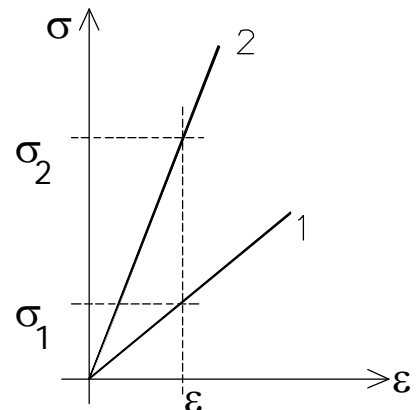


Fig. 2.11

## 2.2 ENVOLVENTES CILÍNDRICAS DE PEQUEÑO ESPESOR

Consideremos un tubo de longitud indefinida de radio interior  $r$ , de espesor de pared  $e$  (pequeño en relación con  $r$ ), y sometido a una diferencia de presión,  $p$ , entre el interior y el exterior.

$$\frac{r}{e} \geq 10 \quad (2.12)$$

En un punto cualquiera del espesor de la pared se originan dos tensiones normales, una radial  $\sigma_r$  y otra circunferencial  $\sigma_c$ . Ambas tensiones varían a lo largo del espesor  $e$  de la pared según leyes determinadas.

La tensión  $\sigma_c$  varía entre el borde interno de la pared y el externo, pero por ser el espesor  $e$  muy pequeño en relación al radio, esta variación no es muy importante, pudiéndose admitir una distribución uniforme. La tensión  $\sigma_r$  alcanza en el borde interno el valor de  $p_i$ , y de  $p_e$  en el borde exterior; y siendo que  $\sigma_c$  resulta mucho más grande que  $p$ , las tensiones  $\sigma_r$  pueden ser despreciadas sin cometer mayor error.

Para deducir el valor que adquiere  $\sigma_c$  consideremos el equilibrio de una faja de envoltorio de largo unitario y que desarrolla un arco  $ds$ .

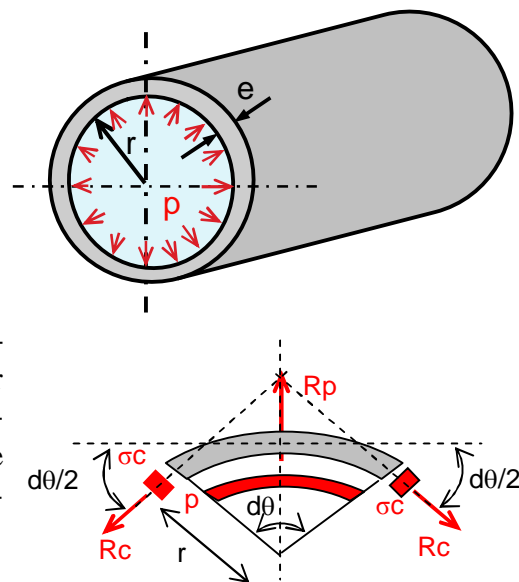


Fig. 2.12

$$ds = r d\theta$$

$$\sum x = 0 \rightarrow Rc \cos \frac{d\theta}{2} - Rc \cos \frac{d\theta}{2} = 0$$

$$\sum y = 0 \rightarrow 2 Rc \sin \frac{d\theta}{2} - Rp = 0 \quad (2.13)$$

$$\sin \frac{d\theta}{2} \cong \frac{d\theta}{2} \quad Rc = \sigma_c e \quad Rp = p ds = p r d\theta$$

$$2 \sigma_c e \frac{d\theta}{2} - p r d\theta = 0 \rightarrow \sigma_c = \frac{p r}{e}$$

De acuerdo con la ley de Hooke, la deformación específica circunferencial será:

$$\varepsilon_c = \frac{\sigma_c}{E} = \frac{p r}{E e} \quad (2.14)$$

El aumento de longitud del desarrollo de la sección del conducto será:

$$\Delta s = 2\pi r \varepsilon_c$$

A este aumento de longitud de circunferencia corresponde un aumento del radio:

$$\Delta r = \frac{\Delta s}{2\pi} = r \varepsilon_c$$

Con lo que la correspondiente deformación específica radial será:

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta r}{r} = r \frac{\varepsilon_c}{r} = \varepsilon_c \rightarrow \varepsilon_r = \varepsilon_c \quad (2.15)$$

Si el cilindro se encuentra cerrado en sus extremos, las expresiones anteriores serán válidas para secciones alejadas de los extremos, de acuerdo con el principio de Saint-Venant. La existencia de cierres extremos origina además tensiones longitudinales  $\sigma_L$ , uniformemente distribuida sobre el área de la sección transversal del conducto.

La fuerza resultante sobre los extremos es:

$$R = p \pi r^2$$

El área de la sección transversal del conducto puede tomarse aproximadamente como:

$$\Omega = 2 \pi r e$$

$$\text{Luego: } \sigma_L = \frac{p \pi r^2}{2 \pi r e} = \frac{p r}{2 e} = \frac{\sigma_c}{2} \quad (2.16)$$

Como consecuencia de la tracción longitudinal, el radio sufre una contracción debido al coeficiente de Poisson:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_c - \mu \varepsilon_L$$

$$\varepsilon_L = \frac{\varepsilon_c}{2}$$

$$\varepsilon_r = \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \varepsilon_c \quad (2.17)$$

Recientemente hemos estudiado el problema relativo a tubo de paredes delgadas para lo cual hemos hecho algunas hipótesis simplificadoras. Cuando el espesor de los tubos aumentan ya no es posible ignorar las tensiones radiales  $\sigma_r$ , y además es necesario considerar la verdadera ley de variación para las tensiones circunferenciales  $\sigma_c$ . El estudio de los tubos de paredes gruesas puede encararse a través de los desarrollos realizados por Lamé, y puede consultarse la bibliografía que se cita al final del último capítulo.

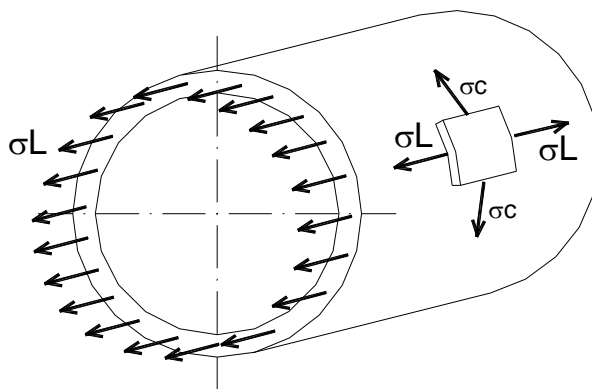
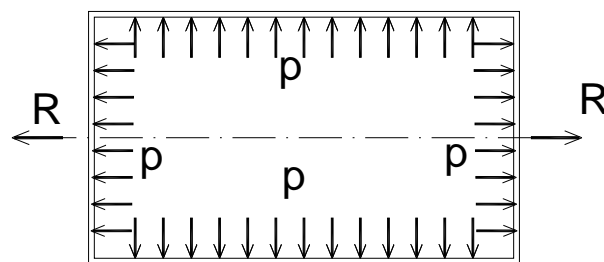


Fig. 2.13

## 2.3 SOLICITACIÓN POR CORTE PURO

### 2.3.1 Conceptos generales

Según hemos visto en el capítulo I al definir tensión, el vector tensión total puede descomponerse en un vector normal a la sección y en uno yacente en la misma, al cual denominaremos “tensión tangencial”.

Así como ya vimos algunos problemas en los que se involucró la presencia de tensiones normales, ahora vamos a tratar otros donde solamente aparecen tensiones tangenciales.

El problema de corte puro se presenta cuando en una sección de una pieza actúa exclusivamente un esfuerzo de corte. En este caso puede suponerse que solamente se desarrollan tensiones tangenciales, y que las mismas se distribuyen uniformemente. Luego, por razones de equilibrio deberá ocurrir:

$$Q = \int_{\Omega} \tau d\Omega = \tau \int_{\Omega} d\Omega = \tau \Omega \rightarrow \tau = \frac{Q}{\Omega} \quad (2.18)$$

Antes de continuar debemos aclarar que la hipótesis anterior es correcta en cuanto a suponer que el esfuerzo de corte genera tensiones tangenciales; sin embargo, la suposición de que estas son constantes es irreal; por lo que la fórmula 2.18 debe solo considerarse como representativa del valor medio de las tensiones tangenciales.

Las hipótesis anteriores son aceptadas en algunos casos como veremos a continuación, para facilitar el cálculo, ya que el estado tensional real suele ser muy complicado. Por otro lado, la aproximación introducida debe ser tomada en cuenta en la elección del adecuado coeficiente de seguridad.

En los siguientes casos podemos admitir esfuerzos de corte puro:

- Vigas de muy pequeña luz donde la rotura se produce por corte puro, ya que el efecto de flexión es despreciable (fig. 2.16).
- El corte en una plancha metálica mediante el empleo de una cizalla.
- Punzonamiento, por ejemplo, la perforación de hojas.
- Uniones con remaches, bulones, soldadura, pernos, etc.

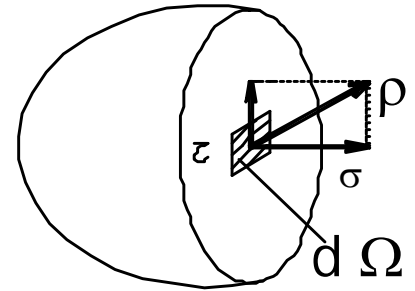


Fig. 2.14

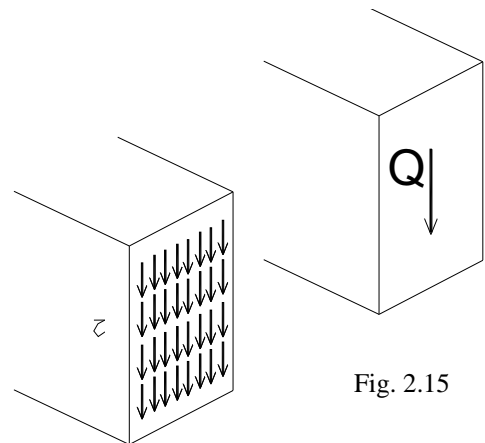


Fig. 2.15

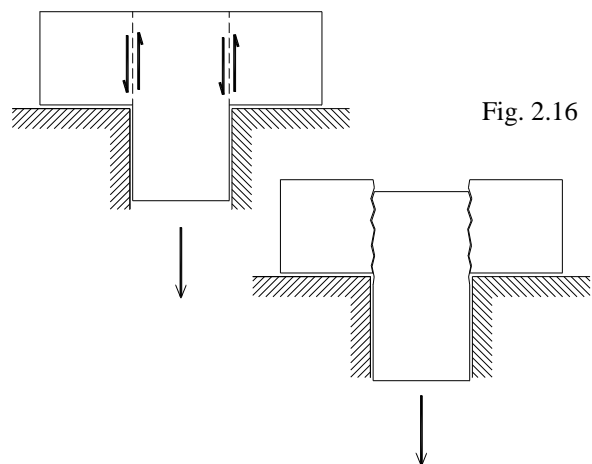


Fig. 2.16

### 2.3.2 Deformación por corte, energía de deformación

Si en una pieza que está sometida a un esfuerzo de corte puro consideramos una tajada de longitud  $\Delta l$ , comprobaremos que las dos secciones que la definen se desplazan una distancia  $\Delta h$ , como consecuencia del esfuerzo  $Q$ .

$$\gamma \cong \text{tg } \gamma = \frac{\Delta h}{\Delta l} \quad (2.19)$$

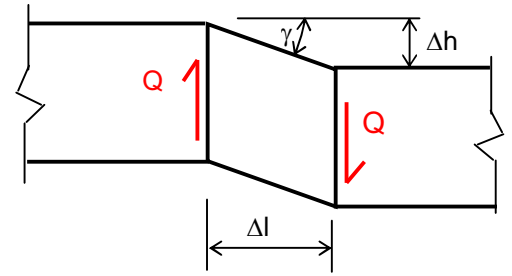


Fig. 2.17

El ángulo  $\gamma$  se denomina “deformación angular o ángulo de distorsión”.

Los ensayos demuestran que en el caso de muchos materiales, hasta ciertos límites de sollicitación, se verifica una relación lineal entre las tensiones tangenciales y las deformaciones angulares. Esta relación puede expresarse de la siguiente manera:

$$\tau = G \gamma \quad (2.20)$$

Dónde  $G$  recibe el nombre de módulo de elasticidad transversal. La ley anterior resulta ser la ley de Hooke para el caso de tensiones tangenciales. Los valores de  $G$  dependen del material.

Acero	$G \cong 810 \text{ tn/cm}^2$
Hormigón	$G \cong 83 \text{ tn/cm}^2$

El valor de la tensión tangencial admisible ( $\tau_{adm}$ ) no es único para cada material, sino que depende de varios factores:

- De la forma en que se manifiesta el esfuerzo de corte dentro de la pieza.
- De si está combinado o no con otras sollicitaciones
- Del tipo de elemento de que se trate.

En cuanto a la energía específica de deformación, podemos decir que, en forma análoga a lo estudiado para el caso de tensiones normales, la misma puede calcularse como el área que encierra el diagrama  $\tau - \gamma$ .

Si el material se encuentra en el período elástico lineal, tenemos:

$$u = \frac{1}{2} \tau \gamma = \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G} = \frac{1}{2} G \gamma^2 \quad (2.21)$$

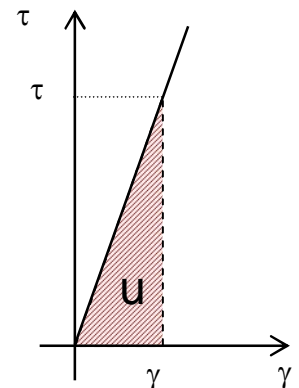


Fig. 2.18

Si deseamos obtener el valor de la energía de deformación debemos multiplicar estas expresiones por el volumen del elemento.

$$u \, dv = u \, \Omega \, \Delta l = \frac{1}{2} \tau \gamma \, \Omega \, \Delta l = \frac{1}{2} (\tau \Omega) (\gamma \Delta l) = \frac{1}{2} Q \Delta h$$

$$U = \frac{1}{2} Q \Delta h = \frac{1}{2} \frac{Q^2 \Delta l}{\Omega G} = \frac{1}{2} \frac{\Omega G \Delta h^2}{\Delta l} \quad (2.22)$$

2.3.3 Aplicaciones al cálculo de elementos de unión

a) Ejemplo 1

Dimensionamiento de la chaveta de unión entre un eje y una polea

$$\tau = \frac{Q}{ab} \leq \tau_{adm} \rightarrow ab \geq \frac{Q}{\tau_{adm}}$$

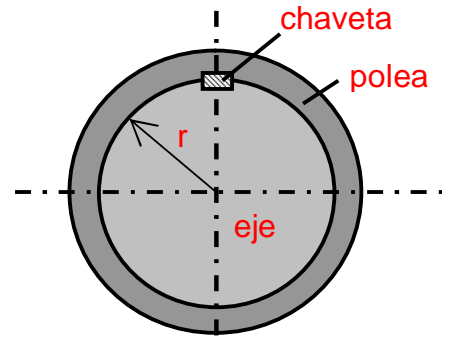
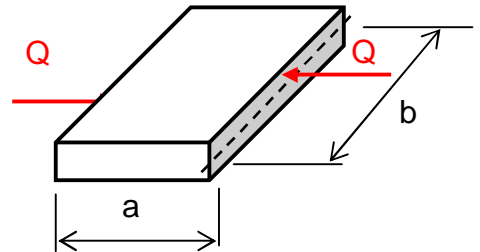


Fig. 2.19

Consideremos que el motor que mueve al eje tiene una potencia P, y que el eje gira a una velocidad angular ω, el momento tordente originado se calcula como:

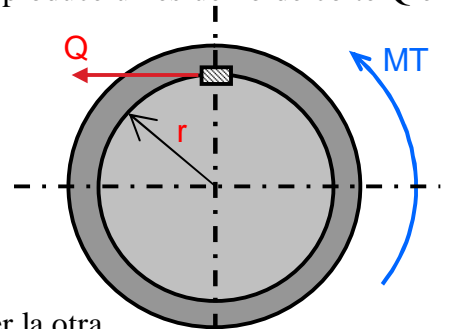
$$M_T = \frac{P}{\omega}$$



Al querer arrastrar el eje a la polea, el momento tordente produce un esfuerzo de corte Q en el plano medio de la chaveta.

Por equilibrio:  $Q = \frac{M_T}{r} = \frac{P}{\omega r}$

$$ab \geq \frac{P}{\omega r \tau_{adm}}$$



Adoptamos una de las dos medidas, a o b, se puede obtener la otra.

b) Ejemplo 2

Dimensionamiento de la unión del esquema mediante remaches o bulones.

Si llamamos n a la cantidad de bulones a colocar:

$$P_1 = \frac{P}{n}$$

$$\tau = \frac{P_1}{\Omega} = \frac{P}{n \frac{\pi d^2}{4}} \leq \tau_{adm} \rightarrow n \frac{\pi d^2}{4} \geq \frac{P}{\tau_{adm}}$$

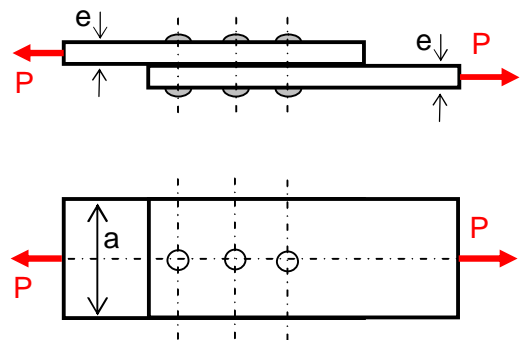


Fig. 2.20

Eligiendo el diámetro d puede determinarse la cantidad n de bulones, o viceversa. Luego de elegidos los bulones, dado que tenemos un esfuerzo de tracción, deberá verificarse:

$$\sigma = \frac{P}{\Omega_{neta}} = \frac{P}{e(a-d)} \leq \sigma_{adm}$$

En cuanto a la cantidad de bulones o remaches y diámetro a adoptar existen condiciones reglamentarias a respetar, pero el estudio de las mismas escapa a los alcances de este curso. Por otro lado, las verificaciones que hemos hecho no son las únicas que deben realizarse para completar el cálculo.

## c) Ejemplo 3

En la figura 2.21 está representada una junta soldada de dos planchuelas, unidas por cordones de soldadura. Se trata de soldaduras en ángulo compuestas por dos cordones laterales y dos frontales.

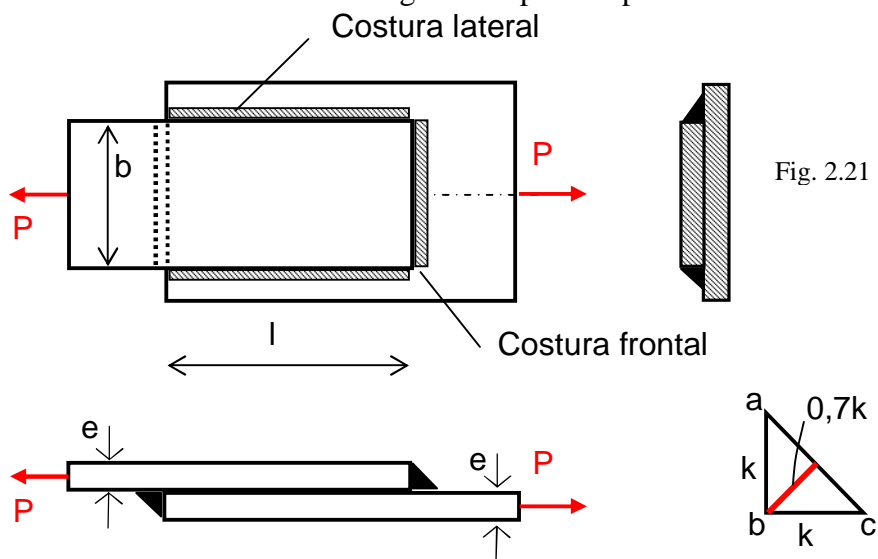


Fig. 2.21

Al calcular las soldaduras en ángulo, se considera que la sección peligrosa de la costura coincide con el plano de la bisectriz del ángulo recto ABC. Así pues, el área de la sección peligrosa de una costura frontal es:  $b \times 0,7 k$  y el de una costura lateral es:  $l \times 0,7 k$ , siendo  $k$  el cateto de la costura.

En el plano representado en la figura, el cateto es igual al espesor de las planchas. Las tensiones tangenciales se consideran distribuidas uniformemente en el área de la sección peligrosa. Teniendo en cuenta esta hipótesis, la carga admisible correspondiente a la costura serán:

$$T_{adm \text{ frontal}} = (b \cdot 0,7 k) \cdot \tau_{adm}$$

$$T_{adm \text{ lateral}} = (L \cdot 0,7 k) \cdot \tau_{adm}$$

Es obvio que para conseguir una junta resistente, será necesario que la resistencia total admisible de la costura no sea inferior a la fuerza que actúa sobre la junta. Es decir:

$$(2 T_{adm \text{ frontal}} + 2 T_{adm \text{ lat.}}) \geq P$$

Con los ejemplos anteriores se ha pretendido hacer una ejercitación del problema de corte puro. Oportunamente en otras asignaturas se profundizará el estudio para los tipos de uniones más frecuentes.