

6

FLEXION

6.1. FLEXION EN VIGA DE EJE RECTO - INTRODUCCION

Supongamos una viga de eje recto, de sección constante, con determinadas condiciones de vínculo, sometido a un estado de cargas genérico:

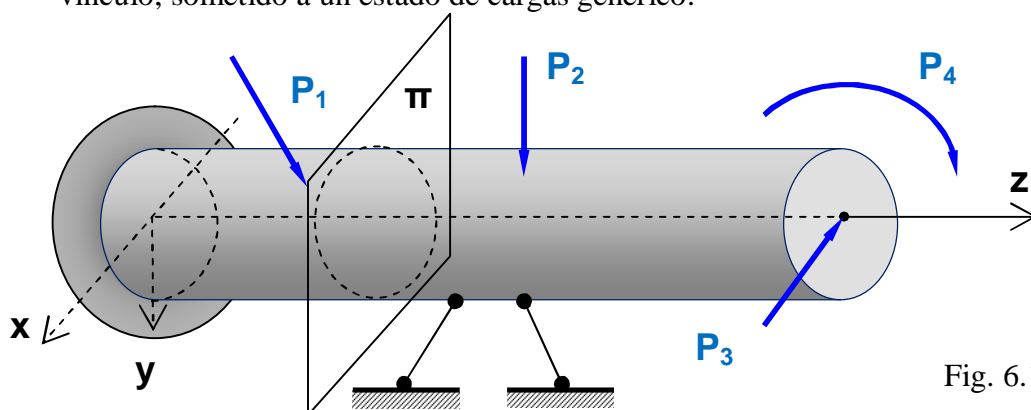
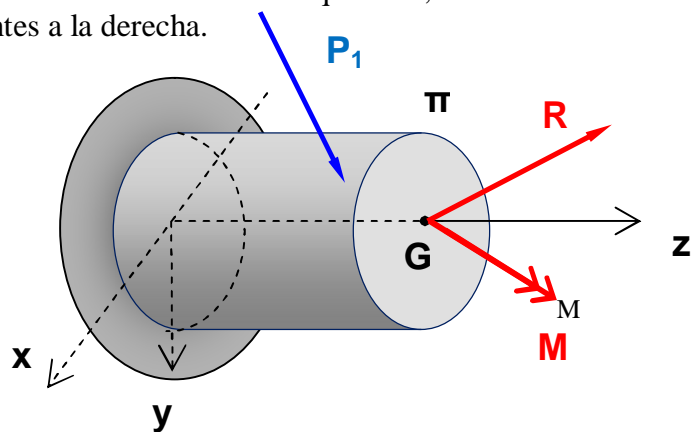


Fig. 6.1

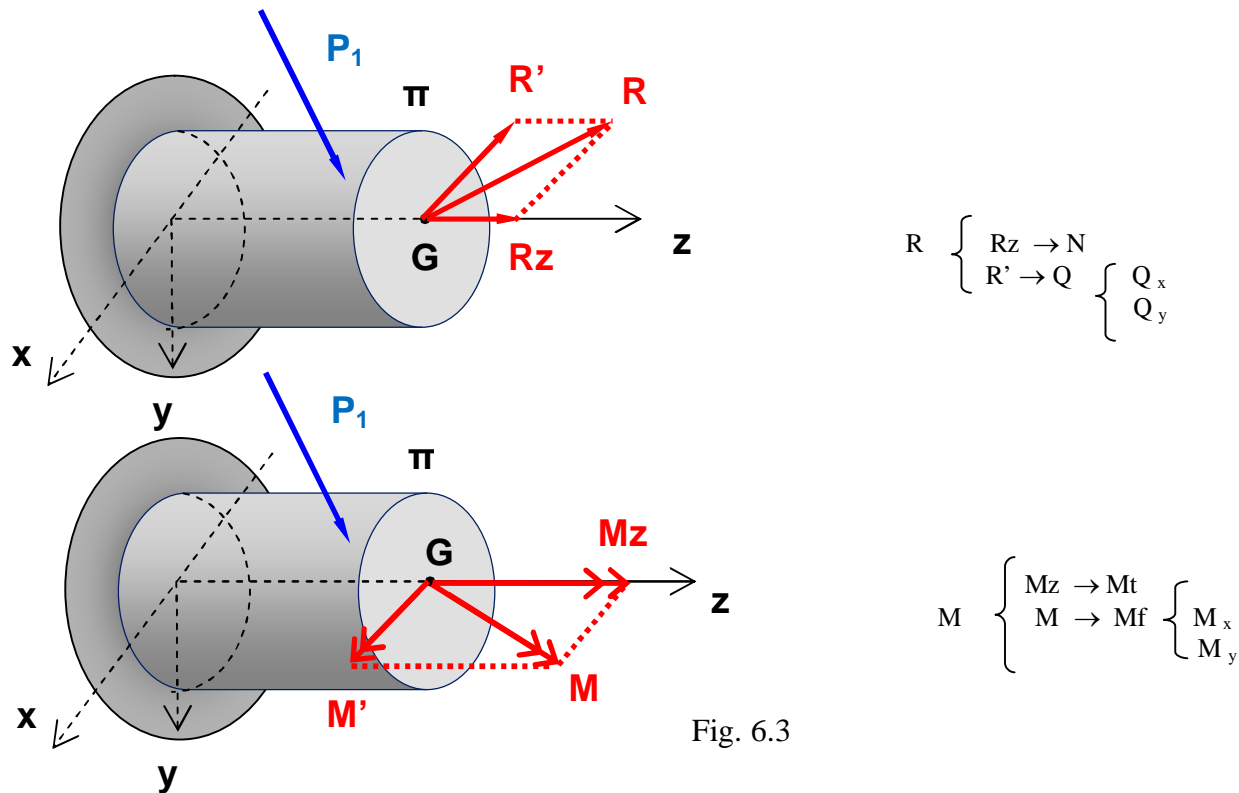
Consideramos una sección m - m definida por la traza del plano π , y aislamos la porción de la izquierda. Para restablecer el equilibrio, trasladamos al baricentro de m - m el efecto de las acciones actuantes a la derecha.



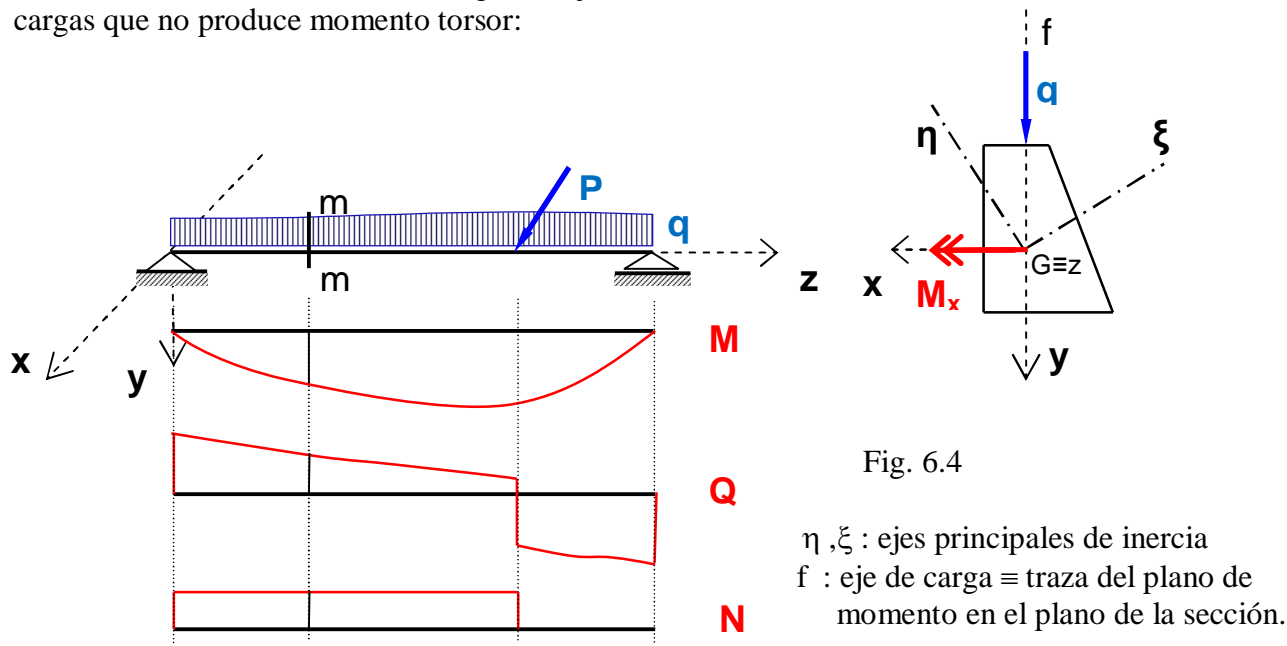
R: Fuerza resultante
M: Momento resultante

Fig. 6.2

La fuerza y el momento resultante admiten componentes según la dirección del eje de la pieza, y componentes en el plano de la sección.



Consideramos ahora una viga de eje recto, de sección constante, sometida a un estado de cargas que no produce momento torsor:



Veamos los diferentes casos de efectos de flexión que se pueden presentar, según los esfuerzos existentes en la sección genérica y la ubicación del plano de cargas respecto de los ejes principales de inercia.

Sección m	$\begin{cases} M \neq 0 \\ N \neq 0 \end{cases}$	Flexión Compuesta	$\begin{cases} \text{Si } f = \text{Eje principal} \rightarrow \text{Flexión Compuesta Recta o Normal} \\ \text{Si } f \neq \text{Eje principal} \rightarrow \text{Flexión Compuesta Oblicua} \end{cases}$
Sección m	$\begin{cases} M \neq 0 \\ N = 0 \\ Q \neq 0 \end{cases}$	Flexión Simple	$\begin{cases} \text{Si } f = \text{Eje principal} \rightarrow \text{Flexión Simple Recta o Normal} \\ \text{Si } f \neq \text{Eje principal} \rightarrow \text{Flexión Simple Oblicua} \end{cases}$
Sección m	$\begin{cases} M \neq 0 \\ N = 0 \\ Q = 0 \end{cases}$	Flexión Pura	$\begin{cases} \text{Si } f = \text{Eje principal} \rightarrow \text{Flexión Pura Recta o Normal} \\ \text{Si } f \neq \text{Eje principal} \rightarrow \text{Flexión Pura Oblicua} \end{cases}$

6. 2. MOMENTO DE INERCIA

El contenido temático de este punto es dictado en la materia Estabilidad I

6. 3. FLEXION PURA RECTA O NORMAL

6.3.1. Conceptos generales – Diagrama de tensiones

Tomemos el siguiente caso y analicemos el comportamiento de una porción de viga aledaña a la sección $m - m$.

El estado de cargas es simétrico y produce los diagramas de esfuerzos que se indican.

La traza del plano de Momento sobre las secciones de la viga, es coincidente con uno de los ejes principales de inercia.

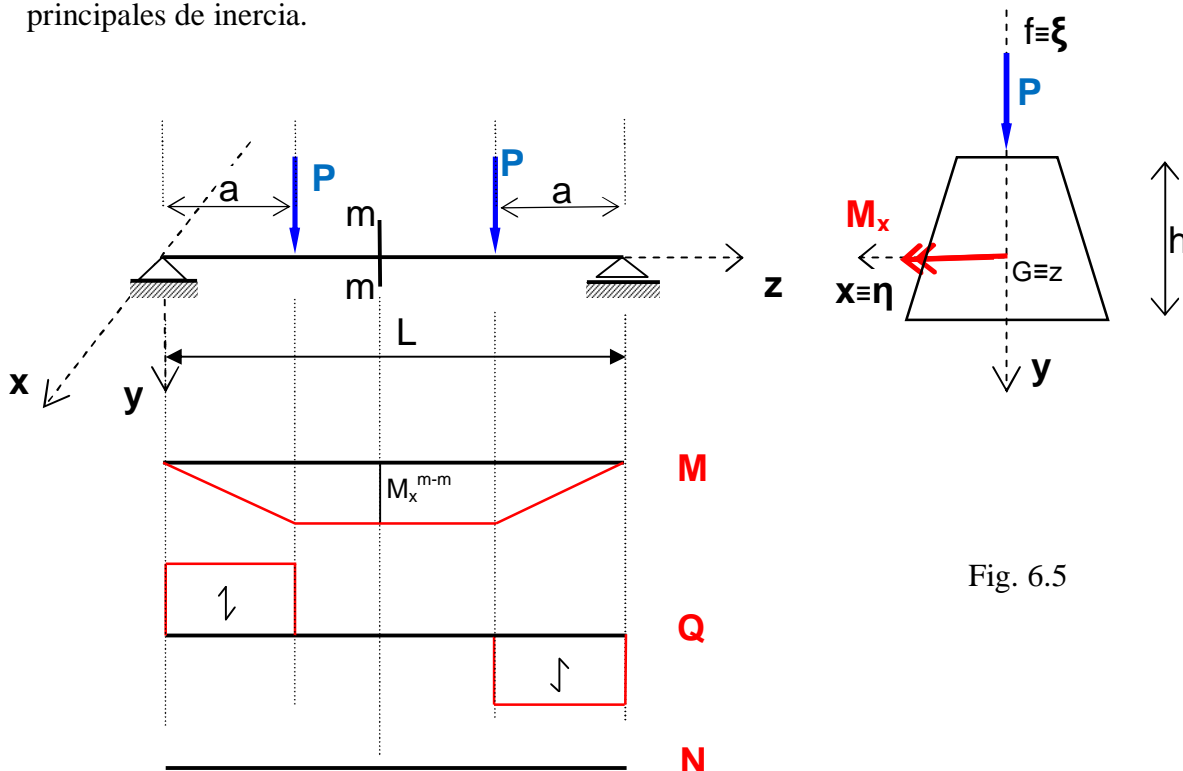


Fig. 6.5

Las cargas exteriores generan un estado tensional interior. Sea un elemento genérico $d\Omega$ en la sección $m - m$.

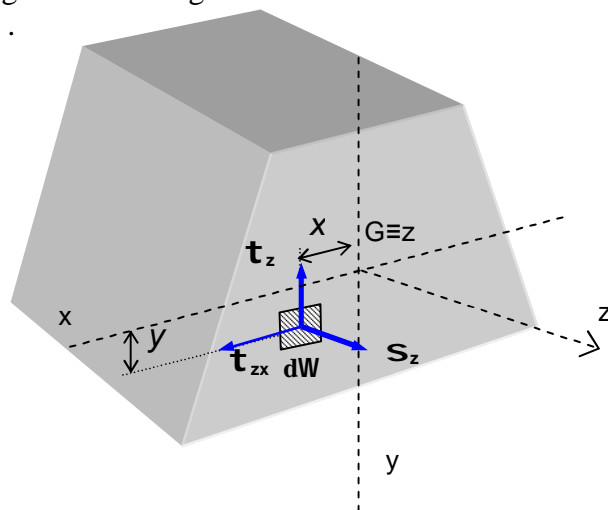


Fig. 6.6

Por condición de equilibrio y de acuerdo a las sollicitaciones exteriores actuantes en la sección $m - m$, se debe cumplir:

$$\int_{\Omega} \sigma_z \cdot d\Omega = N = 0 \quad ; \quad \int_{\Omega} \tau_{zx} \cdot d\Omega = Q_x = 0 \quad ; \quad \int_{\Omega} \tau_{xy} \cdot d\Omega = Q_y = 0$$

$$\int_{\Omega} (\tau_{zx} \cdot d\Omega y + \tau_{xy} \cdot d\Omega x) = M_z = M_t = 0 \quad ; \quad \int_{\Omega} \sigma_z \cdot d\Omega x = M_y = 0 \quad ; \quad \int_{\Omega} \sigma_z \cdot d\Omega y = M_x = M_m$$

Para establecer una relación entre las tensiones y las sollicitaciones exteriores, deben plantearse condiciones de deformación. Al cargar la viga esta se deforma; el eje z, originalmente recto, experimenta una ligera curvatura, conociéndose a esta última con el nombre de *elástica*.

Los puntos sobre el eje representativo de las secciones, experimentan translaciones pequeñas. Dichos desplazamientos pueden considerárselos verticales, lo cual significa que la viga no modifica su longitud.

Para el común de las vigas podemos suponer una relación $l/h \approx 10$. Para esta situación es válido lo siguiente: tomar en el tramo central dos secciones próximas entre sí, alejadas de los puntos de aplicación de las cargas. En correspondencia con las secciones adoptadas, dibujamos en los costados dos líneas rectas individualizadoras de las secciones, antes de aplicar las cargas.-

A medida que se carga la viga, las líneas pintadas continúan siendo rectas, pero ya no paralelas entre sí; tendrán un giro relativo. Que significa ello: que las secciones originalmente planas y normales al eje de la pieza, se mantienen planas y normales a dicho eje que pasó de su posición recta original a la forma curva de la elástica.

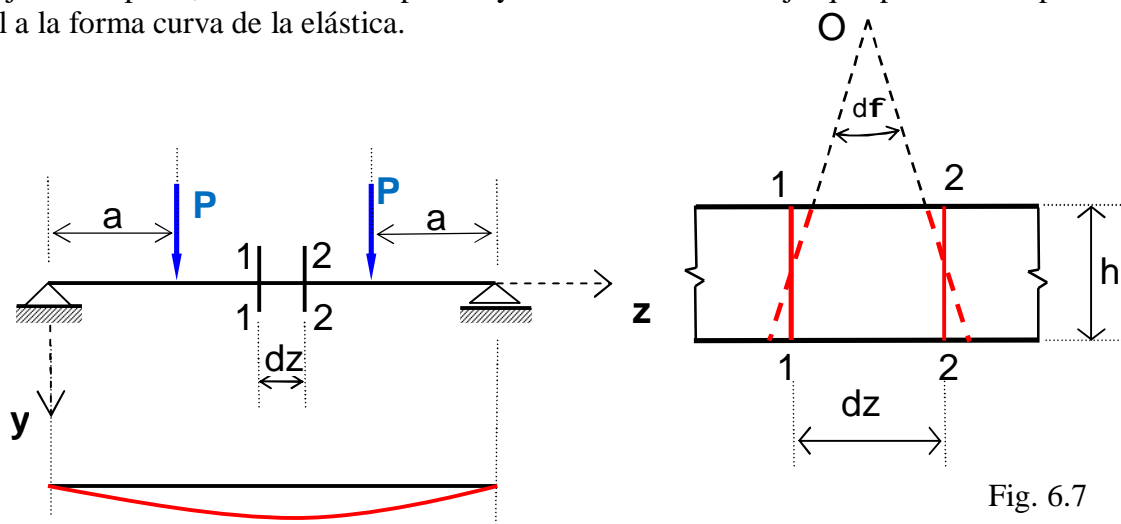


Fig. 6.7

En base a lo expuesto se admiten como hipótesis:

- Después de la deformación, cada sección transversal se conserva plana y normal al eje deformado. (Hipótesis de Bernoulli- Navier).
- En la deformación, unas fibras del sólido se acortan y otras se alargan, existiendo entre ambas una capa de fibras que no sufren variación. Dicha capa se conoce como *zona o capa de fibras neutras*.
- Las deformaciones que se producen en las fibras están comprendidas dentro del campo de validez de la Ley de Hooke.

Al mantenerse planas las secciones, no pueden originarse distorsiones en los elementos de la misma, y en consecuencia, por ser $\tau = G \cdot \gamma$, no existen tensiones tangenciales.-

Para encontrar una relación entre tensiones normales y el Momento, analizamos el comportamiento de una fibra genérica de la porción definida por las secciones 1-1 y 2-2.

Llamamos:

$d\phi$: giro relativo entre las secciones 1 y 2.

O: Centro de curvatura de la pieza deformada

ρ : Radio de curvatura de las fibras neutras

m - m : Capa de fibras neutras

n - n : Intersección de capa de fibras neutras con la sección

AB: Fibra en estudio

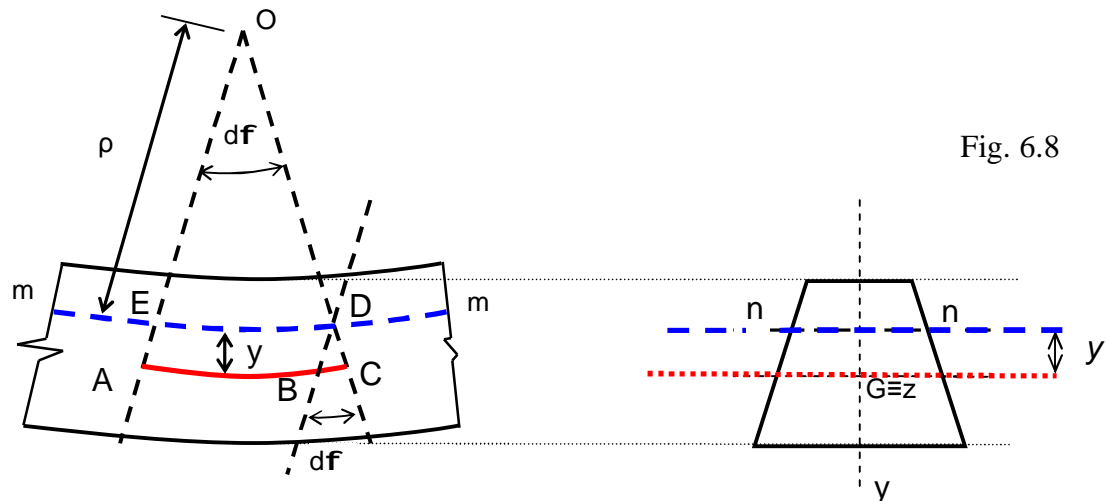


Fig. 6.8

Trazamos por D una paralela a \overline{OE} . Comparamos los triángulos OED con DBC:

$$\frac{\overline{DE}}{\rho} = \frac{\overline{BC}}{y} \quad ; \quad \text{como } \overline{ED} = \overline{AB} \rightarrow \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{y}{\rho}$$

Pero $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} =$ alargamiento de la fibra por unidad de longitud $= \varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} \quad ; \quad \text{además por Hooke } \varepsilon = \frac{\sigma_z}{E} \rightarrow \frac{\sigma_z}{E} = \frac{y}{\rho} \rightarrow \sigma_z = \frac{E}{\rho} \cdot y = \text{cte} \cdot y \quad (6.1)$$

De acuerdo a esta última expresión, la variación de la tensión normal será lineal y directamente proporcional a la distancia a las fibras neutras, determinado en la sección por el eje neutro (n-n).

Las deformaciones axiales ε_z , se acompañan por deformaciones transversales ε_x debidas al efecto de Poisson. Las deformaciones de alargamiento ε_z por debajo del eje neutro tienen ε_x de acortamiento. Por encima del eje neutro ocurre lo contrario. La deformación transversal es despreciable y no se tiene en cuenta al calcular el momento de inercia de la sección.-

- Determinación de la posición y dirección del eje neutro:

por condición $\sum F_z = 0$

$$\int_{\Omega} \sigma_z \cdot d\Omega = 0 = \int_{\Omega} \frac{E}{\rho} \cdot y \cdot d\Omega = \frac{E}{\rho} \int_{\Omega} y \cdot d\Omega \rightarrow S_n^{\Omega} = 0 \quad \therefore \text{el eje neutro es baricéntrico.}$$

por condición $\sum M_y = 0$

$$\int_{\Omega} \sigma_z \cdot x \cdot d\Omega = 0 = \int_{\Omega} \frac{E}{\rho} \cdot y \cdot x \cdot d\Omega = \frac{E}{\rho} \int_{\Omega} y \cdot x \cdot d\Omega \rightarrow I_{ny} = 0 \quad \therefore \text{el eje neutro y}$$

el eje de carga son ejes conjugados $\rightarrow n \equiv x$

por condición $\sum M_x = 0$

$$\int_{\Omega} \sigma_z \cdot y \cdot d\Omega = M_x = \int_{\Omega} \frac{E}{\rho} \cdot y^2 \cdot d\Omega = \frac{E}{\rho} \int_{\Omega} y^2 \cdot d\Omega = \frac{E}{\rho} \cdot I_n \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{E}{\rho} = \frac{M_x}{I_n} = \frac{M_x}{I_x} \quad (6.2)$$

Reemplazando, tenemos:
$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} \cdot y$$
 ECUACION FUNDAMENTAL DE LA FLEXION (6.3)

Para el caso de la sección trapezoidal:

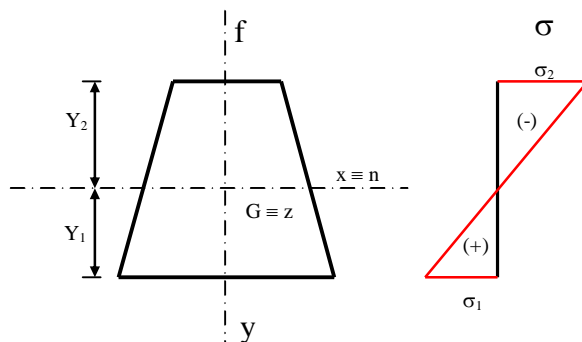


Fig. 6.9

A la zona comprimida le asignamos tensiones de signo (-); a las fibras traccionadas signo (+).

De (6.2) obtenemos:
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E \cdot I}$$
 (6.4)

El valor $\frac{1}{\rho}$ resulta ser la curvatura de la pieza sometida a flexión. En la expresión podemos apreciar que la curvatura es directamente proporcional al agente deformante e inversamente proporcional al producto E.I, que recibe el nombre de **rigidez a la flexión**.

La rigidez a la flexión mide la resistencia que opone la pieza a dejarse deformar. Para ello impone las propiedades mecánicas del material (E) y las propiedades geométricas de la sección (I).-

6.3.2. Módulo Resistente – Dimensionamiento

De la fórmula de Tensión podemos ver que todos los puntos de la sección con la misma ordenada “y” tendrán igual tensión, siendo esta máxima y mínima en los extremos, o sea, en las fibras superiores e inferiores de la sección. En general no suele hablarse de tensión máxima o mínima, sino de máxima tensión de tracción y máxima tensión de compresión.-

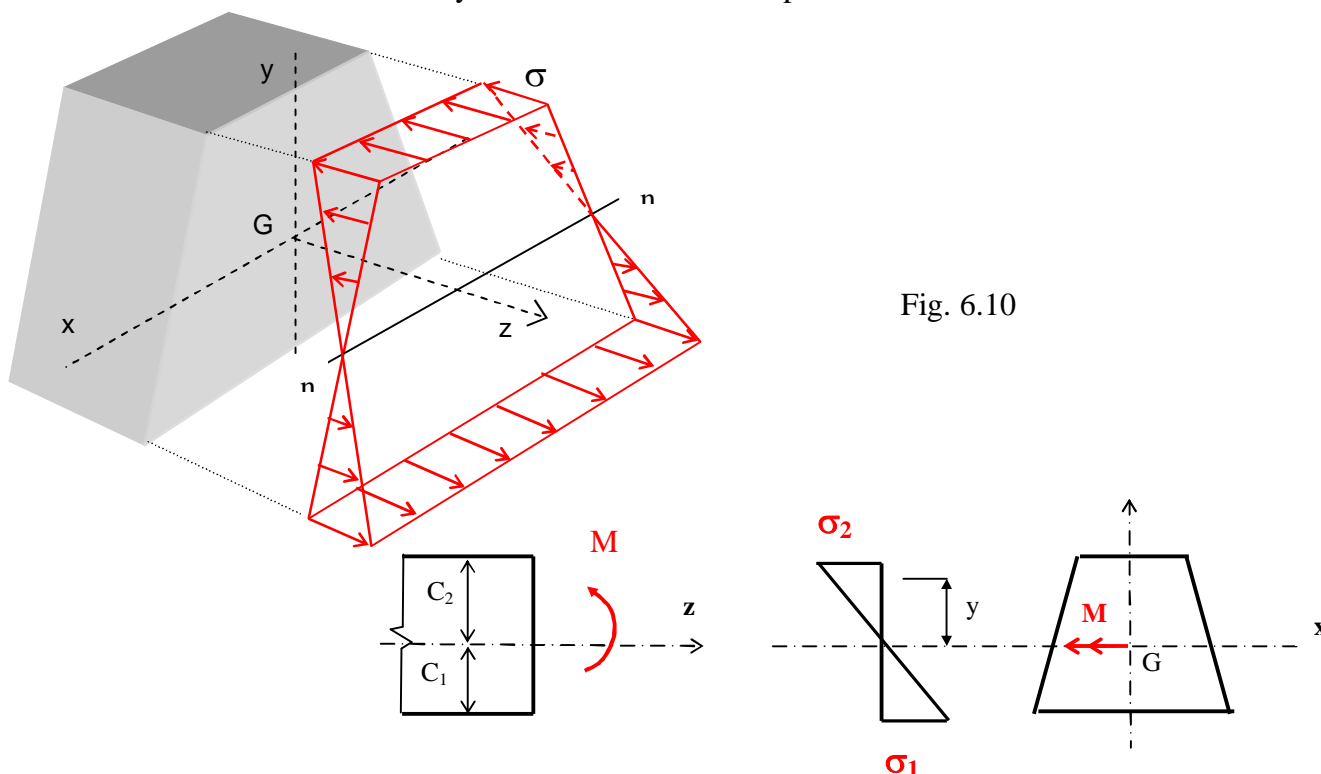


Fig. 6.10

El diagrama de tensiones resulta ser un esquema espacial, pero por simplicidad y atendiendo a lo anterior, se lo representa usualmente con un plano.

Las tensiones extremas pueden calcularse mediante las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{M}{I_x} \cdot c_1 = \frac{M}{\frac{I_x}{c_1}} = \frac{M}{W_1} \\ \sigma_2 &= \frac{M}{I_x} \cdot c_2 = \frac{M}{\frac{I_x}{c_2}} = \frac{M}{W_2}\end{aligned}\quad (6.5)$$

A los valores W_1 y W_2 , que resultan ser el cociente entre el momento de inercia de la sección transversal respecto del eje "x" y la distancia desde dicho eje a la fibra mas alejada de la sección, los llamaremos "*módulos de los momentos resistentes*".

En los problemas de dimensionamiento debemos distinguir entre los materiales cuya resistencia es la misma a tracción que a la compresión, y aquellos en que ambas resistencias son distintas.

$$\text{En el primer caso: } \begin{cases} \sigma_{\text{máx}} = \frac{M}{W_{\text{mín}}} \leq \sigma_{\text{adm}} \rightarrow W_{\text{mín}} \geq \frac{M}{\sigma_{\text{adm}}} \\ W_{\text{mín}} = \text{mín} \{ W_1, W_2 \} \end{cases} \quad (6.6)$$

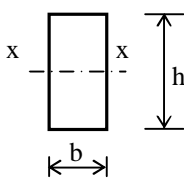
$$\text{En el segundo caso: } \begin{cases} \sigma_1 = \frac{M}{W_1} \leq \sigma_{1\text{adm}} \rightarrow W_1 \geq \frac{M}{\sigma_{1\text{adm}}} \\ \sigma_2 = \frac{M}{W_2} \leq \sigma_{2\text{adm}} \rightarrow W_2 \geq \frac{M}{\sigma_{2\text{adm}}}\end{cases} \quad (6.7)$$

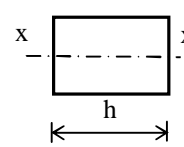
En el primer caso conviene que la sección sea simétrica, de manera tal que $W_1 = W_2$, con lo que puede llegarse prácticamente a valores iguales a la tensión admisible tanto en las fibras superiores como en las inferiores. Si la pieza no es simétrica respecto del eje neutro, un de las dos fibras extremas no es aprovechada íntegramente.

En el segundo caso vale todo lo opuesto a lo anterior. En general sería recomendable una sección no simétrica, de manera de aprovechar las tensiones máximas, tanto en las fibras superiores como en las inferiores.

Módulo resistente de algunas secciones usuales:

a) Rectángulo:

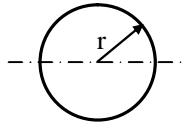


$$W_x = \frac{I_x}{\frac{h}{2}} = \frac{\frac{b \cdot h^3}{12}}{\frac{h}{2}} \rightarrow W_x = \frac{b \cdot h^2}{6}$$


$$W_x = \frac{I_x}{\frac{b}{2}} = \frac{\frac{h \cdot b^3}{12}}{\frac{b}{2}} \rightarrow W_x = \frac{h \cdot b^2}{6}$$

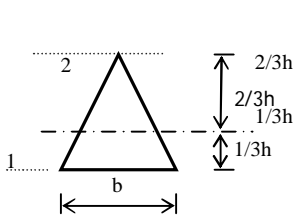
Podemos apreciar que el módulo resistente depende del cuadrado de la altura, siendo conveniente que el mayor lado del rectángulo sea ubicado en forma perpendicular al eje "x".

b) Círculo:



$$W_x = \frac{\pi \cdot r^4}{4r} = \frac{\pi \cdot r^3}{4} = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$$

c) Triángulo:



$$W_{x1} = \frac{b \cdot h^3}{36} = \frac{b \cdot h^2}{12} \quad W_{x2} = \frac{b \cdot h^3}{\frac{2}{3}h} = \frac{b \cdot h^2}{24}$$

Desde el punto de vista del dimensionamiento, el parámetro geométrico que influye es el módulo resistente, pero desde el punto de vista económico la pieza cuesta en función del área de la sección transversal, y no de su módulo resistente. Por razones de economía se trata de buscar secciones que provean el módulo resistente requerido con la menor área posible.

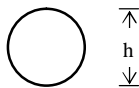
Para poder realizar una comparación económica entre las distintas secciones vamos a definir el siguiente coeficiente de rendimiento:

$$\psi = \frac{W_{\min}}{\Omega \cdot h} \tag{6.8}$$

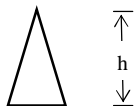
En la medida que este coeficiente aumenta, la sección es más económica:



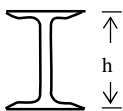
$$\psi = \frac{b \cdot h^2 / 6}{b \cdot h^2} = \frac{1}{6} \approx 0,167$$



$$\psi = \frac{\pi \cdot h^3 / 32}{\pi \cdot h^3 / 4} = \frac{1}{8} \approx 0,125$$



$$\psi = \frac{b \cdot h^2 / 24}{b \cdot h^2 / 2} = \frac{1}{12} \approx 0,083$$



$$\psi \approx 0,32$$

6.3.3. Brazo de palanca elástico:

Definiremos como brazo de palanca elástico a la distancia que existe entre la resultante de compresión y la resultante de tracción del diagrama de tensiones.

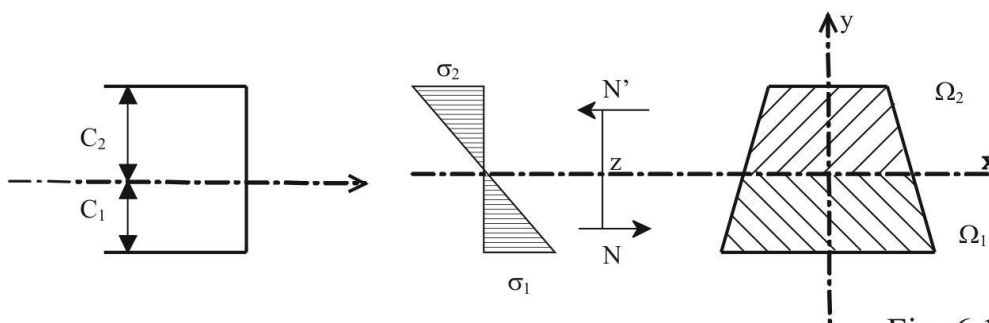


Fig .6.11

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} \cdot y$$

$$N = \int_{\Omega_1} \sigma \cdot d\Omega = \int_{\Omega_1} \frac{M}{I_x} \cdot y \cdot d\Omega = \frac{M}{I_x} \int_{\Omega_1} y \cdot d\Omega = \frac{M}{I_x} S_{x1}$$

$$N' = \int_{\Omega_2} \sigma \cdot d\Omega = \int_{\Omega_2} \frac{M}{I_x} \cdot y \cdot d\Omega = \frac{M}{I_x} \int_{\Omega_2} y \cdot d\Omega = \frac{M}{I_x} S_{x2}$$

$$|N| = |N'|$$

$$z = \frac{M}{N} = \frac{M}{\frac{M \cdot S_{x1}}{I_x}} = \frac{I_x}{S_{x1}} \rightarrow z = \frac{I_x}{S_{x1}} \quad (6.9)$$

Numéricamente, el brazo de palanca elástico se calcula como el cociente entre el momento de inercia con respecto al eje “x”, y el momento estático de media sección con respecto al mismo eje.

$$\text{Rectángulo: } z = \frac{\frac{b \cdot h^3}{12}}{\frac{b \cdot h}{2} \cdot \frac{h}{4}} = \frac{8}{12} \cdot h \approx 0,67h$$

$$\text{Círculo: } z = \frac{\frac{\pi \cdot r^4}{12}}{\frac{\pi \cdot r^2}{2} \cdot \frac{4r}{3\pi}} = \frac{3}{8} \cdot \pi \cdot r = \frac{3\pi}{16} \cdot d \approx 0,57d$$

$$\text{Triángulo: } z = \frac{\frac{b \cdot h^3}{36}}{\frac{4}{81} \cdot b \cdot h^2} = \frac{9}{16} \cdot h \approx 0,56h$$

6.3.4 Energía de deformación.

Si aislamos de una barra una tajada elemental de ancho Δl , y suponemos que sobre las secciones límites actúan dos momentos M que mantienen la porción en equilibrio, entonces obtendremos:

$$u = \frac{\sigma \cdot \varepsilon}{2} \quad \sigma = \frac{M}{I} \cdot y \quad \varepsilon = \frac{1}{\rho} \cdot y$$

$$u = \frac{1}{2} \cdot \frac{M}{I} \cdot y^2 \cdot \frac{1}{\rho}$$

$$U_{\Delta l} = \int_{\text{vol}} u \cdot d\text{Vol} = \int_{\text{vol}} \frac{1}{2} \cdot \frac{M}{I} \cdot y^2 \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \Delta l \cdot d\Omega = \frac{1}{2} \cdot \frac{M}{I} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \Delta l \int_{\Omega} y^2 \cdot d\Omega$$

La energía de deformación absorbida por toda la pieza es igual a la suma de la que absorbe cada una de las tajadas.

$$U_{\Delta l} = \frac{1}{2} \cdot M \cdot \frac{1}{\rho} \Delta l$$

Si ponemos la curvatura en función del momento, tendremos:

$$U = \frac{M \cdot l}{2EI} \quad (6.10)$$

A continuación vamos a ver un ejemplo de aplicación, calculando el giro en los apoyos de la viga de sección constante de la figura 6.12:

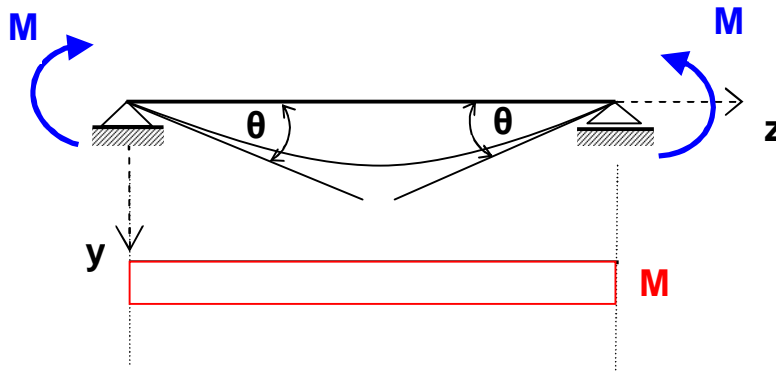


Fig. 6.10

$$T_{\text{ext}} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} M \cdot \theta \right) = M \cdot \theta$$

$$U = \int_L \left[\frac{M^2}{2EI} \right] \cdot dl = \frac{M^2}{2EI} \int_L dl = \frac{M^2}{2EI} \cdot l$$

$$T_{\text{ext}} = U \rightarrow M \cdot \theta = \frac{M^2}{2EI} \cdot l \rightarrow \theta = \frac{M \cdot l}{2EI} \quad (6.11)$$

6.4. FLEXION RECTA EN SECCIONES DE DOS MATERIALES

Vamos estudiar este problema apoyándonos en el ejemplo de la figura 6.13, que trata de una viga de sección rectangular de madera que esta reforzada inferiormente mediante un fleje de acero. El fleje esta unido a la madera de manera tal que se deforma solidariamente con ésta.

En base a la consideración anterior, es posible continuar aceptando como válida la *Ley de Navier- Bernoulli*, es decir que la sección plana antes de la deformación se mantiene plana luego de la deformación.

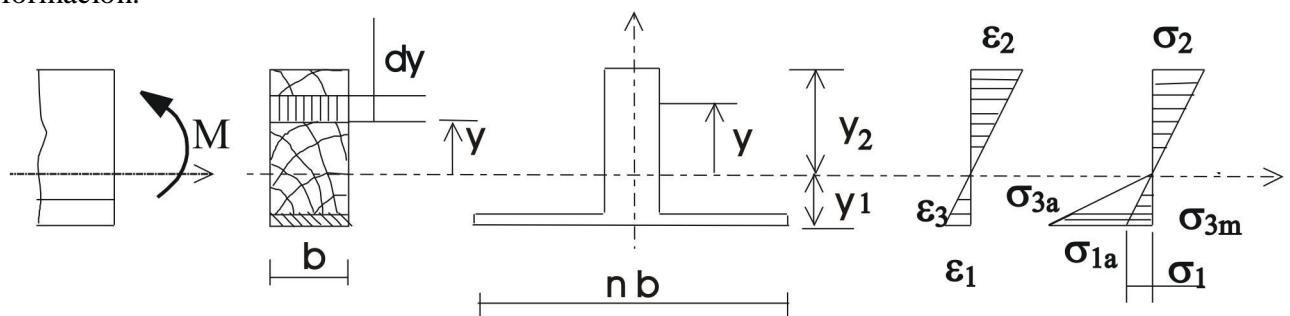


Fig. 6.13

De acuerdo a la Ley de Navier- Bernoulli:

$$\epsilon_{(y)} = \frac{y}{\rho}$$

y considerando la ley de Hooke:

$$\sigma_{(y)} = E \epsilon_{(y)} = \frac{1}{\rho} E \cdot y$$

luego:

$$dN = \sigma_{(y)} \cdot d\Omega = \sigma_{(y)} \cdot b \cdot dy$$

$$dN = \frac{1}{\rho} E \cdot b \cdot y \cdot dy$$

por razones de equilibrio debe ocurrir que:

$$M = \int_{\Omega} y \cdot dN = \int_{\Omega} y^2 \cdot \frac{1}{\rho} \cdot E \cdot b \cdot dy \quad (6.12)$$

Al resolver esta integral en toda el área, nos encontraremos con elementos “dy” donde el material es madera y otros donde es acero.

$$dN_1 = \frac{1}{\rho} E_m \cdot b_m \cdot y \cdot dy$$

$$dN_2 = \frac{1}{\rho} E_a \cdot b_a \cdot y \cdot dy$$

resultaría muy práctico si de alguna manera, en forma ficticia, pudiésemos convertir uno de los materiales en el otro, de manera tal que esto facilite las integraciones.

$$dN_2 = \left(\frac{1}{\rho} E_a \cdot b_a \cdot dy \right) \cdot y \cdot \frac{E_m}{E_m} = \frac{1}{\rho} E_m \cdot \left[\frac{E_a}{E_m} \cdot b_a \right] \cdot y \cdot dy$$

$$dN_2 = \frac{1}{\rho} E_m \cdot \underbrace{[n \cdot b_a]}_{b_h} \cdot y \cdot dy = \frac{1}{\rho} E_m \cdot b_h \cdot y \cdot dy$$

Si en la zona donde tenemos acero cambiamos el ancho verdadero de la sección por uno ficticio $b_h = n \cdot b$ que denominamos “*ancho homogeneizado*”, en la ecuación del momento no aparecen los diferentes materiales. Por otro lado sabemos que:

$$\int_{\Omega} dN = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} y \cdot E \cdot b \cdot dy = 0 \quad (6.13)$$

En esta integral no podemos sacar como factor común “E”, ya que éste es función de “y”; sin embargo, si realizamos la homogeneización, esto sería posible ya que en la zona donde está el acero estaríamos tomando el ancho b_h .

$$\frac{E_m}{\rho} \int_{\Omega} y \cdot b_h \cdot dy = 0 \quad (6.14)$$

El cumplimiento de esta última ecuación nos hace ver que la ordenada “y” debe medirse a partir del baricentro de la sección homogeneizada.

Como conclusión podemos decir que valen las expresiones generales de la flexión recta, a condición de que tomemos en lugar de la sección real, la misma homogeneizada.

$$\sigma_1 = \frac{M}{I_{xh}} \cdot y_1 \quad \sigma_2 = \frac{M}{I_{xh}} \cdot y_2 \quad (6.15)$$

la tensión σ_1 sería la que correspondería si en la fibra 1 tuviésemos madera. Como el ancho real es b_h/n , luego la tensión real en el acero será:

$$\sigma_{1a} = n \cdot \sigma_1 \tag{6.16}$$

Esto último tal vez pueda ser apreciado más exactamente si observamos en la fig.6.13 la fibra 3. Si consideramos dos fibras ubicadas infinitamente próximas a ésta, una del lado de la madera y otra del acero, ambas tienen prácticamente la misma deformación; sin embargo, debido a la diferencia de módulos de elasticidad las tensiones son distintas, con lo que el diagrama real de tensiones resulta discontinuo.

Si en lugar de tener dos materiales hay más, la homogeneización deberá realizarse sobre la base de uno de ellos. En la Fig.6.14 se indica el caso de una sección rectangular compuesta de tres materiales distintos.

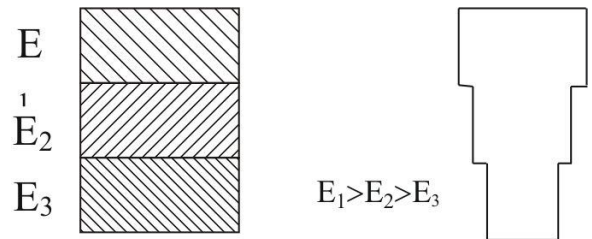


Fig.6.14

6.5. FLEXION OBLICUA

6.5.1. Fórmula de dos términos

Como ya hemos dicho, este caso se presenta cuando la línea de fuerzas no coincide con uno de los ejes principales de inercia. Dado que los ejes principales de inercia son perpendiculares, y el vector representativo del momento es perpendicular al eje de fuerzas, también podemos decir que la flexión oblicua surge cuando el vector momento no coincide con alguno de los ejes principales de inercia.

Esta situación se presenta con mucha frecuencia en los elementos estructurales que forman parte de los techos inclinados. Las cargas gravitacionales originan un eje de fuerza vertical, el cual no coincide con los ejes principales, los cuales se orientan según el plano del techo.

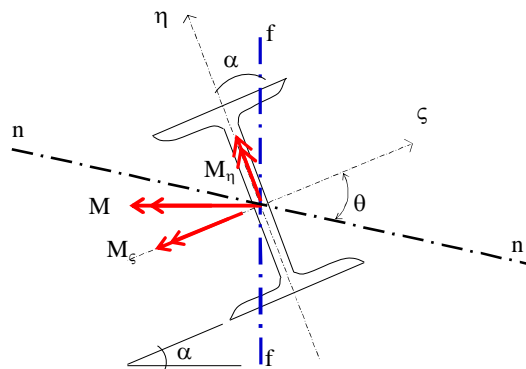


Fig. 6.15

Si analizamos este problema de flexión debemos decir que:

$$\begin{aligned} M_\zeta \neq 0 & \quad ; \quad M_\eta \neq 0 & \quad ; \quad N = 0 \\ M_\zeta &= M \cdot \cos \alpha \\ M_\eta &= M \cdot \text{sen} \alpha \end{aligned} \tag{6.17}$$

Como podemos aplicar el principio de superposición de efectos, siendo cada uno de los valores de componentes de momento casos de flexión recta, la tensión normal se obtiene a través de :

$$\sigma = \sigma_{(M_\zeta)} + \sigma_{(M_\eta)} = \frac{M_\zeta}{I_\zeta} \cdot \eta + \frac{M_\eta}{I_\eta} \cdot \zeta \tag{6.18}$$

Esta expresión recibe el nombre de *fórmula de los dos términos* en la flexión oblicua simple. Si queremos encontrar la ecuación del eje neutro, planteamos la condición de tensión normal nula.

$$\sigma = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{M_{\zeta}}{I_{\zeta}} \cdot \eta + \frac{M_{\eta}}{I_{\eta}} \cdot \zeta = 0 \quad \rightarrow \quad \eta = -\frac{M_{\eta}}{M_{\zeta}} \cdot \frac{I_{\zeta}}{I_{\eta}} \cdot \zeta$$

La ecuación del eje neutro indica que este resulta baricéntrico pero no coincidente con algunos de los ejes principales de inercia.

Para:

$$\left. \begin{array}{l} M_{\zeta} = M \cdot \cos \alpha \\ M_{\eta} = M \cdot \operatorname{sen} \alpha \end{array} \right\} \rightarrow \eta = -\frac{I_{\zeta}}{I_{\eta}} \cdot \xi \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad \rightarrow \quad \frac{\eta}{\zeta} = \operatorname{tg} \theta = 1 \cdot \frac{I_{\zeta}}{I_{\eta}} \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (6.19)$$

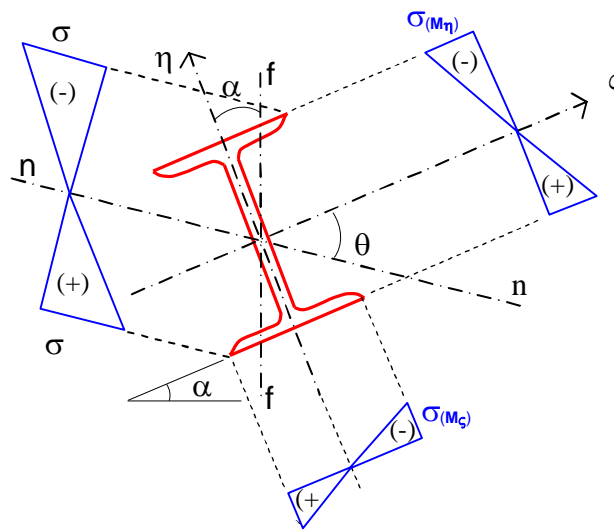


Fig. 6.16

En la figura anterior podemos ver como el diagrama de tensiones puede obtenerse por superposición de efectos. Algo importante a tener en cuenta es que las tensiones σ son perpendiculares a la sección, es decir son tensiones σ_z . El diagrama se dibuja abatido para poder representarlo con mayor comodidad.

En el caso de una sección transversal doblemente simétrica como la de la figura 6.16. la tensión normal máxima puede calcularse de la siguiente forma:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_{\zeta}}{I_{\zeta}} \cdot \eta_{\text{máx}} + \frac{M_{\eta}}{I_{\eta}} \cdot \zeta_{\text{máx}} = \frac{M_{\zeta}}{I_{\zeta}} \cdot \frac{\eta_{\text{máx}}}{\eta_{\text{máx}}} + \frac{M_{\eta}}{I_{\eta}} \cdot \frac{\zeta_{\text{máx}}}{\zeta_{\text{máx}}} = \frac{M_{\zeta}}{W_{\zeta}} + \frac{M_{\eta}}{W_{\eta}} \quad (6.20)$$

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_{\zeta}}{W_{\zeta}} + \frac{M_{\eta}}{W_{\eta}} \leq \sigma_{\text{adm}}$$


Esta fórmula de dimensionamiento no es directa como la de flexión recta, ya que la misma depende de dos parámetros geométricos. El proceso de dimensionamiento resulta entonces iterativo, debiendo proponerse una sección y verificar la ecuación anterior.


Para realizar un procedimiento lo mas acertado posible puede tenerse presente lo siguiente:


$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_{\zeta}}{W_{\zeta}} + \frac{M_{\eta}}{W_{\eta}} \cdot \frac{W_{\zeta}}{W_{\zeta}} = \frac{1}{W_{\zeta}} \cdot \left[M_{\zeta} + \underbrace{\frac{W_{\zeta}}{W_{\eta}}}_{r} \cdot M_{\eta} \right] = \frac{1}{W_{\zeta}} \cdot [M_{\zeta} + r \cdot M_{\eta}]$$

$$W_{\zeta} \geq \frac{M_{\zeta} + r \cdot M_{\eta}}{\sigma_{\text{adm}}} \quad (6.21)$$

$$r = \frac{W_{\zeta}}{W_{\eta}}$$


 $r \cong 7 \text{ a } 9$


 $r \cong 4 \text{ a } 6$


 $r \cong h / b$

Proponiendo un valor de “r” puede obtenerse un valor de W_x necesario, y con éste se elige la sección.

Como el valor de “r” no resulta en general tal como se lo supone, debe siempre verificarse la ecuación. Si esta ecuación no se cumple, entonces deberá adoptarse otra sección.

Cuando la sección no es doblemente simétrica, los puntos donde se dan la máxima tensión de compresión y tracción no tienen por qué tener simultáneamente como coordenadas los valores de $x_{\text{máx}}$ e $y_{\text{máx}}$. Por esta razón suele resultar muy práctico dibujar la sección en escala y trazar el eje neutro, como el diagrama de tensiones resulta perpendicular a dicho eje es posible determinar gráficamente las posiciones donde las tensiones son máximas, aún sin calcular los valores.

6.5.2. Fórmula de un término.

En virtud de considerar como válidas las hipótesis de Navier- Bernoulli y la Ley de Hooke, podemos decir que la tensión normal que surge como consecuencia del efecto de flexión será proporcional a la distancia al eje neutro medida desde el punto de aplicación de la misma.

Hipótesis de Navier- Bernoulli: $\varepsilon = \frac{y_n}{\rho}$

Ley de Hooke: $\sigma = E \cdot \varepsilon$

Entonces:

$$\sigma_{(y)} = E \varepsilon_{(y)} = \frac{1}{\rho} E \cdot y_n = \psi \cdot y_n \quad (6.22)$$

Sobre un elemento diferencial de área, debido a la tensión σ , existirá una fuerza dN :

$$dN = \sigma \cdot d\Omega$$

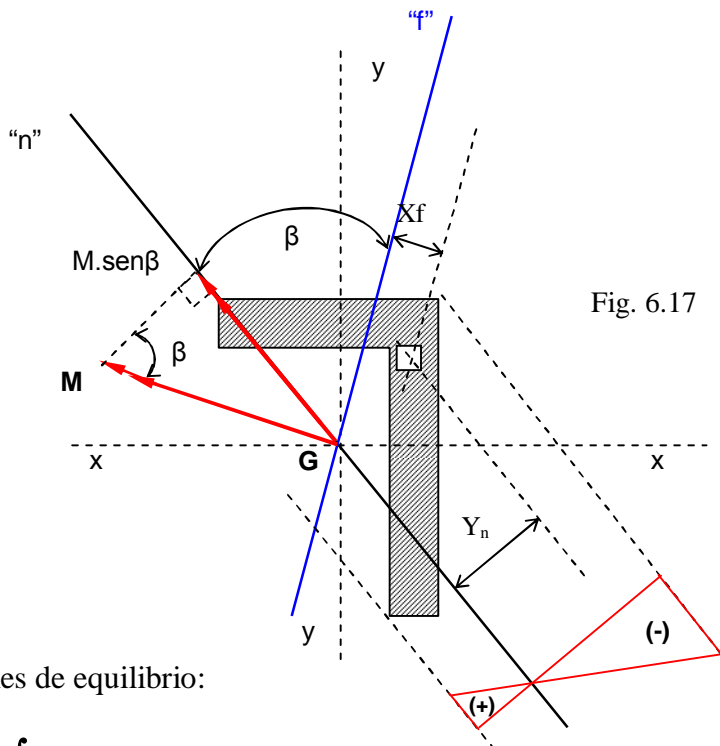


Fig. 6.17

Por razones de equilibrio:

$$\int_{\Omega} dN = \int_{\Omega} \sigma \cdot d\Omega = 0$$

$$\int_{\Omega} \psi \cdot y_n \cdot d\Omega = \psi \int_{\Omega} y_n \cdot d\Omega = 0 \quad S_n = 0 \quad (6.23)$$

para que la condición dada por la ecuación anterior se satisfaga, debe ocurrir que el eje neutro sea baricéntrico. En la figura 6.17 así lo ubicamos porque ya conocíamos el resultado a partir de lo desarrollado en el ítem anterior.

También por razones de equilibrio deberá ocurrir:

$$\int_{\Omega} x_f \cdot dN = 0 \quad (\text{momento con respecto al eje de fuerzas})$$

$$\int_{\Omega} x_f \cdot dN = \int_{\Omega} \psi \cdot x_f \cdot y_n \cdot d\Omega = 0$$

$$\int_{\Omega} x_f \cdot y_n \cdot d\Omega = I_{nf} = 0 \quad (6.24)$$

De la última ecuación se obtiene que el eje neutro y el eje de fuerzas son conjugados de inercia. Si desarrollamos la ecuación :

$$\int_{\Omega} y_n \cdot dN = M \cdot \text{sen}\beta \quad (\text{momento con respecto al eje neutro})$$

obtenemos:

$$\int_{\Omega} y_n \cdot dN = \int_{\Omega} \psi \cdot y_n^2 \cdot d\Omega = \psi \int_{\Omega} y_n^2 \cdot d\Omega = \psi \cdot I_n = M \cdot \text{sen}\beta \quad \rightarrow \quad \psi = \frac{M \cdot \text{sen}\beta}{I_n}$$

con lo que:

$$\sigma = \frac{M \cdot \text{sen}\beta}{I_n} y_n \quad (6.25)$$

6.6. FLEXION EN VIGA DE EJE CURVO

Para estudiar el efecto de la flexión en una viga de eje curvo, se considerarán solamente secciones que tengan un eje de simetría y el plano de acción del Momento Flector conteniendo a dicho eje de simetría y al eje de la pieza. Analizaremos, como en temas anteriores, solo el caso de relación lineal entre sollicitación y deformación y de que el módulo de elasticidad es el mismo a tracción que a compresión.

Consideremos un elemento curvo como el que se muestra en la figura. El punto O define la posición del centro de curvatura; la pieza esta sometida únicamente a Momento.

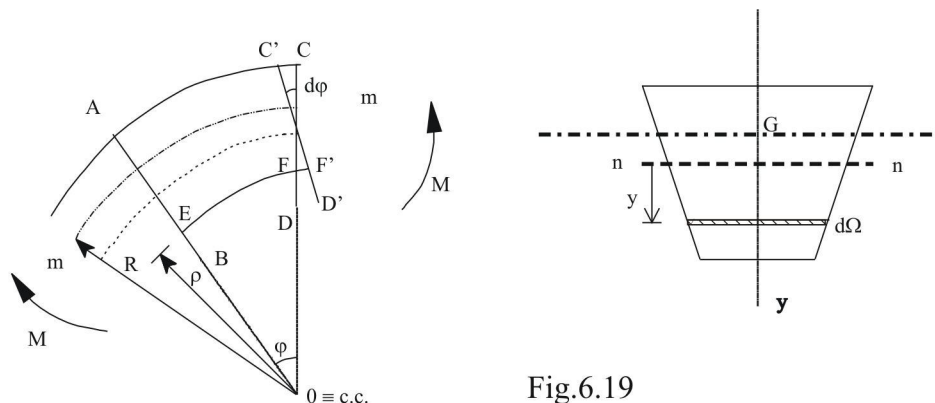


Fig.6.19

De todo el sector curvo estudiaremos el comportamiento de la porción definida por el ángulo φ , determinándose dos secciones próximas entre sí, la AB y la CD. Ambas secciones tienen su bari-centro a distancia R de c.c.

Debido a M, la porción en estudio se va a deformar; hay fibras que se acortan, fibras que se alargan y fibras neutras. Como hipótesis suponemos que las secciones perpendiculares al eje de la pieza, permanecen planas luego de deformadas.

La sección CD permanece plana luego de deformarse y ocupa una posición C'D' con un giro relativo $d\varphi$, suponiendo que la sección AB se mantiene en su posición primitiva.

Aunque la hipótesis básica de deformación es la misma que para vigas rectas, y por Ley de Hooke, la tensión normal $\sigma = E \cdot \varepsilon$ acá tenemos una variante. La longitud inicial de una fibra como la EF depende de la distancia al centro de curvatura ρ . por lo tanto, aunque la deformación total de las fibras de (descriptas por el pequeño ángulo una viga $d\varphi$) sigue una ley lineal, con las deformaciones específicas no sucede esto. El alargamiento de una fibra genérica, EF es $(r - \rho) \cdot d\varphi$, donde r es la distancia desde el punto O hasta la superficie neutra (no conocida todavía), siendo su longitud inicial igual a $\rho \times \varphi$.

La deformación ε de nuestra fibra arbitraria es:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{(r - \rho) \times d\varphi}{\rho \times \varphi} = \frac{y \times d\varphi}{(r - y) \times \varphi} \quad (6.27)$$

siendo "y" la distancia de la fibra genérica respecto de la superficie neutra.

Para el elemento $d\Omega$, la tensión normal:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = \frac{E \cdot d\varphi}{\varphi} \cdot \frac{y}{(r - y)} \quad (6.28)$$

En esta última ecuación, para la misma sección E, $d\varphi$, φ , r son constantes. $\therefore \sigma = \frac{A \times y}{(B - y)}$,

expresión que representa una función hiperbólica.

En (6.28) tenemos dos incógnitas, que son la ubicación de las fibras neutras "r" y el giro relativo $d\varphi$. Para definir las utilizaremos dos condiciones de la estática.

Teniendo en cuenta que sobre la sección, solo se ha aplicado M, debe cumplirse que la suma de las fuerzas que actúan perpendicularmente a la sección tome valor 0.

$$\sum F_N = 0 \rightarrow \int_{\Omega} \sigma \cdot d\Omega = \int_{\Omega} E \cdot \frac{d\varphi}{\varphi} \cdot \frac{y}{(r-y)} \cdot d\Omega = \frac{E \cdot d\varphi}{\varphi} \int_{\Omega} \frac{y}{(r-y)} \cdot d\Omega = \frac{E \cdot d\varphi}{\varphi} \int_{\Omega} \frac{r-\rho}{\rho} \cdot d\Omega.$$

Siendo E, dφ, φ, constantes, deberá ser nula la integral

$$\int_{\Omega} \frac{r-\rho}{\rho} \cdot d\Omega = 0 \rightarrow r = \frac{\int_{\Omega} \rho \cdot d\Omega}{\int_{\Omega} d\Omega} \quad (6.29)$$

Observando que el eje así definido difiere de la posición del baricentro (G).

Una vez conocida la posición del eje neutro, la expresión para la distribución de esfuerzos se obtiene igualando el momento externo aplicado, al momento interno resistente.

Tomamos momento en la sección respecto del eje “n” determinado por las fibras neutras:

$$\begin{aligned} \sum M_n = 0 \rightarrow M &= \int_{\Omega} \sigma \cdot d\Omega \cdot y = \int_{\Omega} E \cdot \frac{d\varphi}{\varphi} \cdot \frac{y^2}{(r-y)} \cdot d\Omega = \frac{E \cdot d\varphi}{\varphi} \int_{\Omega} \frac{y^2}{(r-y)} \cdot d\Omega \\ M &= \frac{E \cdot d\varphi}{\varphi} \int_{\Omega} \left(\frac{y^2}{(r-y)} + y - y \right) \cdot d\Omega = \frac{E \cdot d\varphi}{\varphi} \int_{\Omega} \left(-y + \frac{r \cdot y}{r-y} \right) \cdot d\Omega \\ M &= \frac{E \cdot d\varphi}{\varphi} \left[\int_{\Omega} -y \cdot d\Omega + r \int_{\Omega} \frac{y}{(r-y)} \cdot d\Omega \right] = \frac{E \cdot d\varphi}{\varphi} \left[\int_{\Omega} -y \cdot d\Omega + 0 \right] \\ \int_{\Omega} -y \cdot d\Omega &= - \int_{\Omega} y \cdot d\Omega \end{aligned} \quad (6.30)$$

donde la integral representa el momento estático del área de la sección recta respecto de la línea neutra. Siendo “e” la separación entre el baricentro y la línea neutra, se debe cumplir:

$$\int_{\Omega} -y \cdot d\Omega = \Omega \cdot e \quad \text{siendo } |e| = |R - r| \quad (6.31)$$

La distancia “e” se mide en sentido contrario al considerado como positivo para “y”.

Finalmente:

$$\begin{aligned} M &= \frac{E \cdot d\varphi}{\varphi} \cdot \Omega \cdot e \rightarrow \frac{E \cdot d\varphi}{\varphi} = \frac{M}{\Omega \cdot e} \\ \sigma &= \frac{M}{\Omega \cdot e} \cdot \frac{y}{\rho} \\ \sigma_D &= \frac{M}{\Omega \cdot e} \cdot \frac{y_D}{\rho_D} \\ \sigma_C &= \frac{M}{\Omega \cdot e} \cdot \frac{y_C}{\rho_C} \end{aligned} \quad (6.32)$$

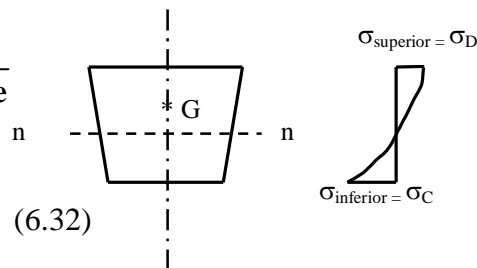


Fig. 6.20

A diferencia del caso de viga de eje recto, donde la variación de tensión es lineal, en el caso de eje curvo, la variación es hiperbólica. El eje neutro no coincide con el baricentro geométrico de la sección, trasladándose hacia el Centro de Curvatura.