

# 5

## TORSIÓN

### 5.1 INTRODUCCION

Podemos decir que un cuerpo está sujeto en una sección a torsión simple, cuando la reducción de las fuerzas actuantes sobre éste, a un lado de la sección, da como resultado una cupla que queda contenida en el plano de la misma.

La solución rigurosa del problema, para cualquier sección sólo puede obtenerse aplicando la Teoría de la Elasticidad, lo que escapa a los alcances de este curso. Con las herramientas de que disponemos en la Resistencia de Materiales vamos a realizar el estudio para algunas secciones particulares tales como la circular, la anular y los tubos de paredes delgadas, para las cuales la solución se encuentra planteando hipótesis muy sencillas. Para otras secciones tales como las rectangulares o los perfiles laminados, solamente analizaremos los resultados.

El problema de torsión simple se presenta muy pocas veces, ya que en general aparece la torsión combinada con flexión y corte. Sin embargo, lo que estudiaremos es totalmente general, dado que aplicando el principio de superposición de efectos, a partir del problema de torsión simple puede llegarse a otros casos de torsión compuesta.

### 5.2 SECCION CIRCULAR

Para esta sección es válida la hipótesis de Coulomb, la cual se verifica experimentalmente tanto en el caso de secciones circulares macizas como huecas. La hipótesis referida establece que las secciones normales al eje de la pieza permanecen planas y paralelas a sí misma luego de la deformación por torsión. Además, luego de la deformación, las secciones mantienen su forma.

Como consecuencia de lo enunciado resulta que las secciones tienen rotaciones relativas, de modo que las rectas trazadas sobre ellas continúan siendo rectas y los ángulos mantienen su medida. Por otro lado, las generatrices rectilíneas de la superficie lateral del cilindro se transforman en hélices. A partir de las consideraciones anteriores, que están relacionadas con la compatibilidad de las deformaciones, deseamos saber qué tipo de tensiones genera la torsión simple y cual es su distribución. Supongamos en primera instancia que aparecen tensiones normales  $\sigma$ . Su distribución no podría ser uniforme ya que de ser así existiría una resultante normal a la sección. Al distribuirse entonces en forma variable, según la Ley de Hooke, las deformaciones específicas  $\varepsilon$  variarán también punto a punto, y la sección no continuaría siendo normal al eje, no siendo válida la hipótesis de Coulomb, que indica que la sección se mantiene plana.

En virtud de lo anterior sólo resta considerar que en el problema de torsión aparecen únicamente tensiones tangenciales. A su vez, para que las tensiones constituyan un sistema estáticamente equivalente al momento torsor  $M_t$  debe ocurrir que:

$$\int_{\Omega} \tau_{zx} \, d\Omega = 0 \quad (5.1)$$

$$\int_{\Omega} \tau_{zy} \, d\Omega = 0 \quad (5.2)$$

$$\int_{\Omega} (\tau_{zx} y + \tau_{zy} x) d\Omega = Mt \quad (5.3)$$

Resulta evidente que si tomamos un elemento diferencial en coincidencia con el borde de la sección, la tensión tangencial  $\tau$  deberá ser tangente a la circunferencia, ya que de no ser así existirá una componente de  $\tau$  radial, la que, por Cauchy, originaría una tensión tangencial aplicada sobre una generatriz del cilindro. Esto que ocurre en el borde puede admitirse que también acontece en el interior, con lo que las tensiones tangenciales deberían ser normales al radio. Además, para que puedan cumplirse las ec. 5.1 y 5.2 debe ocurrir que las tensiones tangenciales sean antimétricas a lo largo de los diámetros de la sección.

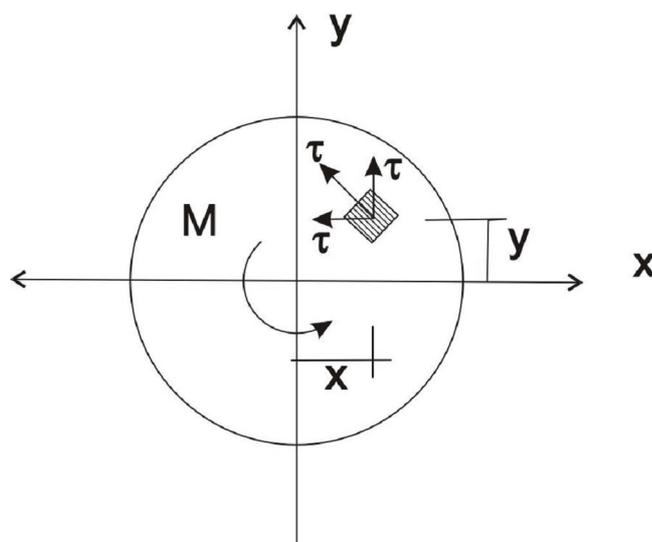


Fig. 5.1

De lo visto podemos obtener algunas conclusiones:

- sólo existen tensiones tangenciales
- su distribución a lo largo de un diámetro es antimétrica
- su dirección es normal al radio

A continuación trataremos de establecer la ley de distribución de las tensiones. Para ello consideramos que aislamos de una barra torsionada una tajada de longitud unitaria. El ángulo que giran ambas secciones será  $\theta$ , y como la separación entre las secciones es la unidad, a este ángulo la denominaremos “ángulo específico de torsión”.

$$\widehat{AA'} = r \theta \cong \gamma \cdot 1 \rightarrow \theta = \frac{\gamma}{r}$$

$$\widehat{BB'} = R \theta \cong \gamma_R \cdot 1 \rightarrow \theta = \frac{\gamma_R}{R} \quad (5.4)$$

$$\frac{\gamma}{r} = \frac{\gamma_R}{R} \rightarrow \gamma = \frac{\gamma_R}{R} r$$

El ángulo  $\gamma$  resulta ser el “ángulo de distorsión” de la sección. Debemos tener presente que si el ángulo  $\theta$  es pequeño entonces los arcos se confunden con las tangentes, lo que permite establecer  $\gamma \cong \text{tg } \gamma$ .

De acuerdo a la ley de Hooke:

$$\tau = \gamma G \cong \frac{\gamma_R}{R} G r = \theta G r \quad (5.5)$$

$$\tau = \theta G r$$

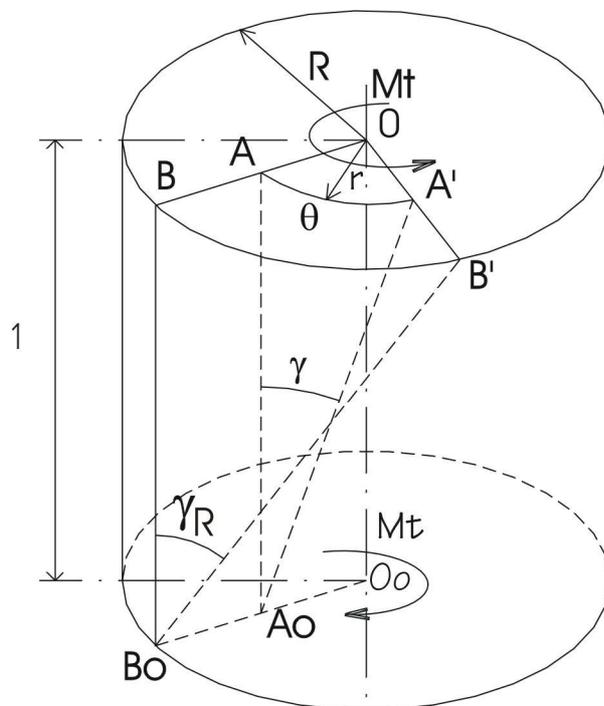


Fig. 5.2

De la expresión 5.5 se puede apreciar que las tensiones tangenciales varían linealmente con el radio, alcanzando su valor máximo en el borde de la sección:

$$\tau_{\max} = G \theta R$$

$$Mt = \int_{\Omega} \tau r \, d\Omega = \int_{\Omega} G \theta r^2 \, d\Omega$$

$$Mt = G \theta \int_{\Omega} r^2 \, d\Omega = G \theta I_p$$

$$\theta = \frac{Mt}{G I_p} \quad (5.6)$$

$$\tau = \frac{Mt}{I_p} r \quad (5.7)$$

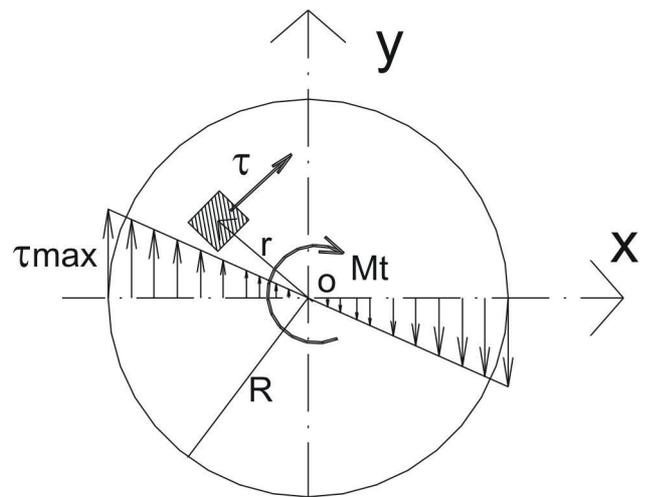


Fig. 5.3

El ángulo de torsión específico  $\theta$  resulta directamente proporcional al momento torsor e inversamente proporcional al producto  $G \cdot I_p$  que recibe el nombre de “Rigidez a la torsión” y que mide la resistencia a dejarse retorcer.

Para el dimensionamiento debemos tener acotado el valor de la tensión tangencial máxima.

$$\tau_{\max} = \frac{Mt}{I_p} R = \frac{Mt}{\frac{I_p}{R}} = \frac{Mt}{W_p} \quad (5.8)$$

$W_p$  = módulo o momento resistente polar

$$\tau_{\max} = \frac{Mt}{W_p} \leq \tau_{\text{adm}} \rightarrow W_p \geq \frac{Mt}{\tau_{\text{adm}}} \quad (5.9)$$

$$W_p = \frac{\pi D^4 / 32}{D/2} = \frac{\pi D^3}{16} \rightarrow D \geq \sqrt[3]{\frac{16 Mt}{\pi \tau_{\text{adm}}}}$$

En determinadas circunstancias interesa conocer el valor de la rotación relativa de las secciones extremas de una barra circular sujeta a torsión. Este ángulo se denomina “ángulo de torsión” y resulta ser la suma de todos los ángulos específicos de torsión entre todas las tajadas elementales de la pieza.

$$\phi = \int_1 \theta \, dl = \int_1 \frac{Mt}{G I_p} \, dl \quad (5.10)$$

Para el caso particular en que  $I_p$  y  $M_t$  sean constantes en todo el cuerpo entonces:

$$\phi = \theta l = \frac{Mt l}{G I_p} \quad (5.11)$$

Si interesa evaluar la energía de deformación absorbida en la torsión, su expresión es la siguiente:

$$\begin{aligned} u_{\tau} &= \frac{\tau^2}{2G} \\ U &= \int_{\text{vol}} u_{\tau} d\text{Vol} = \int_{\text{vol}} \frac{\tau^2}{2G} d\Omega \cdot dl \\ U &= \int_1 dl \int_{\Omega} \left( \frac{Mt \cdot r}{I_p} \right)^2 \frac{1}{2G} d\Omega \\ U &= \int_1 \frac{Mt^2}{2GI_p^2} dl \int_{\Omega} r^2 d\Omega \quad ; \text{si } I_p = \int_{\Omega} r^2 d\Omega \quad (5.12) \\ U &= \int_1 \frac{Mt^2}{2GI_p} dl \end{aligned}$$

Si analizamos un elemento diferencial del interior de una barra circular torsionada encontraremos un estado de corte puro. Como ya hemos visto, para este caso las tensiones principales resultan iguales en valor absoluto y de signo contrario e iguales al valor de las tensiones tangenciales. Además actúan a  $45^\circ$  con respecto a los planos de las secciones, formando superficies helicoidales.

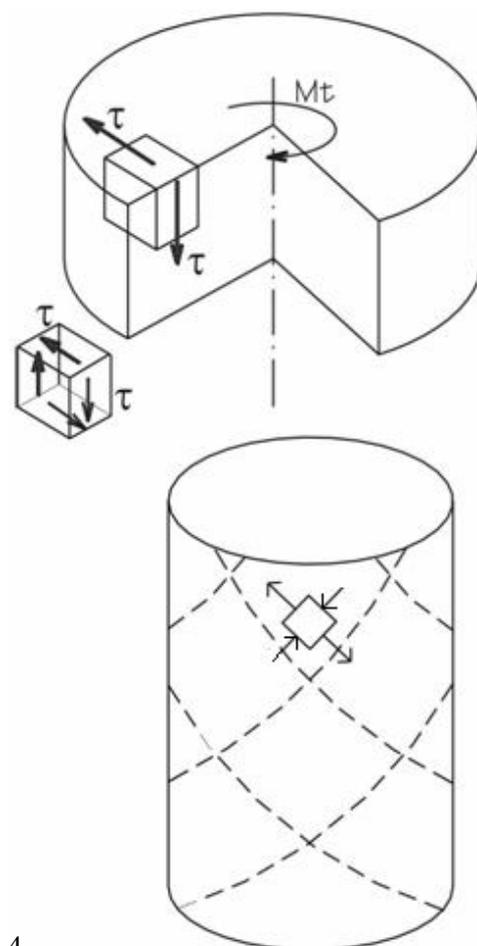


Fig. 5.4

### 5.3 SECCIÓN ANULAR

El análisis de este tipo de sección se efectúa partiendo de las fórmulas deducidas para la sección circular llena. La única condición es que debe limitarse la variación de  $r$  entre el radio exterior y el interior.

$$\tau_{\max} = \frac{16 Mt}{\pi D_2^3 \left( 1 - \frac{D_1^4}{D_2^4} \right)} \quad (5.13)$$

Vamos a comparar la eficiencia de una sección anular para absorber torsión con relación a una sección maciza de igual resistencia.

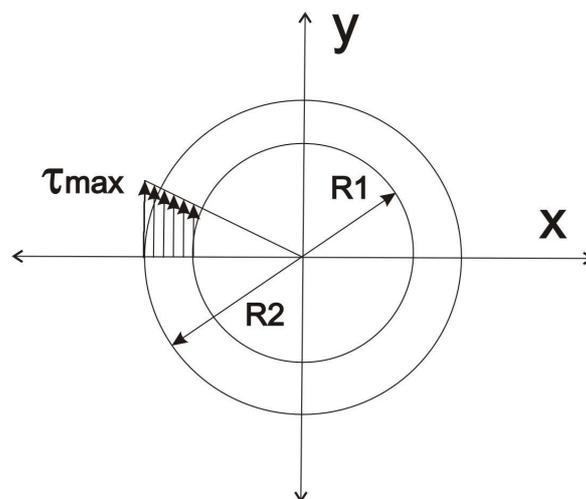


Fig. 5.5

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\max_m} &= \frac{16 Mt}{\pi D^3} \\ \tau_{\max_h} &= \frac{16 Mt}{\pi D_2^3 \left(1 - \frac{D_1^4}{D_2^4}\right)} \end{aligned} \right\} \tau_{\max_m} = \tau_{\max_h} \rightarrow D^3 = D_2^3 \left(1 - \frac{D_1^4}{D_2^4}\right) \quad (5.14)$$

$$\alpha = \frac{D_1}{D_2} \rightarrow D = D_2 \sqrt[3]{1 - \alpha^4}$$

D: diámetro de la sección maciza igualmente resistente a la hueca.

$$\left. \begin{aligned} \Omega_m &= \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi}{4} D_2^2 \sqrt[3]{(1 - \alpha^4)^2} \\ \Omega_h &= \frac{\pi}{4} (D_2^2 - D_1^2) = \frac{\pi}{4} D_2^2 (1 - \alpha^2) \end{aligned} \right\} \frac{\Omega_m}{\Omega_h} = \psi = \frac{(1 - \alpha^4)^{2/3}}{1 - \alpha^2} \quad (5.15)$$

Puede verse que,  $\psi \geq 1$ , lo que significa que la sección hueca es más conveniente que la sección llena ya que siempre se requiere menor área para resistir el mismo esfuerzo. No debemos confundir área con diámetro, ya que para igual resistencia el diámetro de la sección maciza será menor que el exterior de la hueca. Lo que importa es que aún con menor diámetro, la sección maciza es siempre más pesada y por ende más cara.

Lo que concluimos recientemente se debe a que las tensiones desarrolladas en la parte central de la sección maciza son muy pequeñas y no tienen un aporte muy significativo, por lo que para resistir a la torsión las secciones más convenientes son las huecas. En efecto, si considero una sección anular tal que  $D_2 = 2 D_1$ , o sea  $\alpha = 0.50$ , obtendremos  $\psi = 1.28$ . Vemos entonces que la sección maciza igualmente resistente es un 28% más pesada que la anular.

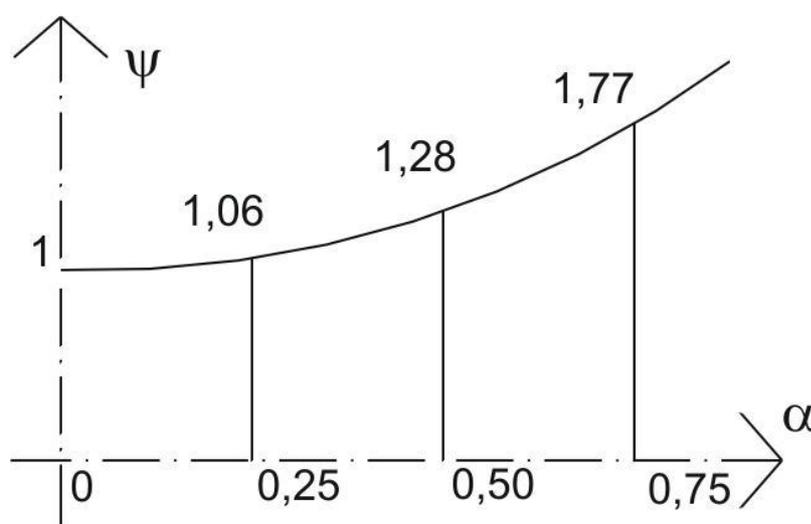


Fig. 5.6

## 5.4 SECCIÓN TUBULAR CERRADA DE PEQUEÑO ESPESOR

Consideremos una sección tubular de forma arbitraria pero de paredes muy delgadas con relación a la menor dimensión de la misma (ver Fig. 5.7), sometida a torsión. Admitamos también que el espesor  $e$  del tubo varía en forma continua.

Debido al pequeño espesor del tubo es posible suponer que las tensiones tangenciales son constantes en intensidad y dirección a lo largo del espesor, y que la dirección coincide con la tangente al contorno medio de la sección en el punto considerado.

Si en una sección s-s tomamos un elemento diferencial de ancho e y longitud ds (ver Fig. 5.8), sobre el mismo actuará una fuerza elemental dT.

$$dT = \tau e ds \quad (5.16)$$

Si elegimos un punto cualquiera del plano de la sección y llamamos r a la distancia al mismo de la fuerza dT tendremos:

$$Mt = \int_s r dT = \int_s r e \tau ds \quad (5.17)$$

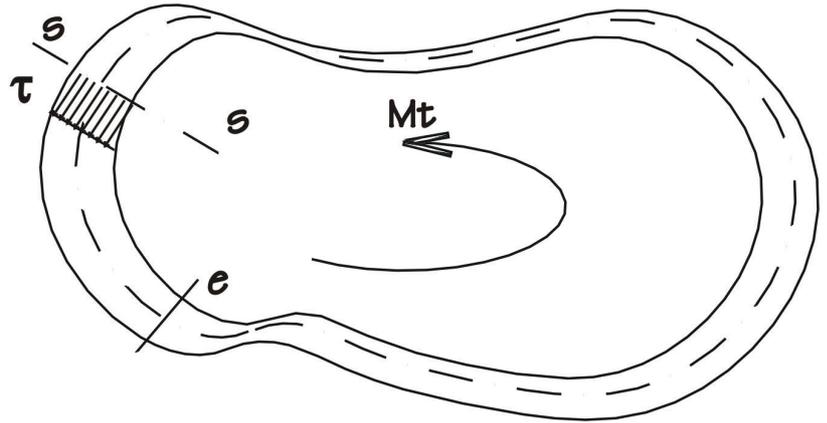


Fig.5.7

Si separamos del tubo una tajada de longitud unitaria y luego aislamos una porción seccionando al eje del tubo (Fig. 5.9), tendremos que según la ley de Cauchy aparecen tensiones verticales que dan dos resultantes T<sub>1</sub> y T<sub>2</sub>, las cuales deberán ser de igual intensidad por razones de equilibrio.

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \tau_1 e_1 l \\ T_2 &= \tau_2 e_2 l \end{aligned} \right\} \rightarrow \tau_1 e_1 = \tau_2 e_2$$

Dado que las secciones 1 y 2 son arbitrarias, de lo anterior podemos establecer:

$$\tau e = cte. \quad (5.18)$$

luego retomamos la ecuación 5.17 obtenemos:

$$\begin{aligned} Mt &= \int_s r e \tau ds = \tau e \int_s r ds \\ r ds &= 2 d\Omega \rightarrow Mt = 2 \tau e \underbrace{\int_{\Omega} d\Omega}_{\Omega} \\ \tau &= \frac{Mt}{2 e \Omega} \quad \text{Fórmula de Bredt} \end{aligned} \quad (5.19)$$

$\Omega$ : área que encierra la línea media de la sección

Puede verse que en este tipo de sección la tensión tangencial es inversamente proporcional al espesor de la misma, lo que significa que la tensión tangencial máxima ocurre en el lugar donde el espesor es mínimo.

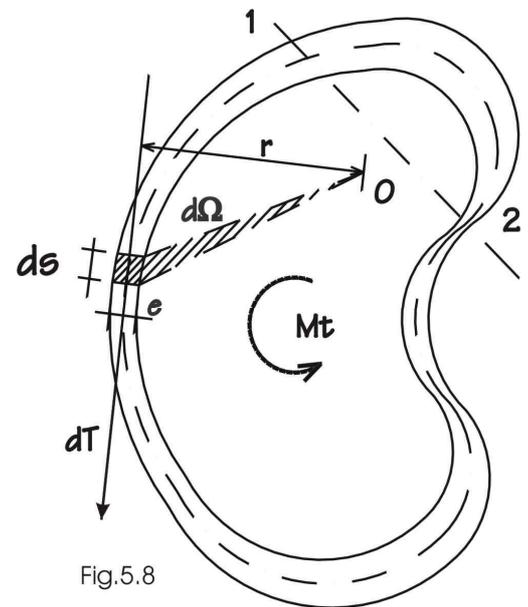


Fig.5.8

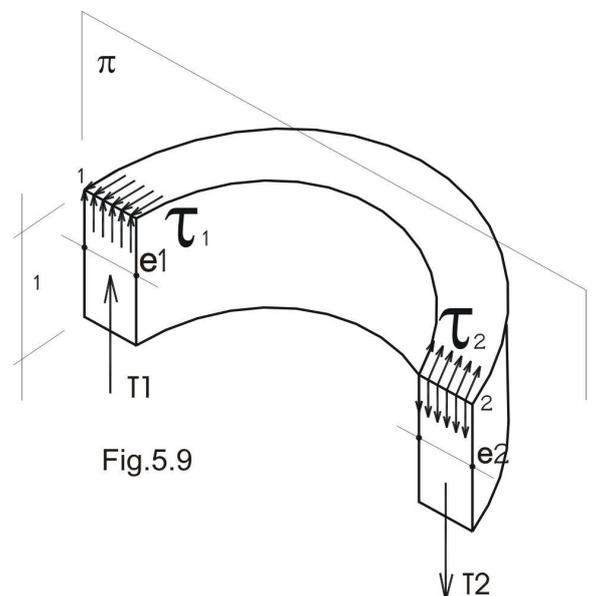


Fig.5.9

Si deseamos conocer el ángulo específico de torsión, podemos calcularlo a través de consideraciones energéticas.

$$T_{\text{ext}} = U$$

Si tomamos una porción del tubo de longitud unitaria, el giro relativo entre las dos secciones extremas será igual al ángulo específico de torsión.

$$\frac{Mt \theta}{2} = \int_V \frac{\tau^2}{2G} dV = 1 \times \int_{\Omega} \frac{Mt^2}{4 e^2 \Omega^2} \frac{1}{2G} d\Omega = \frac{Mt^2}{8 \Omega^2 G} \int_{\Omega} \frac{1}{e^2} \frac{d\Omega}{e} \quad (5.20)$$

$$\frac{Mt \theta}{2} = \frac{Mt^2}{8 \Omega^2 G} \int_s \frac{ds}{e} \rightarrow \theta = \frac{Mt}{4 \Omega^2 G} \int_s \frac{ds}{e}$$

## 5.5 SECCIONES DE OTRA FORMA

### 5.5.1 SECCIÓN RECTANGULAR

En barras de sección no circular, durante la torsión las secciones no permanecen planas, sino que se curvan (alabean).

Si el alabeo no es restringido, entonces en las secciones transversales no aparecen tensiones normales. Esta torsión se denomina torsión pura o libre.

El cálculo de las tensiones tangenciales en las barras de sección no circular representa un problema bastante complicado que se resuelve por los métodos de la Teoría de la Elasticidad.

Exponemos a continuación los resultados fundamentales para barras de sección rectangular cuando  $a > b$ .

Si la teoría desarrollada por Coulomb para la torsión circular fuera válida para la rectangular, en un punto como el A de la figura 5.10 debería existir una tensión tangencial  $\tau_A$  perpendicular al radio vector  $r_A$ , lo que daría componentes  $\tau_{zx}$  y  $\tau_{zy}$  no nulas, apareciendo tensiones  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{yz}$  exteriores que contradicen la hipótesis de torsión simple. La hipótesis de Coulomb no es entonces aplicable a la sección rectangular ni a otros tipos de secciones que difieren al circular.

La solución exacta del problema, atribuida a Saint Venant, como mencionamos antes, pertenece al dominio de la Teoría de la Elasticidad. En la figura 5.11 hemos indicado la ley de variación de las tensiones tangenciales, pudiendo apreciarse que la tensión tangencial máxima tiene lugar en el centro del lado mayor.

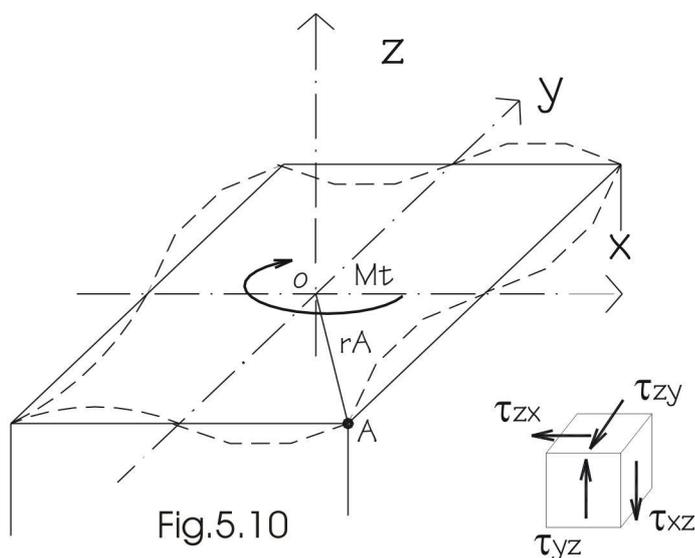


Fig.5.10

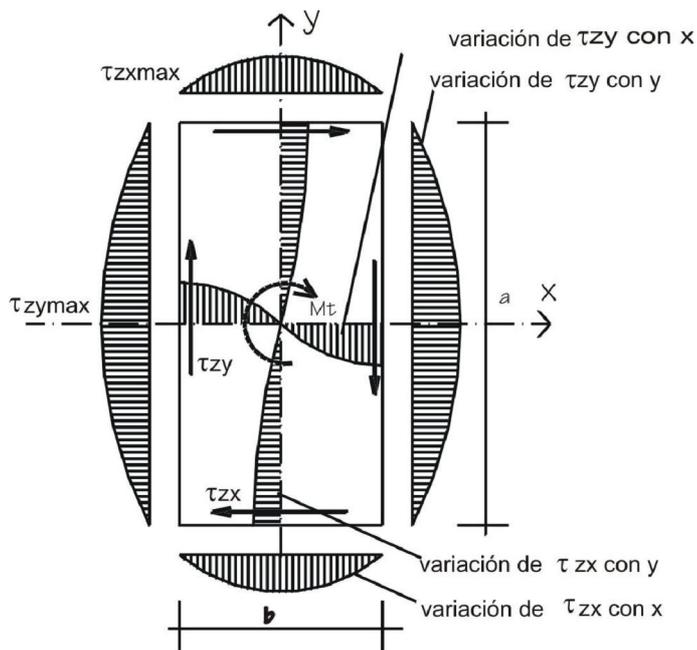


Fig. 5.11

Las tensiones tangenciales máximas y el ángulo específico de torsión pueden calcularse mediante las fórmulas 5.21, 5.22 y 5.23 respectivamente. Los coeficientes  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ , que son funciones de la relación de lados  $a/b$ , pueden obtenerse de la tabla 5.1.

$$\tau_{zy \max} = \frac{Mt}{\alpha a b^2} \tag{5.21}$$

$$\tau_{zx \max} = \gamma \tau_{zy \max} \tag{5.22}$$

$$\theta = \frac{Mt}{\beta a b^3 G} \tag{5.23}$$

a/b	1	1.5	1.75	2	2.5	3	4	6	8	10	$\infty$
$\alpha$	0.208	0.231	0.239	0.246	0.258	0.267	0.282	0.299	0.307	0.313	0.333
$\beta$	0.141	0.196	0.214	0.229	0.249	0.263	0.281	0.299	0.307	0.313	0.333
$\gamma$	1.00	0.859	0.820	0.795	0.766	0.753	0.745	0.743	0.742	0.742	0.742

Tabla 5.1

### 5.5.2 SECCIONES ABIERTAS DE PARED DELGADA

Para encontrar la solución a este problema se aplica un método denominado de la Analogía de la Membrana, el cual no lo desarrollaremos en este curso. Para este tipo de secciones se puede suponer una distribución lineal de tensiones a través del espesor. Además, la teoría mencionada muestra que las tensiones varían muy poco si se suponen enderezados los perfiles de modo de transformarse en rectángulos muy alargados.

Para rectángulos muy alargados resulta:

$$\tau_{\max} = \frac{Mt}{\frac{1}{3} a b^2} \quad (5.24)$$

$$\theta = \frac{Mt}{\frac{1}{3} a b^3 G} \quad (5.25)$$

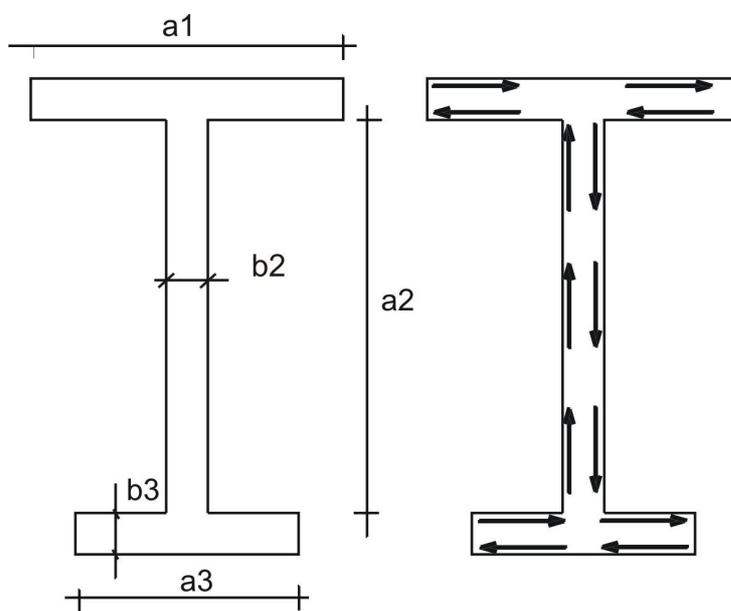


Fig.5.12

Las secciones abiertas pueden considerarse como un conjunto de rectángulos que absorben, cada uno de ellos, una parte del momento tordente  $M_t$ . Como estos rectángulos forman parte de una única pieza, todos tendrán el mismo giro específico de torsión.

Si llamamos:  $J_{ti} = \frac{1}{3} a_i b_i^3$

Entonces:  $M_{ti} = J_{ti} \theta G$

Donde  $M_{ti}$  corresponde al momento torsor que absorbe un rectángulo  $i$  cualquiera que constituye la sección.

$$\sum M_{tj} = M_t = (\sum J_{tj}) G \theta \rightarrow G \theta = \frac{M_t}{\sum J_{tj}}$$

$$M_{ti} = M_t \frac{J_{ti}}{\sum J_{tj}}$$

$$\tau_{\max i} = \frac{M_{ti}}{\frac{1}{3} a_i b_i^2} = \frac{M_t \frac{1}{3} a_i b_i^3}{\frac{1}{3} a_i b_i^2 \sum J_{tj}} = \frac{M_t b_i}{\sum J_{tj}}$$

$$\tau_{\max i} = \frac{M_t}{\frac{1}{3} \sum a_j b_j^3} b_i \quad (5.26)$$

$$\theta = \frac{Mt}{\frac{1}{3} \sum a_i b_i^3 G} \quad (5.27)$$

Usualmente el término  $\frac{1}{3} \sum a_i b_i^3 = J_t$  se denomina Momento de inercia torsional.

En el caso de perfiles laminados, el momento de inercia torsional resulta mayor que el calculado mediante la expresión anterior. Esto se debe a que los contornos redondeados incrementan la rigidez de la sección.

$$J_t = \eta \frac{1}{3} \sum a_i b_i^3 \quad (5.28)$$

- para perfiles doble T :  $\eta \cong 1.20 - 1.30$
- para perfiles U :  $\eta \cong 1 < \eta < 1.30$

Los perfiles abiertos no tienen una buena capacidad para resistir torsión. Vamos a tratar de evidenciar esto comparando las rigideces de dos secciones huecas, una cortada y otra entera.

$$\theta_1 = \frac{Mt}{4\Omega^2 G} \int \frac{ds}{e} = \frac{Mt}{4(\pi R_m^2)^2 G} \frac{2\pi R_m}{e}$$

$$\theta_1 = \frac{Mt}{G} \frac{1}{2\pi R_m^3 e}$$

$$\theta_2 = \frac{Mt}{\frac{1}{3}(2\pi R_m)^3 G}$$

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{1}{3} \left( \frac{e}{R_m} \right)^2$$

(5.29)

$$\text{Si } \frac{e}{R_m} = \frac{1}{10} \rightarrow \theta_2 = 300 \theta_1$$

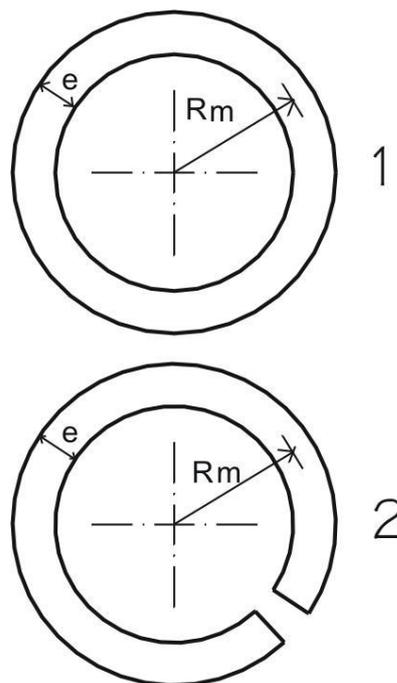


Fig. 5.13

De este ejemplo puede verse que una sección hueca es mucho más rígida que una sección abierta. Por esto se debe evitar que las barras de sección abierta trabajen a torsión.

## 5.5 PROBLEMA HIPERESTÁTICO

En la torsión, al igual que en los esfuerzos axiales, se encuentran problemas que no pueden ser resueltos solamente por las ecuaciones de equilibrio. En estos problemas el número de incógnitas es superior al de las ecuaciones de equilibrio que podemos utilizar. El orden a seguir para la solución de estos casos coincide con el empleado al resolver los problemas hiperestáticos de la tracción (compresión).

Veamos, en calidad de ejemplo, una barra empotrada en sus extremos, con un momento exterior aplicado en el tramo.

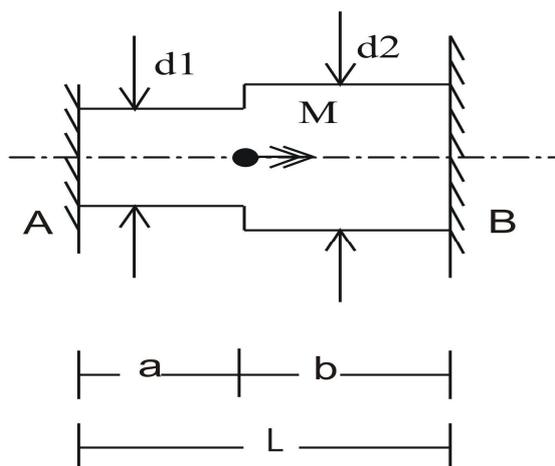


Fig. 5.14

Esta barra es estáticamente indeterminada, puesto que para calcular los dos momentos reactivos en los empotramientos la estática nos propone solamente una ecuación de equilibrio.

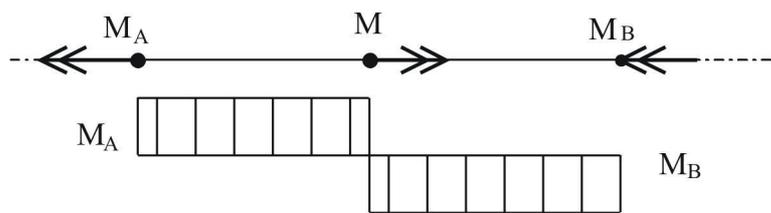
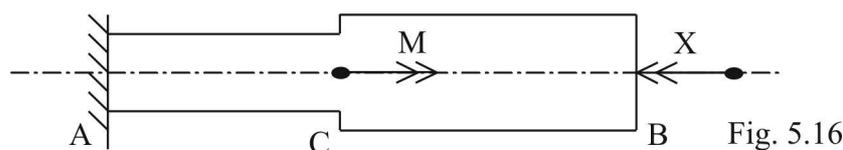


Fig. 5.15

$$\Sigma Mz = 0 \Rightarrow M_A + M_B - M = 0 \tag{5.30}$$

Retiramos un empotramiento sustituyéndolo por el momento desconocido X.



En el sistema estáticamente determinado, el giro de la sección B es consecuencia del momento exterior M y del momento X. Por condición de deformación, la viga isostática debe tener un comportamiento equivalente al de la pieza original.

$$\varphi_B = \varphi_B^M + \varphi_B^X = 0 \tag{5.31}$$

$$\varphi_B = \frac{M \cdot a}{G \cdot I_{t1}} - \left( \frac{X \cdot a}{G \cdot I_{t1}} + \frac{X \cdot b}{G \cdot I_{t2}} \right) = 0 \tag{5.32}$$

$$X = \frac{M \cdot a}{I_{t1}} \frac{1}{\frac{a}{I_{t1}} + \frac{b}{I_{t2}}} = M_B$$