

4

TEORIAS DE FALLAS O DE COMPARACIÓN

4.1 CONCEPTOS COMPLEMENTARIOS SOBRE ENERGIA ESPECIFICA DE DEFORMACION

4.1.1 Energía total de deformación

La energía específica de deformación en un punto de un sólido sujeto a un estado de tensión cualquiera, es una función tanto de las tensiones actuantes como de las deformaciones. En los capítulos anteriores ya hemos analizado el valor de la energía de deformación por unidad de volumen para algunos casos simples:

$$\text{Esfuerzo axial: } u = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon$$

$$\text{Corte puro: } u = \frac{1}{2} \tau \gamma$$

Las expresiones anteriores surgen de la consideración del comportamiento del material como elástico lineal, es decir, que vale la Ley de Hooke.

En el caso más general de un estado triple tendremos que considerar la energía específica de deformación correspondiente a cada tensión.

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x + \frac{1}{2} \sigma_y \varepsilon_y + \frac{1}{2} \sigma_z \varepsilon_z + \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} + \frac{1}{2} \tau_{xz} \gamma_{xz} + \frac{1}{2} \tau_{yz} \gamma_{yz} \\
 u &= \frac{1}{2} \sigma_x \left\{ \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \right\} + \frac{1}{2} \sigma_y \left\{ \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] \right\} + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sigma_z \left\{ \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \right\} + \frac{1}{2} \tau_{xy} \frac{\tau_{xy}}{G} + \frac{1}{2} \tau_{xz} \frac{\tau_{xz}}{G} + \frac{1}{2} \tau_{yz} \frac{\tau_{yz}}{G} \\
 u &= \frac{1}{2E} [(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - 2\mu(\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z)] + \frac{1}{2G} [\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2]
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

En el caso particular de un estado doble, la expresión anterior se reduce a la siguiente:

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\mu \sigma_x \sigma_y] + \frac{1}{2G} \tau_{xy}^2 \tag{4.2}$$

y en el estado lineal

$$u = \frac{1}{2E} \sigma_x^2 \tag{4.3}$$

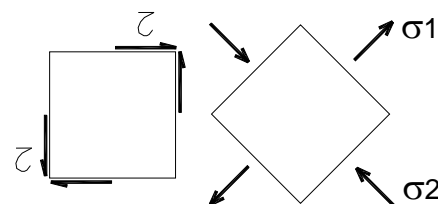
4.1.2 Relación entre las constantes elásticas

4.1.2.1 Relación entre E y G

Si en un cuerpo sometido a tensiones consideramos un elemento diferencial en una determinada posición, la energía de deformación por unidad de volumen correspondiente al mismo deberá mantenerse si lo suponemos rotado.

Si tenemos un prisma elemental sometido a corte puro, sabemos que a 45° de esa posición nos encontraremos que el elemento estará sometido a tensiones de tracción y compresión, las que en valor absoluto serán iguales entre sí e iguales a la tensión tangencial. Si evaluamos la energía de deformación por unidad de volumen en ambos casos obtendremos:

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G} \\
 u &= \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\mu \sigma_1 \sigma_2] = \frac{1}{2E} [2\tau^2 + 2\mu\tau^2] \\
 u &= \frac{1+\mu}{E} \tau^2 = \frac{1}{2G} \tau^2 \quad \rightarrow \quad \frac{1+\mu}{E} = \frac{1}{2G} \\
 G &= \frac{E}{2(1+\mu)}
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$



$|\sigma_1| = |\sigma_2| = |\tau|$ Fig. 4.1

De esta manera hemos encontrado la relación existente entre E, G, y μ , relación de la que ya habíamos hablado anteriormente.

4.1.2.2 Relación entre módulos E y K

Consideramos un cubo inicialmente de lados unitarios, sometido a tensiones normales $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$.

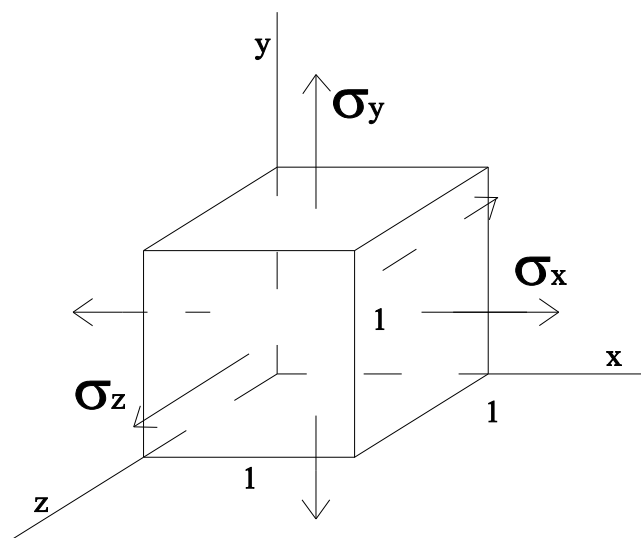


Fig. 4.2

La longitud final de cada lado del cubo será:

$$\begin{aligned}
 l_x &= (1 + \epsilon_x) \\
 l_y &= (1 + \epsilon_y) \\
 l_z &= (1 + \epsilon_z)
 \end{aligned}$$

$$\text{Volumen final } Vf = (1 + \epsilon_x) (1 + \epsilon_y) (1 + \epsilon_z)$$

Por ser las deformaciones ϵ_i pequeñas, se desprecian los términos de productos de 2º y 3º orden:

$$Vf = 1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

Calculando la deformación específica volumétrica

$$\varepsilon_v = \frac{V_f - V_i}{V_i} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

Reemplazando los ε_i en función de las tensiones normales:

$$\varepsilon_v = \frac{1}{E} [(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)(1 - 2\mu)]$$

Para el caso particular en que $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_p$ (Estado de tensión hidrostática)

$$\varepsilon_v = 3 \frac{\sigma_p}{E} (1 - 2\mu) = \text{ctte} \times \sigma_p$$

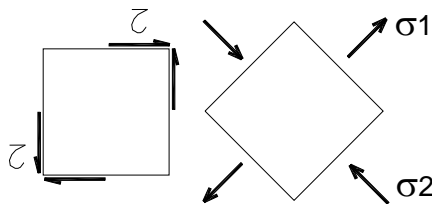
Anteriormente llamamos K a la constante que vincula a la tensión con la deformación específica volumétrica.

$$\sigma_p = K \cdot \varepsilon_v \rightarrow K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)} \quad \text{módulo de elasticidad volumétrico}$$

Conclusión: Como $\varepsilon \neq 0$, el valor entre paréntesis: $(1 - 2\mu) > 0$, o sea, $\mu < 0,5$

Como casos extremos podemos considerar el corcho, que tiene un coeficiente de poisson cercano a 0 y el caucho que tiene un coeficiente cercano a 0.5.

Para el caso visto en la sección 4.1.2.1, relación entre E y G supusimos un caso de corte puro, busquemos la variación de volumen ε_v para dicho caso



$$|\sigma_1| = |\sigma_2| = |\tau| \rightarrow \sigma_1 = -\sigma_2$$

$$\varepsilon_v = \frac{V_f - V_i}{V_i} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [(\sigma_1 - \mu\sigma_2)] = \frac{\sigma_1}{E} (1 + \mu)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [(\sigma_2 - \mu\sigma_1)] = -\frac{\sigma_1}{E} (1 + \mu) \quad \rightarrow \varepsilon_v = 0$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{\mu}{E} [(\sigma_1 + \sigma_2)] = 0$$

Conclusión: Las tensiones tangenciales no producen variación de volumen

4.1.3 Energía por variación de volumen y por variación de forma

La energía específica de deformación puede considerarse compuesta de dos partes:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_V + \mathbf{u}_F \quad (4.5)$$

u_V = energía necesaria para producir el cambio de volumen del elemento diferencial infinitésimo considerado.

u_F = energía que origina el cambio de forma o distorsión del elemento, también llamada “energía de distorsión”.

Ya hemos indicado que las distorsiones angulares no provocan cambio de volumen, sólo de forma. Por otro lado, las deformaciones específicas producen cambios de volumen y forma.

De la expresión correspondiente a “u” vamos a separar la parte inherente a las tensiones tangenciales y la que depende de las tensiones normales.

$$\mathbf{u}_\tau = \frac{1}{2G} [\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2] = \frac{(1+\mu)}{E} [\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2] \quad (4.6)$$

$$\mathbf{u}_\sigma = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z)] \quad (4.7)$$

Consideramos a continuación un elemento sometido exclusivamente a tensiones normales σ_x , σ_y , σ_z y llamamos:

$$\sigma_p = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \quad (4.8)$$

En la figura 4.3 hemos expresado este caso como suma de los dos estados allí indicados.

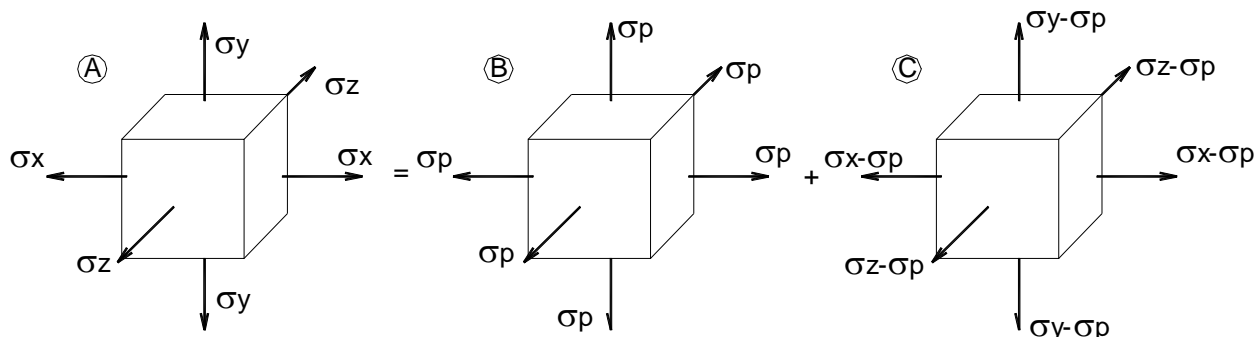


Fig. 4.3

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$\varepsilon_{VB} = 3\varepsilon_p = \frac{3}{E} [\sigma_p - 2\mu\sigma_p] = \frac{3(1-2\mu)}{E} \sigma_p \quad (4.9)$$

$$\varepsilon_{VC} = \frac{1}{E} [(\sigma_x - \sigma_p) - \mu(\sigma_y + \sigma_z - 2\sigma_p)] + \frac{1}{E} [(\sigma_y - \sigma_p) - \mu(\sigma_x + \sigma_z - 2\sigma_p)] +$$

$$+ \frac{1}{E} [(\sigma_z - \sigma_p) - \mu(\sigma_x + \sigma_y - 2\sigma_p)] =$$

$$\varepsilon_{VC} = \frac{1-2\mu}{E} \left[\underbrace{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}_{3\sigma_p} - 3\sigma_p \right] = 0 \rightarrow \varepsilon_{VB} = \varepsilon_{VA} \quad (4.9)$$

De la ecuación 4.9 puede verse que el estado C no presenta cambio de volumen. El estado B, donde todas las caras están sometidas a la misma tensión, se denomina “estado de tensión hidrostática”.

$$u_v = u_{vb} = \frac{1}{2E} [3\sigma_p^2 - 6\mu \sigma_p^2] = \frac{3(1-2\mu)}{2E} \left[\frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \right]^2 \tag{4.10}$$

$$u_v = \frac{(1-2\mu)}{6E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2\sigma_x\sigma_y + 2\sigma_x\sigma_z + 2\sigma_y\sigma_z]$$

$$u_F = u - u_v$$

$$u_F = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z)] - \frac{(1-2\mu)}{6E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2\sigma_x\sigma_y + 2\sigma_x\sigma_z + 2\sigma_y\sigma_z] \tag{4.11}$$

$$u_F = \frac{(1+\mu)}{3E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_x\sigma_z - \sigma_y\sigma_z]$$

Para el caso general donde además de tensiones normales existen tensiones tangenciales, resulta:

$$u_F = \frac{(1+\mu)}{3E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_x\sigma_z - \sigma_y\sigma_z + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)] \tag{4.12}$$

La importancia de la energía por cambio de forma estriba en que a ella se le atribuye la fluencia, o sea, el escurrimiento plástico.

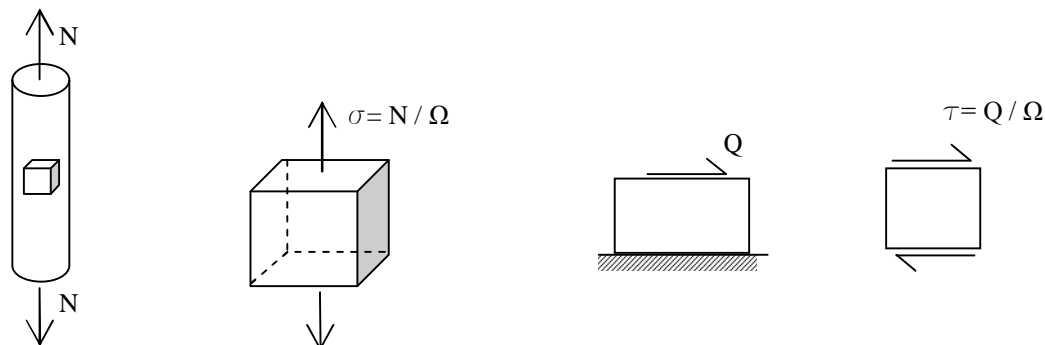
En función de las tensiones principales:

$$u_F = \frac{(1+\mu)}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]$$

4.2 TEORIAS DE COMPARACION – TEORIAS DE FALLA.

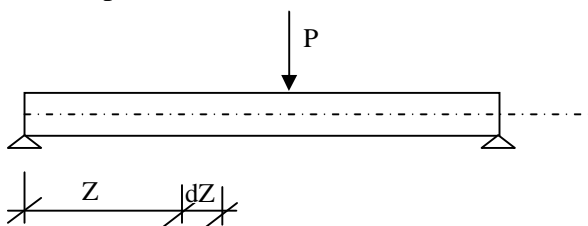
4.2.1.1 Introducción.

En lo que vimos de la materia hemos definido las tensiones para los siguientes estados simples de solicitaciones:



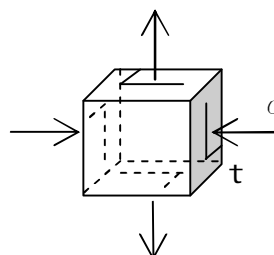
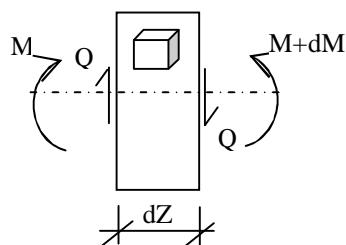
Si tuviéramos una viga sometida a cargas:

a) por Estabilidad I sabemos

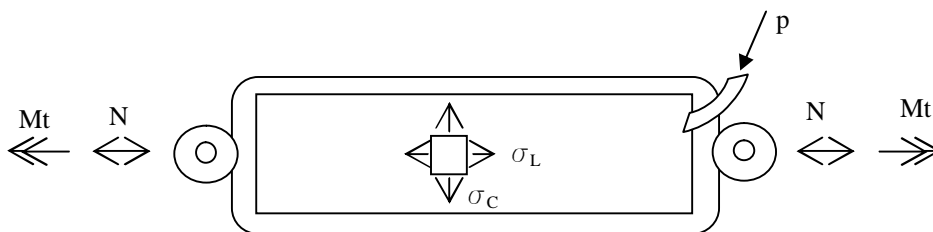


b) por Estabilidad II, en Cap. 6 y 7, veremos que

$$\begin{cases} Mf \rightarrow \sigma \\ Q \rightarrow \tau \end{cases}$$



Si tenemos un cilindro de paredes delgadas, cerrado en los extremos, al cual podemos someter a diferencias de presiones entre interior y exterior, debido a ello tendríamos tensiones normales $\sigma_c = p.r/e$: tensión circunferencial y $\sigma_L = \sigma_c/2$: tensión longitudinal.



En su momento mencionamos que el valor de la presión interior de la pared del cilindro era tan pequeño respecto de los valores de σ_c y de σ_L , que podíamos despreciarlo.

Si además de la diferencia de presión, imaginemos que al cilindro podemos aplicarle un Esfuerzo Axial, de tracción o de compresión, ese esfuerzo normal N producirá modificaciones en el valor de la componente de tensión longitudinal producida por la presión interna. (tendremos que sumar o restar al valor de σ_L debido a p, el valor debido a N).

Imaginemos que al cilindro también podemos aplicarle M_t . Torsor, lo veremos en el capítulo 5, el M_t producirá en la pared tensiones tangenciales τ .

Bajo las condiciones señaladas, un pequeño elemento en la pared, variando las relaciones entre **p**, **N** y **Mt**, estará sometido a diferentes estados tensionales.

Cabe ahora una pregunta: ¿Si tengo distintos estados tensionales, por ejemplo estados dobles o triples de tensiones, es válido comparar los valores de estas tensiones con la tensión límite definida en un ensayo de tracción simple como hacíamos en el capítulo 1?

Trataremos de contestar la pregunta anterior apoyándonos en resultados experimentales que se ilustran en los cuatro ejemplos siguientes.

Asumamos que el comportamiento del material es el de un metal dúctil, que el comportamiento del mismo se aproxima al lineal elástico, perfectamente plástico (recordar cap. 1).

Ejemplo 4.13a: El ensayo de tracción uniaxial, proporciona el módulo de elasticidad E, y la tensión de fluencia σ_f . (Ver fig. 4.13.a)

Ejemplo 4.13b: Asumamos ahora que aplicamos también una compresión transversal de igual valor que la tracción; en este caso experimentalmente se observa que la tensión σ_y necesaria para causar la fluencia del material es de alrededor de la mitad del valor del ensayo de tracción simple. (ver fig. 4.13b)

Este resultado es fácilmente verificable realizando un simple ensayo de torsión en un tubo hueco de pared delgada, donde el estado de tensiones deseado existe para una orientación a 45° respecto del eje del tubo. (ver fig. 4.14)

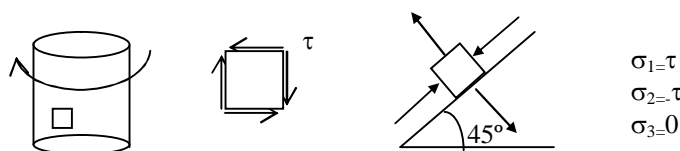
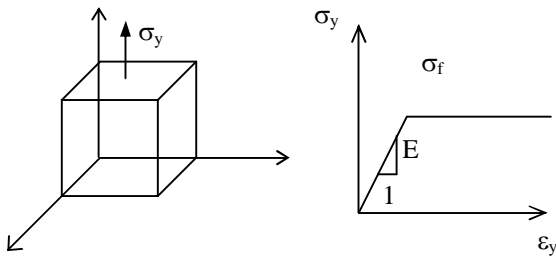


Fig. 4.14

Fig. 4.13.a



Tracción Uniaxial

Fig. 4.13.b

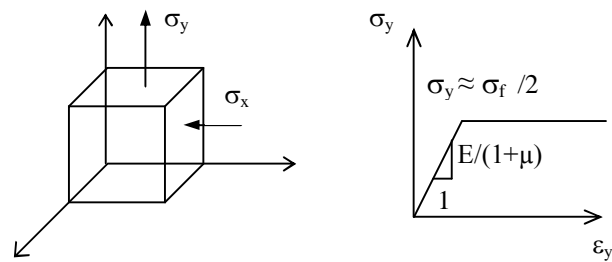
 $\sigma_x = -\sigma_y$ Tracción con
Compresión Transversal

Fig. 4.13.c

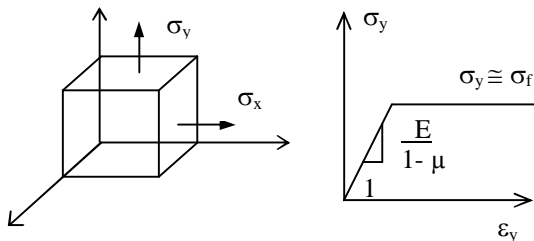
 $\sigma_x = \sigma_y$ Tracción Biaxial

Fig. 4.13.d

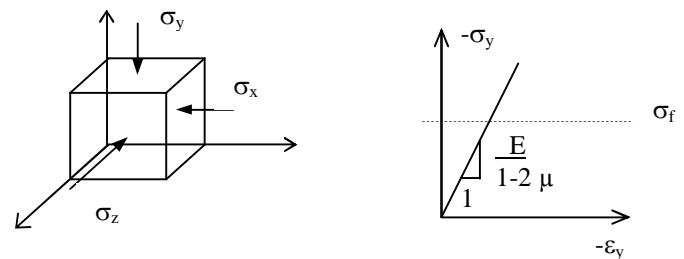
 $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$
Compresión Hidrostática

Fig. 4.13

Ejemplo 4.13c: Consideremos ahora otro caso; la tracción transversal σ_x de igual magnitud que σ_y . Como la compresión transversal disminuye la resistencia a fluencia, la intuición sugiere que la tracción la incrementa. Pero experimentalmente se puede demostrar que el efecto de la tracción transversal prácticamente no influye sobre la fluencia.

El experimento podría ser realizado presurizando una esfera hueca de pared delgada hasta la fluencia, o por una combinación de presión y tracción en un tubo de pared delgada. (ver fig. 4.13c)

Si se cambia el material por uno frágil, por ejemplo fundición de acero gris, ni tensiones transversales de tracción ni de compresión tienen mucho efecto sobre su fractura.

Ejemplo 4.13d: Un hecho experimental adicional de interés es que, es difícil y casi imposible, hacer llegar a la fluencia a un material si es ensayado bajo presiones hidrostáticas, donde $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$, tanto en tracción como en compresión. La tracción hidrostática es difícil de lograr experimentalmente, pero la compresión hidrostática consiste en colocar una muestra del material en una cámara presurizada.

Los cuatro ejemplos citados, en los cuales se consideran los resultados cambiantes del comportamiento de un metal dúctil, permiten señalar que si por las acciones a los cuales es sometido un material, en un cierto punto se producen tensiones en más de una dirección, será difícil determinar para una determinada relación de valores, si tal combinación tensional puede causar la fluencia o la fractura del material, aún cuando individualmente no alcancen los valores de falla.

Es por ello que se necesitan Criterios o Teorías de Falla, que sean capaces de reflejar tales efectos de tensiones combinadas, ya sea para la fluencia o la fractura.

Una alternativa a los criterios de falla basado en tensiones, es analizar específicamente fisuras en el material utilizando los métodos especiales de la mecánica de fractura, tema que escapa la formación de grado.

Los criterios de fluencia considerados en este capítulo predicen el comienzo de la deformación plástica, más allá de donde la Ley de Hooke cesa de describir completamente el comportamiento tensión-deformación.

4.2.1.2 Forma general del criterio de falla.

Un estado multiaxial de tensiones en un cuerpo, es el estado más general que puede presentarse ante una condición de sollicitación. Componentes ingenieriles pueden estar sujetos a cargas complejas de presión, tracción, compresión, torsión, o una combinación de ellas, de forma tal que para un cierto punto del material se producen tensiones en más de una dirección. En la práctica, suele ser complejo y hasta a veces imposible idear experimentos que puedan cubrir cada detalle y cada particular combinación de tensiones, atento a las dificultades para poder concretarlo como al extraordinario costo que el procedimiento implica. Por tal razón se necesitan Hipótesis, Teorías o Criterios que permitan evaluar, comparar y relacionar un estado de tensión cualquiera con los resultados experimentales del ensayo típico de tracción, cuyo costo es relativamente bajo.

En la materia consideraremos dos posibilidades de falla: a) Falla para materiales Dúctiles. b) Falla para materiales Frágiles.

En la aplicación de un criterio de falla para materiales dúctiles, la resistencia del material está dada por su resistencia de fluencia, en cambio para un criterio de falla para materiales frágiles la tensión límite será la tensión de rotura a la tracción.

Los criterios de falla para materiales isotrópicos pueden ser expresados en la forma matemática siguiente:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_L \quad \text{en la falla} \quad (4.13)$$

El lado izquierdo de la ecuación es una función matemática específica, f , que depende del estado tensional (valores de σ_1 , σ_2 , σ_3) al que está sometido el punto que estamos analizando y cuya expresión dependerá del criterio de falla que se aplique. Dicha función predice que ocurre la falla cuando el resultado numérico de la misma es igual a la resistencia de falla o rotura del material, σ_L , en un ensayo de tracción simple.

El resultado numérico mencionado puede considerarse como una tensión efectiva, $\bar{\sigma}$, o también llamada tensión de comparación, σ_c , la cual es un valor numérico simple que caracteriza el estado de tensiones aplicadas.

$$\text{En particular} \quad \sigma_c = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad (4.14)$$

Luego, la falla ocurre cuando:

$$\sigma_c = \sigma_L \quad (4.15)$$

No se espera la falla si:

$$\sigma_c < \sigma_L \quad (4.16)$$

Asimismo el factor de seguridad contra la falla es:

$$v = \sigma_L / \sigma_c \quad (4.17)$$

En otras palabras, las tensiones aplicadas pueden ser incrementadas por el factor v antes de que la falla ocurra.

NOTA: al factor de seguridad es preferible expresarlo en términos de cargas aplicadas. Si cargas y tensiones son proporcionales, como es frecuente, el factor de seguridad en tensiones es idéntico al factor en cargas.

Un requerimiento para que sea válido el criterio de falla es que debe dar el mismo resultado sin importar la elección del sistema de coordenadas original del problema. Por este motivo, la expresión matemática de la función de falla también puede ser presentada en función de componentes de tensión según un sistema de ejes cartesianos que no sea el de las tensiones principales.

Veremos más adelante que si graficamos la función **f** en el espacio de tensiones principales, esto es, en el sistema de coordenadas tridimensional, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, la misma conforma una superficie que es llamada superficie de falla.

Procederemos ahora a discutir varios criterios de falla, es decir consideraremos varias funciones específicas **f**, algunos de los cuales son apropiados para materiales dúctiles y otros para materiales frágiles. Los subíndices para las tensiones principales se asumirán que están asignados en cualquier orden particular relativo a sus magnitudes.

CRITERIO DE FALLA DE LA MAXIMA TENSION NORMAL (o Teoría de Rankine)

Quizás el más simple de los criterios es aquel en que se espera la falla cuando la mayor de las tensiones principales alcanza la resistencia uniaxial del material. Como esta aproximación ha tenido gran suceso en la predicción de la fractura de materiales frágiles debería ser considerado como un criterio de fractura distinguiéndolo del criterio de fluencia.

El criterio de fractura de la máxima tensión normal puede ser especificado por una función particular, **f**, como sigue:

$$\text{MAX} (|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|) = \sigma_L \quad (\text{en la fractura}) \quad (4.18)$$

Dónde la notación máxima indica que, de los valores separados por comas, el elegido es el mayor de los mismos.

Se consideran valores absolutos de forma tal que puedan ser considerados tensiones de compresión, y se asume que la resistencia última σ_L es la misma en tracción que en compresión.

Un conjunto particular de tensiones aplicadas puede ser caracterizado por la siguiente tensión de comparación o efectiva:

$$\sigma_{cN} = \text{MAX} (|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|) \quad (4.19)$$

Dónde el suscrito N especifica el criterio de la máxima tensión normal. Así, se espera la fractura cuando $\sigma_{cN} = \sigma_L$, pero no cuando es menor, y el factor de seguridad contra la fractura es:

$$v = \sigma_L / \sigma_{cN} \quad (4.20)$$

Como esta teoría predice la falla de materiales frágiles, la tensión límite σ_L en este caso es la tensión de rotura del material en tracción simple σ_R .

Para el **estado plano de tensiones**, en términos de las tensiones cartesianas, podemos escribir que:

$$\sigma_{máx,min} = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2}$$

Para el **estado de tracción simple**, resulta:

$$\sigma_L = \sigma_n \quad \text{ó} \quad \sigma_R \quad \text{ó} \quad \sigma_{adm}$$

Resultando la tensión efectiva o de comparación:

$$\sigma = \sigma_c = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} \leq \sigma_L$$

4.2.2.2 Representación gráfica del criterio de la máxima tensión normal

Hemos mencionado en el inciso 4.2.1.2 que si graficamos la función **f** en el espacio de tensiones principales, obtenemos la superficie de falla. Para EPT, tal que $\sigma_3 = 0$, este criterio puede ser representado gráficamente en una gráfica de σ_1 versus σ_2 por un cuadrado (Fig. 4.16(a)).

Cualquier combinación de σ_1 y σ_2 que caiga dentro del área cuadrada es segura y cualquiera en su perímetro corresponde a la fractura.

Nótese que el cuadrado es la región que satisface:

$$\text{MAX}(|\sigma_1|, |\sigma_2|) \leq \sigma_R \quad (4.21)$$

Graficando la función de ecuación (4.21) obtenemos las cuatro líneas rectas que forman los bordes de esta región segura (ver Fig. 4.16.b)

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_R, & \sigma_1 &= -\sigma_R \\ \sigma_2 &= \sigma_R, & \sigma_2 &= -\sigma_R \end{aligned} \quad (4.22)$$

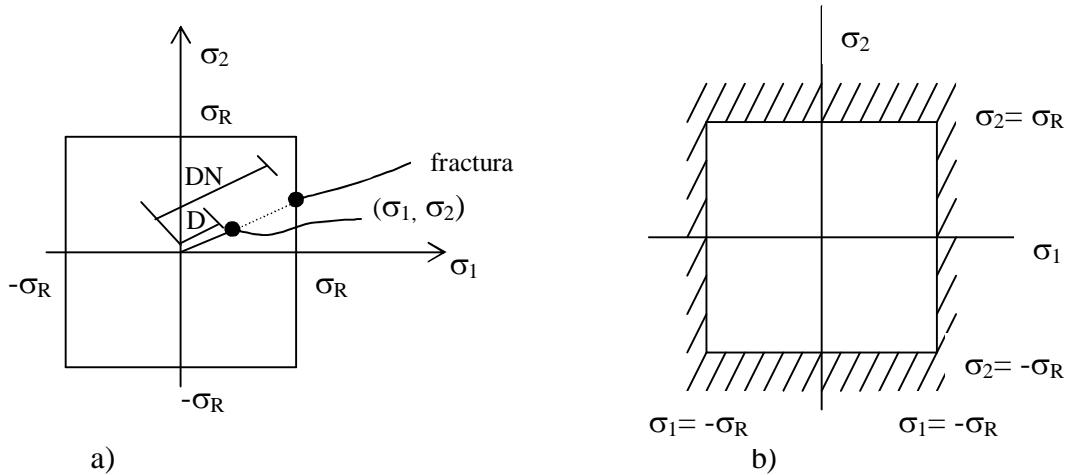


Fig. 4.16: Localización de falla para el criterio de la máxima tensión normal para EPT

Para el caso general, dónde las tres tensiones principales pueden ser distintas de cero, la Ec.4.19 indica que la región segura es la acotada por:

$$\sigma_1 = \pm \sigma_R, \quad \sigma_2 = \pm \sigma_R, \quad \sigma_3 = \pm \sigma_R \quad (4.23)$$

Cada una de las cantidades de arriba representa un par de planos paralelos normales a uno de los ejes principales e interceptan cada uno en $+\sigma_R$ y $-\sigma_R$. La superficie de falla es asimismo un simple cubo (ver Fig. 4.17). Si uno de los valores de σ_1 , σ_2 ó σ_3 es cero, entonces sólo necesita considerarse la región bidimensional formada por la intersección del cubo con el plano de las dos restantes tensiones principales. Tal intersección es mostrada para el caso de $\sigma_3 = 0$, y el resultado es por supuesto el cuadrado de la Fig. 4.16.

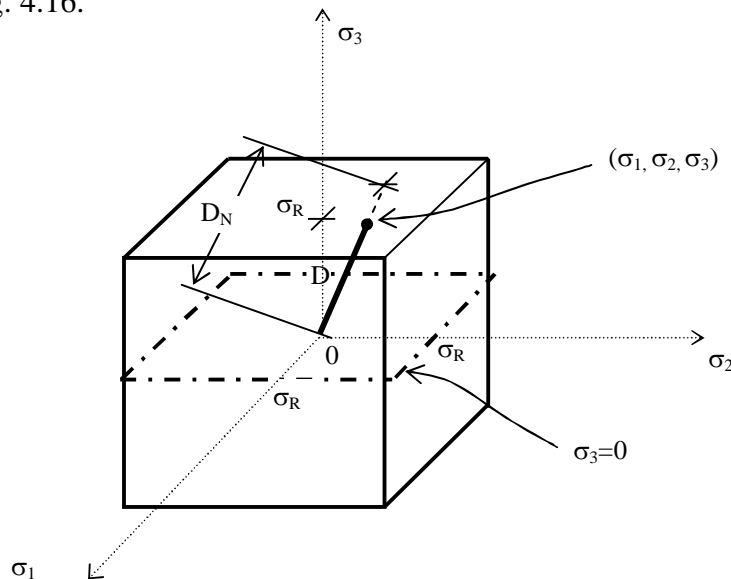


Fig. 4.17: Superficie de falla tridimensional para el criterio de la máxima tensión normal.

4.2.2.3 Interpretación gráfica del factor de seguridad

Consideremos un punto en la superficie de una pieza o componente, donde prevalece EPT, de forma tal que $\sigma_3 = 0$. Además, asumamos que incrementando la carga aplicada, dicho incremento de carga provoca un aumento en las tensiones σ_1 y σ_2 , manteniéndose constante la relación σ_2/σ_1 , esta situación se conoce como carga proporcional.

Por ejemplo, para cargas de presión en un tubo de pared delgada, con extremos cerrados, las tensiones mantienen la relación $\sigma_2/\sigma_1 = 0.5$, donde σ_1 es la tensión circunferencial y σ_2 la longitudinal.

En tal caso, la interpretación gráfica del factor de seguridad, puede ser hecha como es ilustrada en la figura 4.16 (a). Sea D la distancia desde el origen al punto correspondiente a las tensiones aplicadas (σ_1, σ_2). Luego extendemos la línea recta hasta que toque la línea de fractura, y denotamos la distancia resultante como D_N . El factor de seguridad contra la fractura es la relación entre dichas longitudes.

$$v = D_N / D \quad (4.24)$$

Para el caso particular de EPT, y asumiendo por conveniencia que σ_1 tiene el mayor valor absoluto y es positivo, ec. 4.24 puede verificarse como sigue:

$$\sigma_{cN} = \text{MAX}(|\sigma_1|, |\sigma_2|) = \sigma_1 \quad (4.25)$$

Por semejanza de triángulos en la Fig. 4.16 (a)

$$\frac{\sigma_R}{\sigma_1} = \frac{D_N}{D} \quad (4.26)$$

Como el factor de seguridad es $v = \sigma_R / \sigma_{cN}$, las dos ecuaciones de arriba se combinan para dar la (4.24).

Extendiendo el procedimiento, la ecn. 4.24 es fácil de aplicar teniendo en cuenta los signos y magnitudes relativas de σ_1 y σ_2 .

Tal representación gráfica del factor de seguridad, y específicamente la de la ecuación 4.24, también se aplica al caso general tridimensional ilustrado en la figura 4.17. Las distancias D y D_N , son medidas aún sobre una línea recta, pero en este caso la línea puede estar inclinada con respecto a los tres ejes principales.

Tal interpretación del coeficiente de seguridad en términos de longitudes de líneas para carga (tensiones) proporcional, es válida para cualquier superficie de falla físicamente razonable, tales como las discutidas más adelante.

4.2.3.1 CRITERIO DE FALLA DE LA MAXIMA TENSION DE CORTE

La fluencia de materiales dúctiles, normalmente ocurre cuando la máxima tensión de corte en cualquier plano alcanza un valor crítico τ_f , el cual es una propiedad del material.

$$\tau_f = \tau_{\text{máx.}} \text{ (en la fluencia)} \quad (4.27)$$

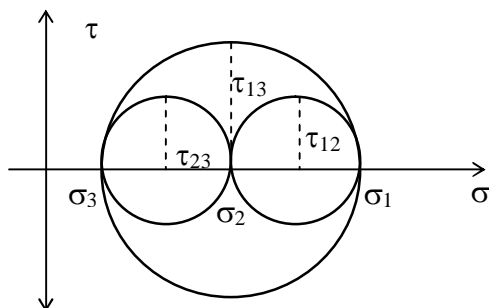
Esta es la base del criterio de la máxima tensión tangencial, también conocido como CRITERIO DE GUEST o de TRESCA. Para metales, tal aproximación es lógica, basada en el hecho que los mecanismos de fluencia en una escala microscópica son deslizamientos de planos de cristales, la cual es una deformación por corte que se espera sea controlada por las tensiones de corte.

4.2.3.2 Desarrollo del Criterio de Falla de la Máxima Tensión Tangencial

De capítulos anteriores recordemos que la máxima tensión tangencial es la mayor de las tres tensiones principales de corte, la cual actúa en planos orientados a 45° con respecto a los ejes de tensiones principales.

Para el **estado múltiple de tensiones**, en términos de las tensiones principales, podemos escribir que:

$$\tau_{\text{máx } 1-2} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}; \quad \tau_{\text{máx } 2-3} = \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2}; \quad \tau_{\text{máx } 1-3} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} \quad (4.28)$$



Por lo tanto, este criterio de fluencia puede plantearse como sigue:

$$\tau_f = \text{MAX} \left[\frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}, \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2}, \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} \right] \text{ en la fluencia} \quad (4.29)$$

La tensión de fluencia en corte, τ_f para un cierto material podría ser obtenida directamente de un ensayo de corte simple, tal como un tubo cilíndrico hueco sometido a torsión. Como generalmente se dispone de la resistencia de fluencia σ_f de ensayos de tracción, resulta más conveniente calcular τ_f a partir de σ_f en un ensayo uniaxial.

Nótese que en un ensayo uniaxial, la máxima tensión de corte ocurre en planos orientados a 45° con respecto al eje de la tensión aplicada. Ver círculo de Mohr de Fig.4.18.

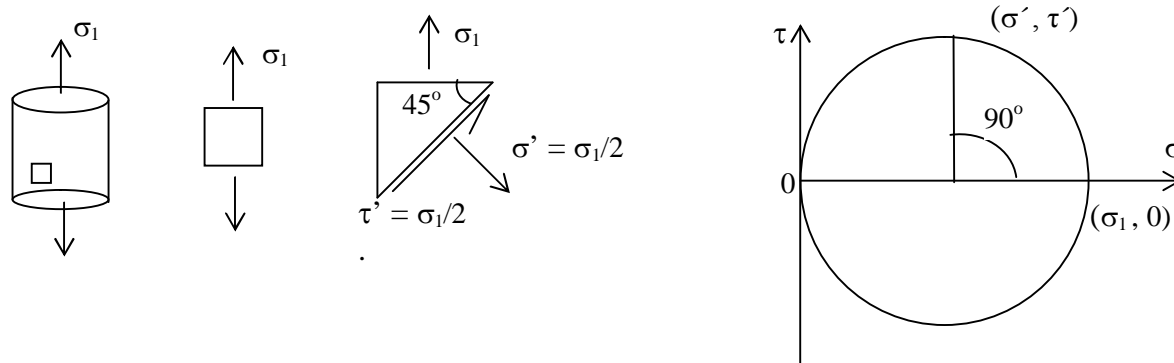


Fig. 4.18: plano de la máxima tensión de corte en un ensayo uniaxial.

Luego:

$$\sigma_1 = \sigma_f, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0, \quad (4.30)$$

Sustituyendo estos valores en el criterio de fluencia (Ec. 4.29) tendremos:

$$\tau_f = \sigma_f / 2 \quad (4.31)$$

La ec. 4.29 puede entonces escribirse en términos de σ_f .

$$\frac{\sigma_f}{2} = \text{MAX} \left(\frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}, \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2}, \frac{|\sigma_3 - \sigma_1|}{2} \right) \quad \text{en la fluencia} \quad (4.32)$$

ó

$$\sigma_f = \text{MAX} (|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|) \quad \text{en la fluencia} \quad (4.33)$$

La tensión efectiva o de comparación es definida más convenientemente como en la ec. 4.15, de forma tal que iguale a la resistencia uniaxial σ_f en el punto de fluencia.

$$\sigma_{c_s} = \text{MAX} (|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|) \quad (4.34)$$

Dónde el subíndice “s” especifica el criterio de la máxima tensión tangencial. (“S” → de Shear) El factor de seguridad contra la fluencia es:

$$v = \frac{\sigma_F}{\sigma_{c_s}} \quad (4.35)$$

Para el **estado plano de tensiones**, en términos de las tensiones cartesianas, podemos escribir que:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2}$$

Para el **estado de tracción simple**, resulta:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_L}{2} \quad \text{con} \quad \sigma_L = \sigma_{fl} \quad \text{ó} \quad \sigma_R \quad \text{ó} \quad \sigma_{ADM}$$

Resultando la tensión efectiva o de comparación:

$$\sigma_{c_s} = \bar{\sigma} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} \leq \sigma_L$$

4.2.3.3 Representación gráfica del criterio de la máxima tensión tangencial

Para EPT, en el que $\sigma_3=0$, el criterio de la M.T.T. puede ser representado en un gráfico σ_1 - σ_2 (Ver 4.19 (a)). Los puntos sobre el hexágono distorsionado corresponden a la fluencia, y los puntos dentro del mismo son seguros. El lugar de falla puede obtenerse sustituyendo $\sigma_3 = 0$ en el criterio de fluencia de ecuación.

$$\sigma_f = \text{MAX} (|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2|, |\sigma_1|) \quad (4.36)$$

La región de no fluencia, dónde $\sigma_{c_s} < \sigma_f$, es así la región acotada por dos líneas:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \pm \sigma_f ; \quad \sigma_2 = \pm \sigma_f ; \quad \sigma_1 = \pm \sigma_f \quad (4.37)$$

Estas líneas son mostradas en la figura 4.19 (b). Nótese que la primera ecuación de arriba da un par de líneas paralelas con pendiente unitaria, y los otros dos pares dan líneas paralelas a los ejes coordenados.

Para el caso general, dónde las tres tensiones principales normales son distintas de cero los contorno de la región de no fluencia son obtenidas de la ecuación 4.33.

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \pm \sigma_f, \quad \sigma_2 - \sigma_3 = \pm \sigma_f, \quad \sigma_1 - \sigma_3 = \pm \sigma_f \quad (4.38)$$

Cada uno de los cuales da un par de planos inclinados los cuales son paralelos a la dirección de la tensión principal que no aparece en la ecuación.

Por ejemplo, la primera ecuación representa un par de planos paralelos a la dirección de σ_3

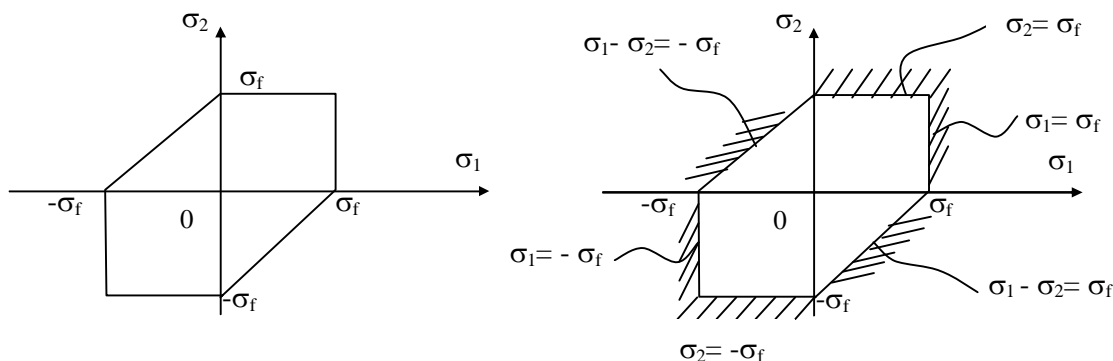


Fig. 4.19: Localización de la falla para el criterio de la máxima tensión tangencial para EPT.

Estos tres pares de planos forman un tubo con una sección transversal hexagonal (ver Fig. 4.20). El eje del tubo es la línea:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \tag{4.39}$$

El diagrama de la siguiente figura es particularmente interesante pues permite visualizar a escala un estado de tensión tridimensional.

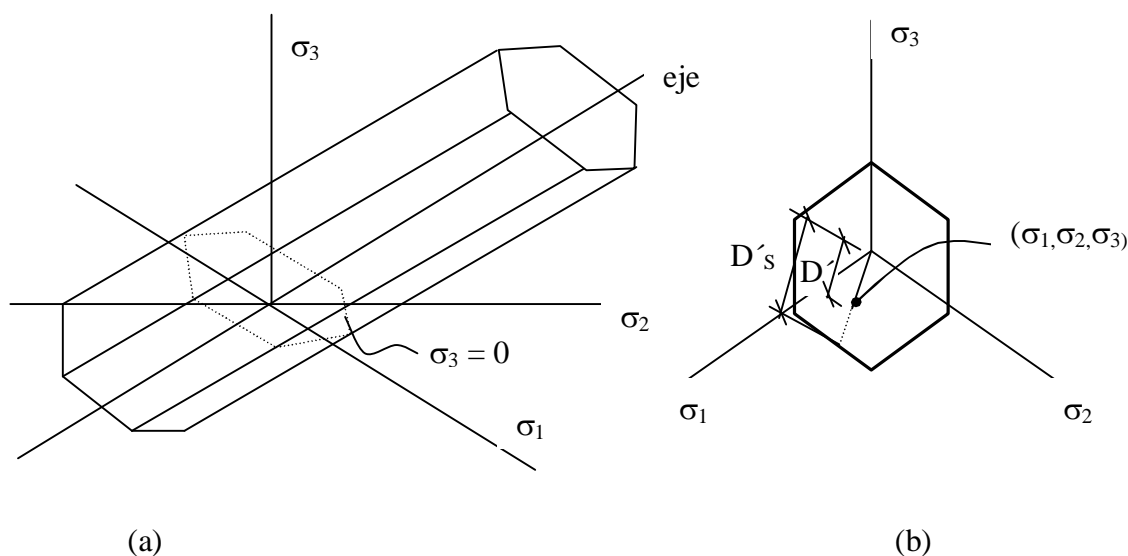


Fig. 4.20: Superficie de falla tridimensional para el criterio de fluencia de la máxima tensión tangencial. a) El límite del principio de fluencia está representado por un prisma hexagonal del cual el eje es la diagonal ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$). b) El sistema de ejes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ está ilustrado según una proyección isométrica.

4.2.3.4 Las Tensiones Hidrostáticas y el Criterio de la Máxima Tensión de Corte

Consideremos el caso especial de un estado tensional en el que las tensiones principales son todas iguales:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_h \tag{4.40}$$

De forma tal que es un estado de tensión hidrostática σ_h .

Por ejemplo, el material podría estar sujeto a una presión p , de forma tal que $\sigma_h = -p$. Este caso corresponde a un punto sobre el eje del cilindro hexagonal, de fig 4.20. Para tal punto, la tensión

efectiva o de comparación σ_{cs} de ecuación 4.34 es siempre cero, y entonces, el factor de seguridad contra la fluencia es **infinito**.

Así, el criterio de la M.T.T. predice que presiones hidrostáticas actuando solas no producirán la falla. Esto parece ser sorprendente, pero de hecho concuerda con resultados experimentales en metales bajo compresión hidrostática. Los ensayos en tracción hidrostática son esencialmente imposibles, pero probablemente ocurriría la fractura frágil, sin fluencia, para altos niveles de tensiones, aún en materiales normalmente dúctiles.

La interpretación del factor de seguridad en términos de longitud de líneas desde el origen en un espacio de tensiones principales es también válida para el criterio de la MTT.

Para los casos tridimensionales, pueden usarse las proyecciones de las longitudes normales al eje. Esto es debido a que se espera que las tensiones afecten la fluencia sólo en la medida en que ellas se desvían del eje del tubo hexagonal.

$$v = D's / D' \quad (4.41)$$

Donde $D's$ es la distancia proyectada correspondiente a la fluencia, y D' a las tensiones aplicadas (ver fig. 4.20 b).

Ejemplo 1:

Un punto de una pieza de material cuyo $\sigma_f = 3030 \text{ kg/cm}^2$, es sometido al siguiente estado de tensiones: $\sigma_x = 500$; $\sigma_y = 1000$; $\tau_{xy} = 600 \text{ kg/cm}^2$. ¿Cuál es el factor de seguridad contra la fluencia?

Solución: Primero, notemos que estamos en un caso de EPT, determinamos las tensiones principales normales a partir del círculo de Mohr o de ecuaciones ya conocidas:

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \sigma_1 ; \sigma_2 = 1400 ; 100 \text{ kg/cm}^2$$

La tercer tensión principal normal es: $\sigma_3 = 0$

La ecuación 4.34 da entonces la tensión efectiva o de comparación para el criterio de M.T.T.

$$\sigma_{cs} = \text{MAX}(|\sigma_1 - \sigma_2|; |\sigma_2 - \sigma_3|; |\sigma_3 - \sigma_1|)$$

$$\sigma_{cs} = \text{MAX}(|\sigma_1 - \sigma_2|; |\sigma_2|; |-\sigma_1|)$$

$$\sigma_{cs} = \text{MAX}(|1400 - 100|; |100|; |-1400|) = 1400 \text{ kg/cm}^2$$

Por lo tanto el factor de seguridad contra la falla es:

$$v = \frac{\sigma_f}{\sigma_{cs}} = \frac{3030}{1400} = 2,16$$

Ejemplo 2:

Consideremos un tubo hueco de pared delgada cerrado en sus extremos y con una presión externa p . El espesor de la pared es “ t ”, el radio interno es “ r ”, y el material dúctil tiene una resistencia de fluencia σ_f . Encontrar una ecuación para el espesor requerido correspondiente a los valores de r y un factor de seguridad de v contra la fluencia.

Solución: De acuerdo a lo que vimos en la materia:

$$\sigma_x = \frac{p \cdot r}{t} \text{ dirección tangencial} \quad \sigma_y = \frac{p \cdot r}{2t} \text{ dirección longitudinal} \quad \sigma_z = -p \text{ dirección radial}$$

Asumiendo que r/t es relativamente grande, σ_z es pequeña comparada con σ_x y σ_y , de forma tal que el problema puede simplificarse adoptando $\sigma_z = 0$ como una aproximación.

Debido a que no hay tensiones tangenciales aplicadas, las tensiones de arriba son tensiones principales.

$$\sigma_1 = \sigma_x = \frac{p \cdot r}{t}, \quad \sigma_2 = \sigma_y = \frac{p \cdot r}{2t}, \quad \sigma_3 = \sigma_z = 0$$

De la ecuación 4.34, la tensión efectiva para el criterio de la M.T.T. es:

$$\sigma_{CS} = \text{MAX}(|\sigma_1 - \sigma_2|; |\sigma_2 - \sigma_3|; |\sigma_3 - \sigma_1|)$$

$$\sigma_{CS} = \text{MAX}\left(\left|\frac{p \cdot r}{t} - \frac{p \cdot r}{2t}\right|; \left|\frac{p \cdot r}{2t} - 0\right|; \left|0 - \frac{p \cdot r}{t}\right|\right) = \frac{p \cdot r}{t}$$

El factor de seguridad contra la fluencia es:

$$v = \frac{\sigma_f}{\sigma_{CS}} = \frac{\sigma_f \cdot t}{p \cdot r}$$

el cuál da el espesor requerido: $t = \frac{X \cdot p \cdot r}{\sigma_f}$

4.2.4.1 CRITERIO DE FALLA DE LA MAXIMA ENERGIA DE DISTORSION. (también conocido como teoría de Hubert-Mises-Hencky)

Este es otro criterio comúnmente empleado para metales dúctiles, y dice que el principio de fluencia se produce cuando la energía de distorsión alcanza un valor crítico.

De acuerdo a lo visto anteriormente en este capítulo, la energía de distorsión (o energía por variación de forma) por unidad de volumen en base a las tensiones principales viene dada por:

$$u = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2] \quad (4.42)$$

Para el caso de carga uniaxial, y el valor de la tensión de fluencia

$$u^* = \frac{1+\mu}{6E} [2 \sigma_f^2] \quad (4.43)$$

Podemos considerar que u^* constituye el valor crítico como la cuestión señalada en el enunciado del criterio de Von Mises para el caso del ensayo uniaxial. De ahí:

$$\sigma_f = \frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2] \quad (4.44)$$

Para el caso de EPT donde $\sigma_1 \neq 0$; $\sigma_2 \neq 0$; $\sigma_3 = 0$, la expresión queda

$$\sigma_f^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 \quad (4.45)$$

Para el **estado plano de tensiones**, en términos de las tensiones cartesianas, podemos escribir que:

$$u_f = \frac{(1+\mu)}{3E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3 \cdot \tau_{xy}^2]$$

Para el estado de tracción simple, resulta:

$$u_f = \frac{(1+\mu)}{3E} [\sigma_L^2] \quad \text{con} \quad \sigma_L = \sigma_n \quad \text{ó} \quad \sigma_R \quad \text{ó} \quad \sigma_{ADM}$$

Resultando la tensión efectiva o de comparación:

$$\sigma_c = \bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3 \cdot \tau_{xy}^2} \leq \sigma_L$$

4.2.4.2 Representación gráfica del criterio de máxima energía de distorsión.

La expresión (4.45) es la ecuación de una elipse con su eje mayor a lo largo de la línea $\sigma_1 = \sigma_2$ la cual cruza los ejes en los puntos $\pm\sigma_f$. Nótese que la elipse tiene inscrito dentro el hexágono distorsionado del criterio de la máxima tensión tangencial.

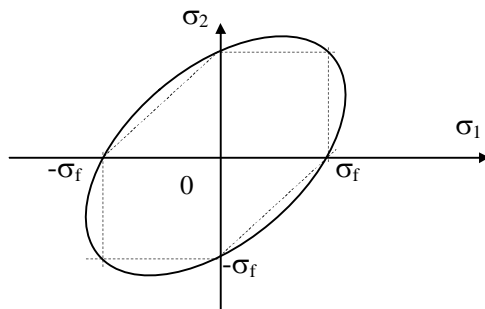


Fig. 4.21: Localización de falla para el criterio de fluencia de la máxima energía de distorsión para EPT y su comparación con el criterio de la máxima tensión de corte.

Para el caso general, dónde las tres tensiones principales pueden ser distintas de cero, el contorno de la región de no falla como la especificada por la ecuación 4.44 representa una superficie cilíndrica circular con su eje a lo largo de la línea $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. (ver fig. 4.22). La vista a lo largo del eje del cilindro da un círculo.

Si cualquiera de las tensiones σ_1 , σ_2 , σ_3 , es cero, entonces la intersección de la superficie cilíndrica con el plano de las dos tensiones principales restantes da la elipse de la fig 4.21

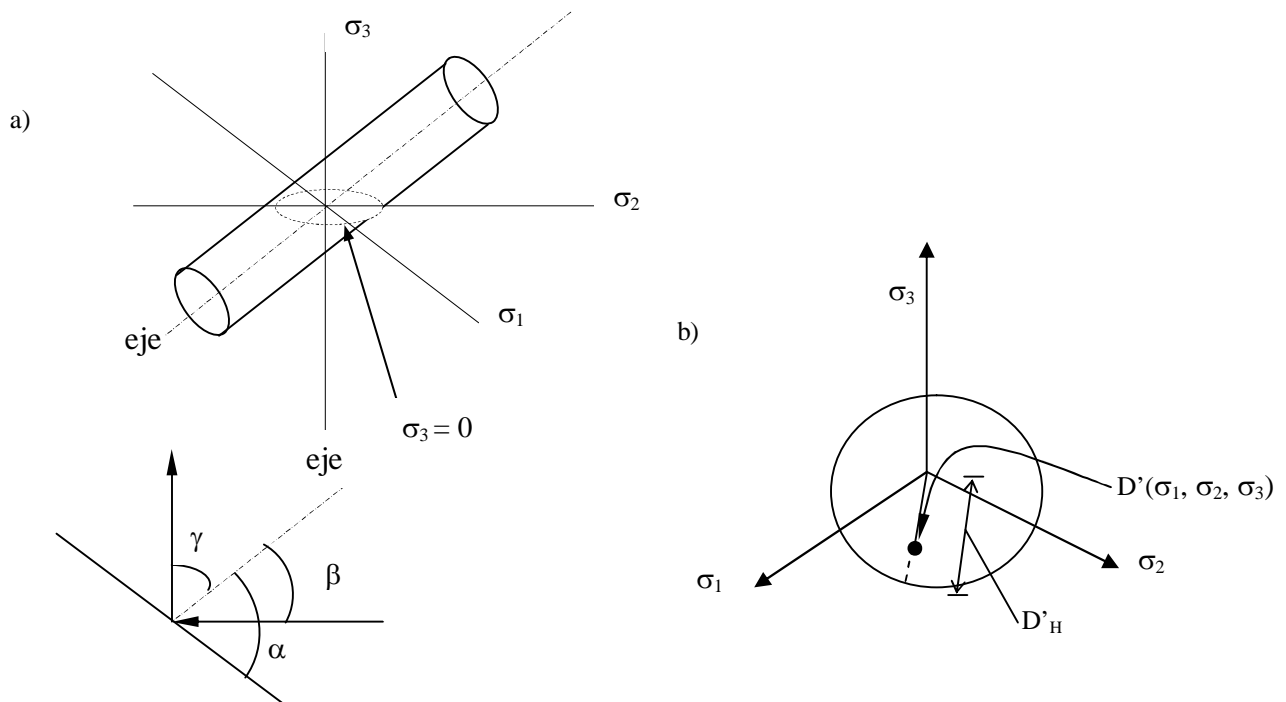


Fig. 4.22: Superficie de falla tridimensional para el criterio de fluencia de la máxima energía de distorsión.

El factor de seguridad contra la fluencia puede interpretarse similarmente en términos de las distancias desde el eje del cilindro (ver fig. 4.22 b). La superficie de fluencia de forma de tubo hexagonal del criterio de la máxima tensión de corte, es de hecho inscrita dentro de la superficie cilíndrica del criterio de energía de distorsión.

Ejemplo de Aplicación.

Un punto de una pieza está solicitado según el siguiente estado tensional: $\sigma_x = -500 \text{ kg/cm}^2$; $\sigma_y = +1000 \text{ kg/cm}^2$; $\tau_{xy} = +600 \text{ kg/cm}^2$. Si el material tiene una tensión de fluencia $\sigma_f = 3030 \text{ kg/cm}^2$, determinar el Coeficiente de Seguridad aplicando: a) Criterio de Guest-Tresca ($\tau_{\text{máx}}$). b) Criterio de Von Mises (Energía de distorsión)

Cálculo de tensiones principales:

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{-500 + 1000}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-500 - 1000}{2}\right)^2 + (600)^2}$$

$$\sigma_1 = 1210 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_2 = -710 \text{ kg/cm}^2$$

Para cada criterio, calculamos el valor de la tensión efectiva $\sigma = f(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)$, tal como se indica en la teoría del capítulo. En base a ello el factor de seguridad contra la falla $v = \sigma_{\text{falla}}/\sigma_c = \sigma_f/\sigma_c$

a) s/ criterio de $\tau_{\text{máx}}$

Para nuestro caso las tensiones principales tienen distinto signo; calculamos σ en base a:

$$\sigma_c = \sigma_1 - \sigma_2 = 1210 + 710 = 1920 \text{ kg/cm}^2$$

$$v = \frac{3030}{1920} = 1,578$$

b) s/ criterio de Von Mises.

En este caso recurrimos a la expresión

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2$$

$$\sigma^2 = (1210)^2 + (710)^2 + 1210 \times 710 ; \sigma = 1681 \text{ kg/cm}^2$$

$$v = \frac{3030}{1681} = 1,802$$

Los valores calculados nos indican que el criterio de las tensiones tangenciales máximas es más conservativo que el de la energía de distorsión.

Ayuda a interpretar el significado de los factores de seguridad, recurrir a los gráficos con los cuales representamos los criterios de falla.

4.2.5 Discusión y comparación de los criterios de falla básicos.

Los tres criterios de falla discutidos hasta aquí, pueden considerarse como básicos entre la cantidad de criterios disponibles.

Tanto el criterio de la máxima tensión de corte como el de la máxima energía de distorsión, son ampliamente utilizados para predecir la fluencia en materiales dúctiles, especialmente metales.

Recordemos que en ambos criterios la presión hidrostática no afecta la fluencia, y que la superficie de fluencia del tubo hexagonal del criterio de la máxima tensión tangencial está inscripto dentro de superficie del cilindro circular del criterio de la energía de distorsión. Por ello estos dos criterios nunca dan predicciones dramáticamente diferentes para el comportamiento en fluencia bajo tensiones

combinadas, no existiendo estado de tensiones donde las diferencias excedan el 15%. Esto puede verse en la fig. 4.23, dónde la distancia del eje del cilindro a las dos superficies de fluencia difieren en su cantidad máxima en los puntos dónde el círculo está más alejado del hexágono.

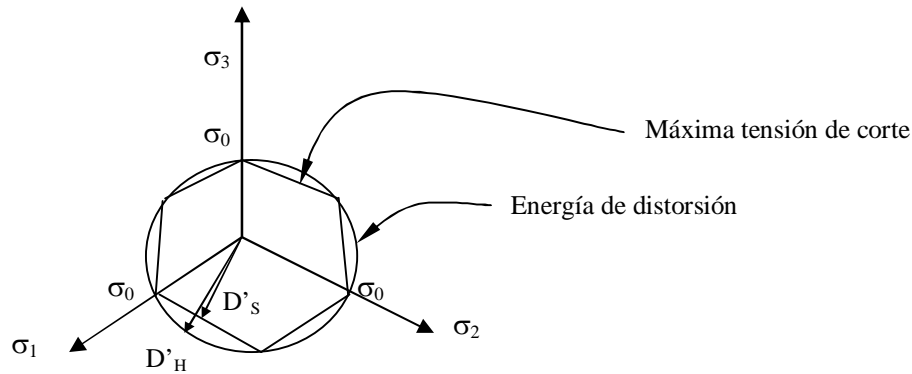


Fig. 4.23

De la geometría, la distancia en esos puntos tiene una relación de $2/\sqrt{3} = 1,155$. Debido a esto el factor de seguridad y las tensiones efectivas para un estado de tensiones dado, no puede diferir en más de esa cantidad.

Para EPT, $\sigma_3 = 0$, tal desviación máxima ocurre para corte puro, dónde $\sigma_1 = -\sigma_2 = |\tau|$, y también para $\sigma_1 = 2\sigma_2$, como en la carga de presión de un tubo de pared delgada con sus extremos cerrados.

De cualquier manera nótese que en algunas situaciones el criterio de la máxima tensión tangencial y el de la energía, dan predicciones sobradamente diferentes que el de la máxima tensión normal. Comparemos la superficie de fluencia tubular de ambos con el cubo de la fig. 4.17, y consideremos estados de tensiones cercanas al eje del tubo ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) pero bien mas allá de los contornos del cubo. Para EPT, se comparan los tres criterios en fig. 4.24.

Dónde ambas tensiones principales tienen el mismo signo, el criterio de la máxima tensión tangencial es equivalente al de la máxima tensión normal. Así mismo, si las tensiones principales tienen distinto signo, el criterio de la máxima tensión normal difiere considerablemente de los otros dos.

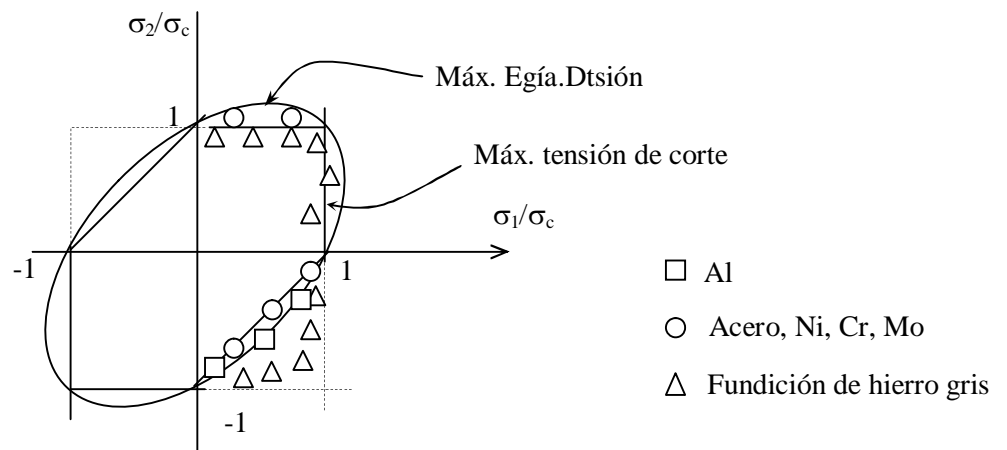


Fig. 4.24 Localización de falla para EPT para los tres criterios

El método más conveniente para comparar experimentalmente criterios de falla es ensayar tubos huecos de pared delgada bajo varias combinaciones de esfuerzo axial, torsión y presión, produciendo así varios estados planos de tensiones. Algunos datos obtenidos de esta manera para fluencia de material dúctil y fractura de material frágil se muestran en la figura 4.24.

El acero de fundición gris sigue el criterio de la tensión normal, mientras que los datos de fluencia tienden a caer entre los dos criterios de fluencia, quizás coincidiendo mejor en general con el criterio de la energía de distorsión máxima.

El criterio de la máxima tensión tangencial es más conservador. Basado en datos experimentales para metales dúctiles similares a los de la figura 4.24, este criterio parece presentar un límite inferior que es raramente violado.

La diferencia máxima del 15% entre los dos criterios de fluencia es relativamente pequeña comparado con los factores de seguridad comúnmente utilizados y las incertidumbres usualmente involucradas en el diseño mecánico, de esa forma la elección entre los dos carece de mayor importancia. Si se desea ser conservador, debería elegirse el criterio de la máxima tensión tangencial.

4.2.6 Teoría de Mohr

“Los límites de fluencia y de rotura de un material quedan definidos por las tensiones que desarrollan en los planos de deslizamientos y fractura. La tensión tangencial en el plano de fractura o escurrimiento alcanza para el estado límite un valor máximo, que es función de la correspondiente tensión normal y de las características del material”.

Supongamos un punto sujeto a un determinado estado de tensión y hagamos crecer las tensiones principales σ_1 y σ_2 hasta alcanzar la rotura si se trata de un material frágil, o el comienzo de la fluencia si es dúctil. Alcanzando el estado de rotura dibujemos la circunferencia de Mohr. Repitiendo el concepto para otros estados de tensión obtendremos toda una familia de circunferencias que corresponden a estados de rotura. La curva envolvente se denomina “envolvente de Mohr o curva de resistencia intrínseca”.

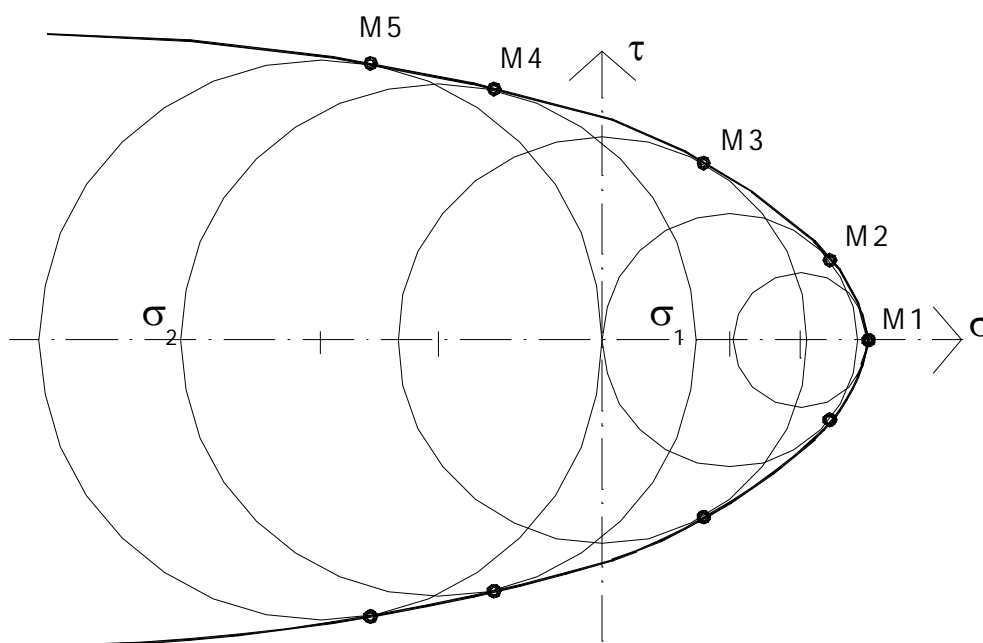


Fig. 4.25

Dado un estado de tensión, el mismo será determinante de la rotura o fluencia si la circunferencia de Mohr corta la curva o es tangente a la misma.

La dificultad de esta teoría radica en que la curva intrínseca puede conocerse en forma experimental. Sin embargo, tiene una ventaja importante en cuanto a que es más general que las anteriores, siendo aplicable tanto a materiales dúctiles como frágiles, aunque responde más a las características de rotura de los últimos.

Una de las aplicaciones más importantes que tiene la teoría de Mohr es en la Mecánica de Suelos, para el estudio de la capacidad portante de los mismos.

Aplicación Teorías de Falla.

Hasta aquí el tema ha sido expuesto considerando que sobre el elemento sometido a un estado de tensiones combinado (circunstancia que genera dudas respecto a su condición de resistencia), actúan tensiones principales que las identificamos como σ_1 , σ_2 ó σ_3 . Mediante distintas hipótesis comparamos dicho estado de tensiones combinado, con la capacidad del mismo material en un ensayo de tracción simple al momento de la falla, tomando como dato la tensión σ_{fl} si fuera dúctil o la σ_{rot} si fuera frágil.

Desde el punto de vista del dimensionamiento o de la verificación, normalmente lo que pretendemos es que con sus dimensiones el elemento en estudio sea capaz de resistir los esfuerzos a los que va a ser sometido, con un cierto grado de seguridad. Para ello lo que se hace es tomar como referencia un valor admisible como valor máximo para las tensiones (en lugar del valor de falla); es decir, tomar como tensión de comparación $\sigma_c = \sigma_{adm}$.

En determinadas circunstancias, puede resultar conveniente disponer de ecuaciones donde el estado de tensiones combinado, esté referido a la nomenclatura general (Ej: σ_x , σ_y , τ_{xy}), en lugar de las tensiones principales.

En base a los párrafos anteriores, **dado un Estado Plano de Tensiones**, para cada Hipótesis las ecuaciones a utilizar serían:

a) Teoría de la Máxima Tensión Normal (Rankine)

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_c = \sigma_{adm}$$

b) Teoría de la Máxima Tensión Tangencial (Guest- Tresca)

b1) Para tensiones principales de distinto signo

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_c}{2}$$

$$\sigma_c = \sigma_{adm} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

b2) Para tensiones principales del mismo signo

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_1}{2}$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_2}{2}$$

En este caso debemos tomar la tensión de mayor valor absoluto, con lo cual la ecuación a utilizar es la misma que en la teoría anterior

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

c) Teoría de la Máxima Energía de Distorsión (H. M. Hencky)

$$u_F = \frac{(1+\mu)}{3E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2]$$

$$u_F = \frac{(1+\mu)}{3E} \sigma_c^2$$

$$\sigma_{adm} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2}$$