

7

TENSIONES DE CORTE
EN LA FLEXIÓN

7.1 FORMULA DE JOURAVSKI - COLIGNON

En el capítulo 6 hemos estudiado la distribución de tensiones en la sección recta de una pieza sometida a flexión pura. En este capítulo abordaremos el estudio del estado tensional cuando tenemos una sección de una pieza sometida a flexión y corte. La presencia de Q origina en la sección tensiones tangenciales: estas tensiones, variables a lo largo de la altura, producen distorsión entre los elementos de la pieza, lo que hace que las secciones originalmente planas, al deformarse por la suma de los efectos de flexión y corte ya no sigan siendo planas. Sin embargo este alabeo del plano de las secciones transversales no influye sensiblemente sobre el valor de las tensiones normales para el caso de las relaciones l/h habituales. Es decir, podemos seguir calculando σ como si fuera un caso de flexión pura.

El tema ya tiene un pequeño antecedente, visto en capítulo 2, “el problema de corte puro”. Para ese caso se concluyó que el esfuerzo de corte no era sino la fuerza resultante de un conjunto de tensiones tangenciales que podían admitirse distribuidas uniformemente, y cuyo valor se calculaba mediante la expresión:

$$\tau = \frac{Q}{\Omega} \quad (7.1)$$

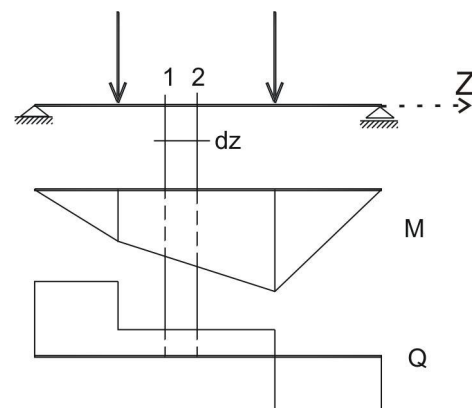
En la práctica el problema de corte puro no existe, puesto que en general aparece conjuntamente con la flexión. En estas circunstancias, como veremos seguidamente, la hipótesis de tensiones tangenciales uniformes resulta incorrecta, de manera que el valor de τ obtenido con la expresión 7.1 solamente representa el valor medio de la tensión.

No obstante lo recientemente expuesto, existen algunos problemas, especialmente en lo que se refiere a elementos de unión, donde los esfuerzos de flexión pueden considerarse como secundarios, siendo aplicable la expresión anterior dada la simplicidad que representa.

En algunas estructuras como las vigas, que están predominantemente flexadas, es muy importante considerar la distribución real de tensiones, para lo cual nos basaremos en la denominada “Teoría de Jouravski”, quien desarrolló en un trabajo sobre puentes, publicado en 1856, una teoría sobre la resistencia de secciones rectangulares constituidas por laminas superpuestas vinculadas entre sí. Jouravski calculó los esfuerzos rasantes que veremos luego, sin preocuparse de las tensiones que ocurren en el plano de la sección, cuya expresión se debe a Colignon.

Consideremos, por ejemplo, la viga de la figura 7.1, la que supondremos de sección constante. Aislemos un trozo de la misma delimitado por las secciones 1 y 2, separadas éstas por dz .

En la sección 1-1 actúa un momento flector M y un esfuerzo de corte Q . En la 2-2, el momento será distinto al de la 1-1, pero lo expresaremos en función de M como $M+dM$, mientras que el esfuerzo de corte mantiene su valor Q .



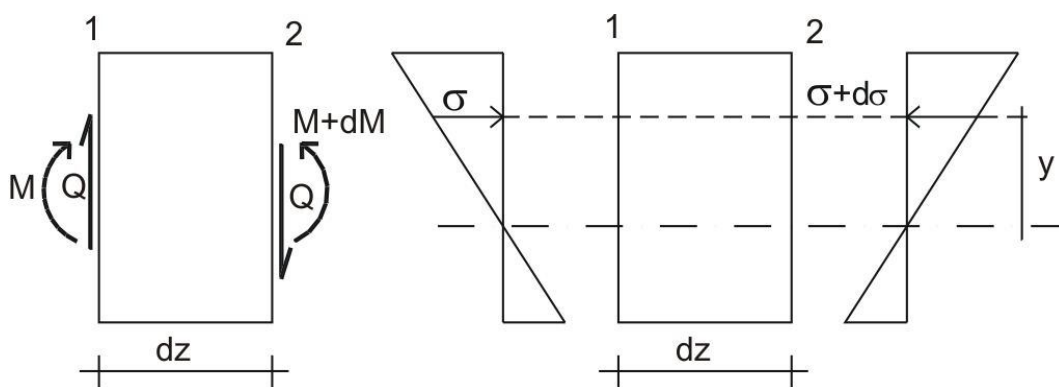


Fig. 7.2

Como consecuencia de la flexión, en una fibra situada a una distancia “y” del eje neutro, se originarán en 1-1 tensiones:

$$\sigma = \frac{M}{I_n} y \quad (7.2)$$

y en la 2-2

$$\sigma + d\sigma = \frac{(M + dM)}{I_n} y \quad (7.3)$$

Supongamos ahora separada una parte del prisma de longitud dz por una superficie cilíndrica como se muestra en la fig.7.3. En la parte rayada actúan tensiones normales que originan una fuerza N.

$$N = \int_{\Omega} \frac{M}{I_n} y \, d\Omega \quad (7.4)$$

En la sección 2-2 ocurre algo similar:

$$N + dN = \int_{\Omega} \frac{(M + dM)}{I_n} y \, d\Omega \quad (7.5)$$

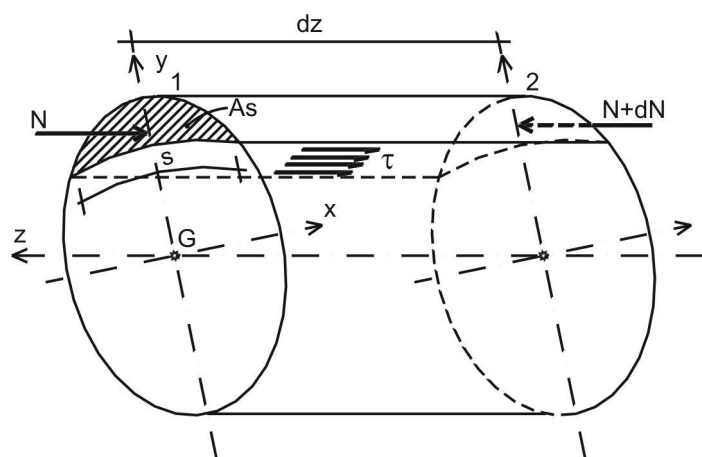


Fig. 7.3

Ambas fuerzas son coaxiales y su resultante vale:

$$dN = \int_{\Omega} \frac{dM}{I_n} y \, d\Omega \quad (7.6)$$

Esta fuerza elemental tiende a hacer deslizar la parte superior del prisma ubicado por encima de la superficie cilíndrica, con respecto al resto del mismo. A esta acción se oponen tensiones tangenciales τ que actúan en la superficie curva de separación.

Para estas tensiones longitudinales admitiremos:

- que su dirección es paralela al eje de la pieza
- que varían en forma continua sobre la superficie curva.

Si llamamos s a la longitud de la curva de intersección de la superficie con el plano de la sección recta, tendremos:

$$dT = dz \int_s \tau \, ds \quad (7.7)$$

por equilibrio: $dT = dN$ (7.8)

$$\int_{\Omega_s} \frac{dM}{I_n} y d\Omega = dz \int_s \tau ds$$

$$\frac{dM}{I_n} \int_{\Omega_s} y d\Omega = dz \int_s \tau ds \rightarrow \frac{dM}{dz} \frac{1}{I_n} S_n^s = \int_s \tau ds = \tau_m S$$

τ_m = valor medio de τ

$$\tau_m = \frac{Q S_n^s}{I_n S} \quad \text{Fórmula de Jouravski-Colignon} \quad (7.9)$$

De acuerdo con la ley de Cauchy, las tensiones τ de resbalamiento longitudinal dan origen en el plano de la sección a tensiones tangenciales, normales en cada punto de la curva s a su correspondiente tangente, y cuyo valor medio está dado por la expresión 7.9.

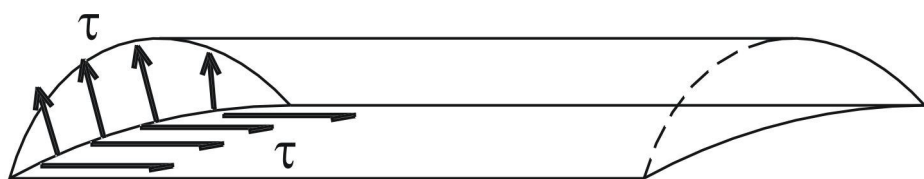


Fig. 7.4

7.2 DISTRIBUCION DE TENSIONES EN SECCIONES USUALES

7.2.1 Sección rectangular

Analicemos una sección rectangular de ancho b y altura h . Si consideramos una traza $s - s$ paralela al eje x , las tensiones tangenciales pueden suponerse constantes en todo el ancho b .

$$\tau_{zy} = \frac{Q S_n^s}{I_n s}$$

$$I_n = \frac{b h^3}{12} \quad s = b$$

$$S_n^s = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \left[\left(\frac{h}{2} - y \right) \frac{1}{2} + y \right]$$

$$S_n^s = \frac{1}{2} b \left(\frac{h}{2} - y \right) \left(\frac{h}{2} + y \right)$$

$$S_n^s = \frac{1}{2} b \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

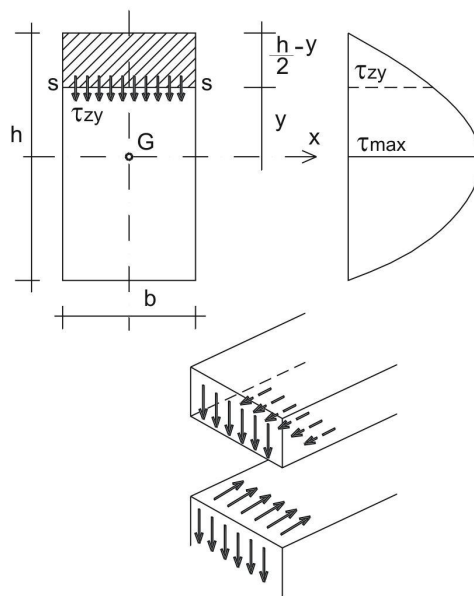


Fig. 7.5

$$\tau_{zy} = \frac{Q \frac{1}{2} b \frac{h^2}{4} \left[1 - \left(\frac{2y}{h} \right)^2 \right]}{\frac{b h^3}{12} b}$$

$$\tau_{zy} = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} \left[1 - \left(\frac{2y}{h} \right)^2 \right] \quad (7.10)$$

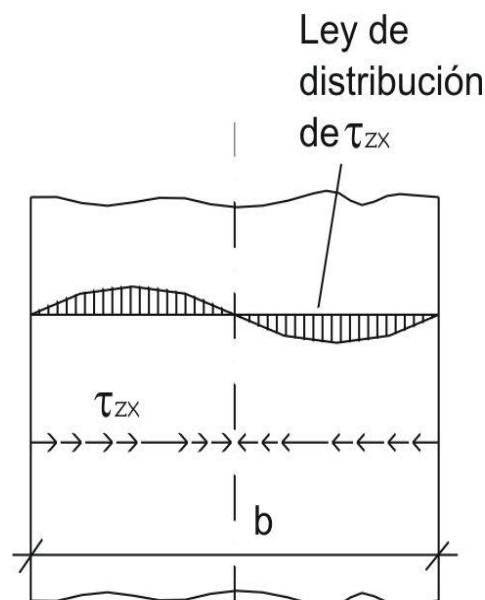
La distribución de las tensiones tangenciales es parabólica, alcanzando el valor máximo en correspondencia con el eje neutro.

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} = 1.5 \frac{Q}{\Omega} \quad (7.11)$$

Acá podemos apreciar lo que habíamos expuesto anteriormente en cuanto a que la distribución real de tensiones tangenciales difiere bastante de la hipótesis de corte puro. También se observa que las tensiones tangenciales se anulan en las fibras superiores e inferiores. Esto es lógico, por cuanto si en esos lugares $\tau_{zy} \neq 0$, de acuerdo con la ley de Cauchy aparecerían en la cara superior e inferior de la pieza prismática tensiones tangenciales longitudinales, las cuales se transformarían en cargas exteriores actuantes, cuya existencia no hemos considerado.

La fórmula de Jouravski – Colignon nos permite calcular el valor de las tensiones tangenciales verticales τ_{zy} , pero debemos aclarar que también aparecen tensiones tangenciales τ_{zx} , cuya ley de distribución puede conocerse si se trata el problema desde el punto de vista de la teoría de la elasticidad. Cuando el rectángulo es muy ancho, estas tensiones alcanzan valores significativos, en caso contrario pueden despreciarse.

Obviamente, en cualquier caso las tensiones τ_{zx} constituyen un sistema autoequilibrado, con resultante $R_x=0$.



7.2.2 Sección circular

En secciones simétricas de contorno curvilíneo no es posible considerar la existencia de tensiones tangenciales τ_{zy} solamente. En efecto, en los puntos del contorno la tensión tangencial debe tener una dirección coincidente con la tangente a la curva que define la sección, ya que de no ser así existiría una componente de la tensión perpendicular a esta tangente, lo que por Cauchy generaría una tensión tangencial longitudinal externa. En la figura 7.7 se ilustra lo que sucedería si τ_A fuese vertical.

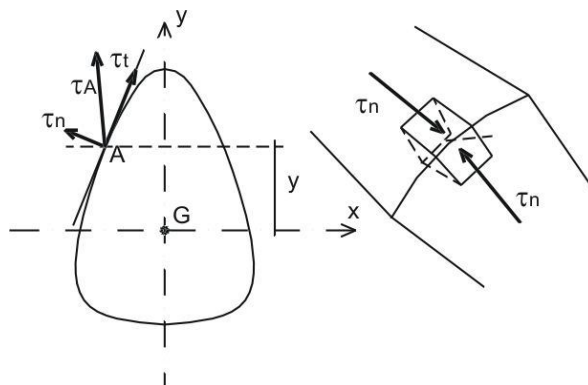


Fig. 7.7

Si admitimos entonces que las tensiones en un punto como el A son tangentes al contorno, resulta evidente que aparecen tensiones τ_{zy} y τ_{zx} .

Para las tensiones tangenciales τ_{zy} admitimos la validez de la fórmula de Colignon, siendo constantes en todo el ancho AB. Para las tensiones τ_{zx} se considera una ley de variación lineal.

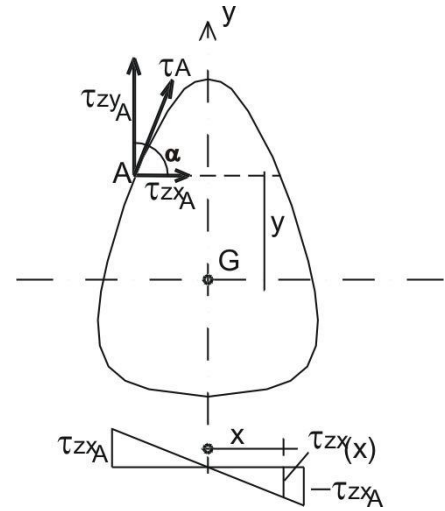


Fig.7.8

$$\tau_{zx} = \tau_{zx_A} \frac{x}{x_A}$$

$$\tau_{zx_A} = \frac{\tau_{zy_A}}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\tau_{zy(y)}}{\operatorname{tg}\alpha}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{zy} \frac{x}{x_A \operatorname{tg}\alpha} \quad (7.12)$$

Según la ecuación 7.12, para una ordenada “y” cualquiera, todas las tensiones tangenciales actuantes en el ancho correspondiente concurren a un punto M.

$$x_A \operatorname{tg}\alpha = |\overline{CM}| \rightarrow \tau_{zx} = \tau_{zy} \frac{x}{|\overline{CM}|}$$

$$\frac{\tau_{zx}}{\tau_{zy}} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_x} = \frac{x}{|\overline{CM}|}$$

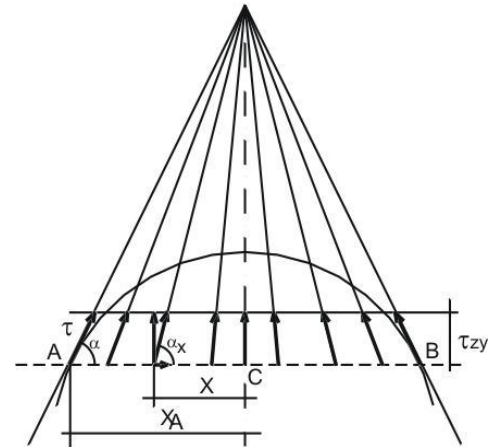


Fig. 7.9

Para el caso particular de una sección circular, aplicando Colignon : $\tau_{zy} = \frac{QS^y}{b_y I_x}$

$$\tau_{zy} = \frac{4}{3} Q \frac{(R^2 - y^2)}{\pi R^4} \quad (7.13)$$

$$x_A \operatorname{tg}\alpha = \frac{x_A^2}{y} = \frac{R^2 - y^2}{y}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{zy} \frac{x y}{R^2 - y^2} = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi R^4} (R^2 - y^2) \frac{x y}{R^2 - y^2}$$

$$\tau_{zx} = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi R^4} x y \quad (7.14)$$

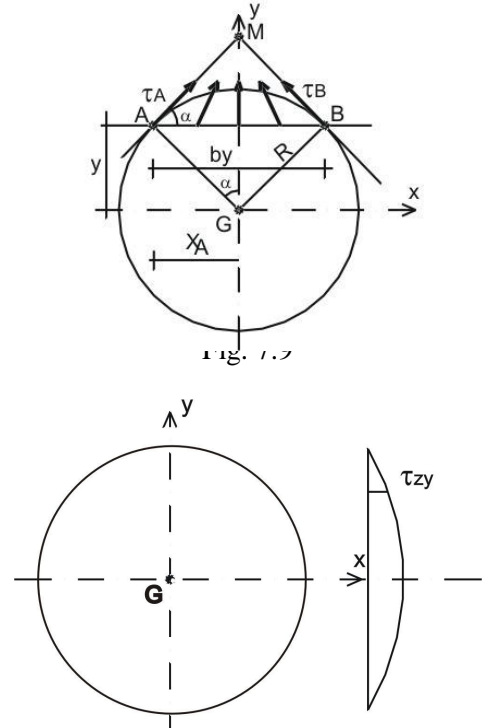


Fig. 7.10

En cualquier punto la tensión tangencial τ puede obtenerse por composición de τ_{zy} y τ_{zx} .

$$\tau = \sqrt{\tau_{zy}^2 + \tau_{zx}^2} \tag{7.15}$$

El valor de τ_{zy} máximo se produce para $y = 0$, donde $\tau_{zx} = 0$ para todo valor de x .

$$\tau_{\max} = -\frac{4}{3} Q \frac{R^2}{\pi R^4} = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{4}{3} \frac{Q}{\Omega} \cong 1.33 \frac{Q}{\Omega} \tag{7.16}$$

En la ultima ecuación podemos ver el valor de la tensión tangencial máxima es 33% mayor que el valor correspondiente al caso de corte puro.

7.2.3 Sección doble T

En la figura 7.11 hemos tratado de idealizar un perfil laminado doble T. Para un corte s1-s1 situado en el ala tendremos según la formula de Colignon:

$$\tau_{zy} = \frac{Q}{I} \frac{\frac{1}{2} b \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{b} = \frac{Q}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \tag{7.17}$$

Para un corte s2-s2 situado en el alma tendremos:

$$\tau_{zy} = \frac{Q}{I} \frac{\frac{bt}{2}(h-t) + \frac{e}{2} \left[\left(\frac{h-t}{2} \right)^2 - y^2 \right]}{e} \tag{7.18}$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q}{2I} \left\{ \frac{bt}{e}(h-t) + \left[\left(\frac{h-t}{2} \right)^2 - y^2 \right] \right\}$$

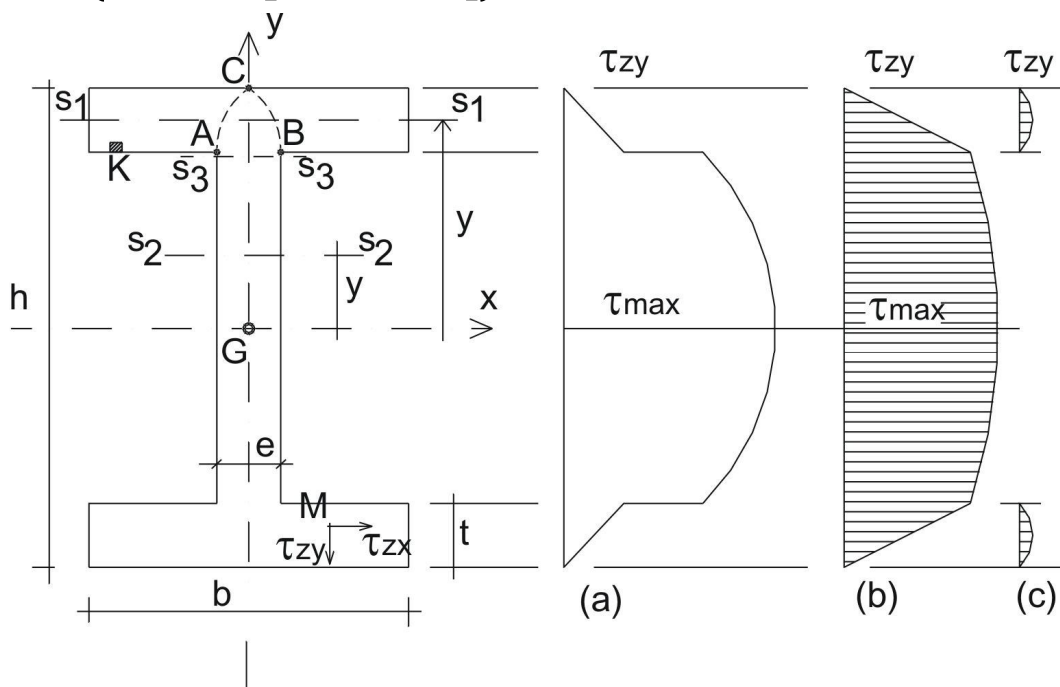


Fig. 7.11

Puede verse que la variación de τ_{zy} según las ecuaciones 7.17 y 7.18 resulta ser parabólica.

En una sección como la s3-s3 aparece una discontinuidad, lo cual se debe a que en la fórmula de Colignon la tensión tangencial es inversamente proporcional al ancho de la pieza a la altura de la fibra considerada, y la sección tiene un cambio brusco de ancho.

Lo que hemos indicado recientemente es incongruente. En efecto, si el diagrama (a) de la figura 7.11 fuese totalmente válido, en un elemento como el k tendríamos una tensión tangencial τ_{zy} no nula, lo que significaría que según Cauchy debería aparecer tensiones rasantes longitudinales en las caras interiores de las alas, donde, por tratarse de una superficie libre de sollicitaciones exteriores, no puede haber tensiones.

La situación real es la siguiente: en un punto tal como M, de la superficie de una de las alas existen tensiones τ_{zy} y τ_{zx} . Las primeras, salvo en la zona ABC de unión de ala y alma, varían según diagramas parabólicos que se anulan en correspondencia con los bordes superior e inferior del ala (ver diagramas (c) en la fig. 7.11), y su valor máximo es muy pequeño, por lo que pueden despreciarse. Para la zona ABC puede suponerse que varían linealmente desde el valor correspondiente a la sección s3-s3 en el alma, hasta anularse en el borde del perfil (ver diagramas (b) en la fig. 7.11).

En cuanto a las tensiones τ_{zx} , su magnitud es tal que no siempre son despreciables. Tienen un papel importante en las secciones para las que la línea de fuerzas coincide con un eje principal de inercia que no es eje de simetría de la sección.

A continuación vamos a desarrollar las expresiones que nos permiten establecer la ley de variación de las tensiones tangenciales τ_{zx} a lo largo de las alas.

Supongamos el mismo perfil de la figura 7.11 al que le efectuamos un corte vertical en una de las alas. Si el perfil está sollicitado por flexión, sobre la parte separada existirán tensiones normales. Siguiendo un razonamiento similar al aplicado el deducir la fórmula de Jouravski – Colignon podemos establecer la siguiente:

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{M}{I} y & \sigma + d\sigma &= \frac{M + dM}{I} y \\ N &= \int_{\frac{h}{2}-t}^{\frac{h}{2}} \sigma d\Omega = \int_{\frac{h}{2}-t}^{\frac{h}{2}} \frac{M}{I} y x dy \\ N + dN &= \int_{\frac{h}{2}-t}^{\frac{h}{2}} \frac{(M + dM)}{I} y x dy \\ dN &= \int_{\frac{h}{2}-t}^{\frac{h}{2}} \frac{dM}{I} y x dy = \frac{dM}{I} x \int_{\frac{h}{2}-t}^{\frac{h}{2}} y dy = \frac{dM}{I} x \frac{t}{2} (h - t) = \frac{dM}{I} S_x\end{aligned}\tag{7.19}$$

S_x : momento estático respecto del eje neutro del área en la figura 7.12

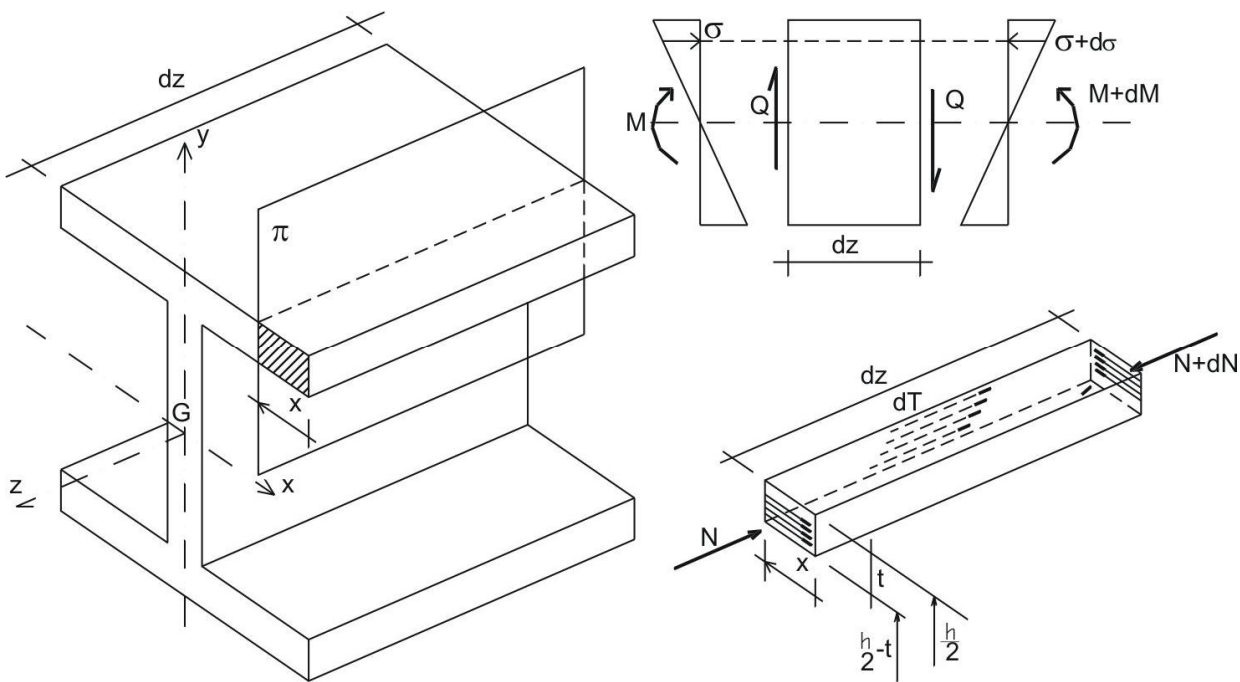


Fig. 7.12

Por razones de equilibrio debe resultar $dN= dT$

$$dT = \tau_{xz} t dz = \frac{dM}{I} S_x \tag{7.20}$$

$$\tau_{xz} = \frac{dM}{dz} \frac{S_x}{It} = \frac{QS_x}{It} \tag{7.21}$$

Por Cauchy, en el área rayada antes mencionada aparecen tensiones tangenciales horizontales

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

$$\tau_{zx} = \frac{Q t(h-t)}{I} x \tag{7.22}$$

$$\tau_{zx} = \frac{Q(h-t)}{2I} x$$

Según la ecuación 7.22 las tensiones τ_{zx} varían linealmente desde cero en el extremo del ala hasta un máximo en correspondencia con el borde del alma donde

$$x = (b-e)/2.$$

En la figura 7.13 se muestran los diagramas correspondientes a las cuatro semialas del perfil. Puede apreciarse que el conjunto de las tensiones tangenciales determina un flujo de tensiones en el sentido de la fuerza de corte. Por otro lado, razones de simetría hacen que para cada una de las alas los esfuerzos horizontales derivados de las tensiones τ_{zx} se anulen entre sí.

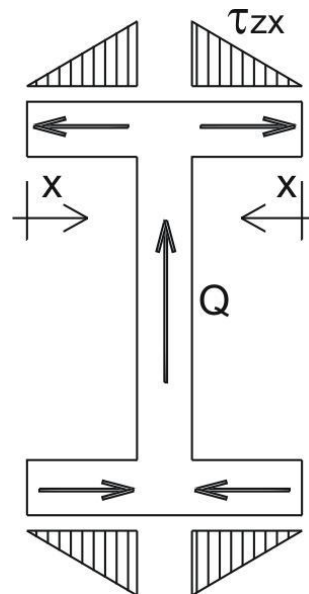


Fig. 7.13

Salvo en casos muy especiales los perfiles I no trabajan bajo tensiones tangenciales muy altas en relación con las tensiones normales de flexión. Siendo además que $\tau_{zx \max} \ll \tau_{zy \max}$, usualmente las tensiones τ_{zx} son ignoradas en el dimensionamiento.

$$\tau_{zx \max} \cong 0.25 \tau_{zy \max} \quad \text{en PN I} \quad (7.23)$$

Del diagrama de distribución de las tensiones τ_{zy} se observa que éstas son prácticamente constantes en el alma.

$$\tau_{zy \max} \cong 1.17 \frac{Q}{eh} \quad \text{en PN I} \quad (7.24)$$

7.3 CURVAS ISOSTÁTICAS

Consideramos una viga como la de la figura y aplicado un cierto estado de cargas; una sección genérica **m-m**, está solicitada por momento flector y por esfuerzo de corte. Para una fibra ubicada a una distancia y_0 el elemento está sometido a tensión normal (σ_{y_0}) y a tensión tangencial (τ_{y_0}) en caras o planos determinados por la dirección del eje de la pieza; los valores que toman ambas tensiones pueden ser calculados utilizando ecuaciones vistas con anterioridad. Aislando el elemento podemos concluir que tenemos un estado plano de tensiones. El círculo de Mohr permite encontrar las direcciones y el valor de las tensiones principales.

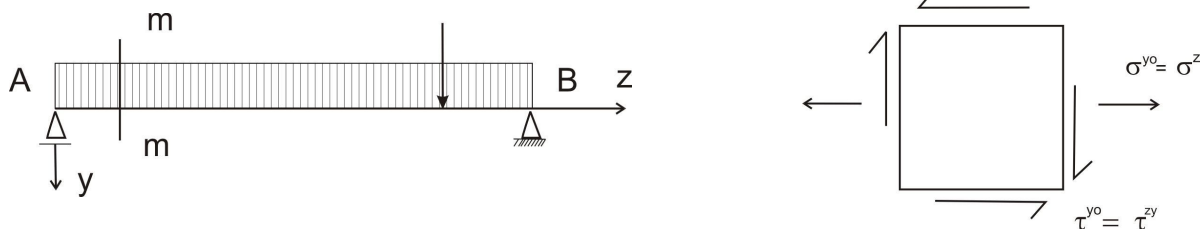
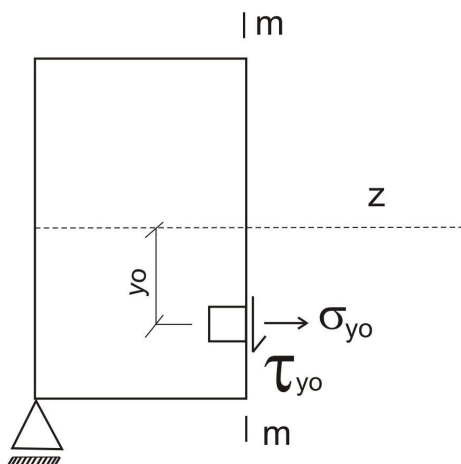


Fig. 7.14



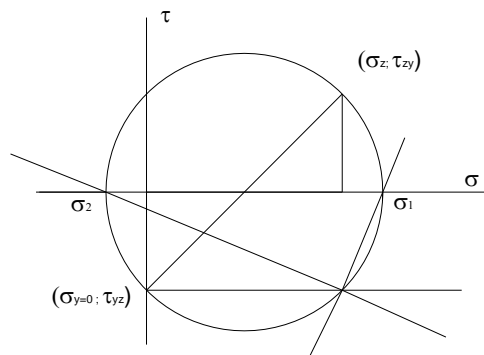


Fig. 7.15

Manteniéndonos en la misma sección pero cambiando la ubicación de la fibra (es decir para distintos y_0), varían los valores de σ_{y_0} y de τ_{y_0} ; esto conlleva que también varíen las direcciones y los valores de las tensiones principales. A lo largo de m-m en los diferentes elementos, obtendríamos direcciones de tensiones σ_1 y σ_2 tales como se indica más abajo.

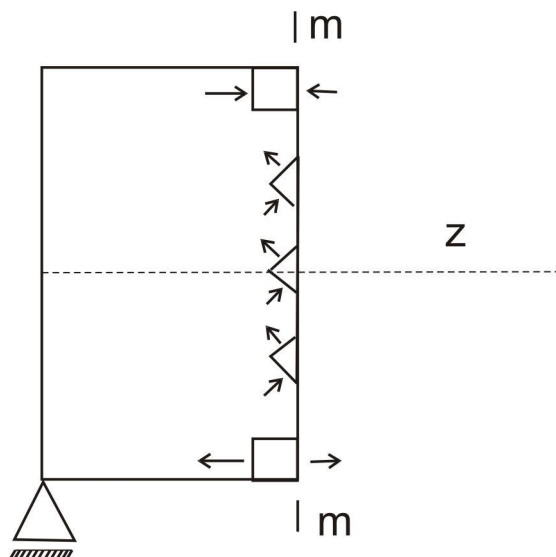


Fig. 7.16

Si tomamos secciones m-m lo suficientemente próximas entre sí y en cada una de ellas tomamos elementos muy cercanos, prolongando las rectas que definen las direcciones principales hasta cortarse, obtendremos poligonales, cuyas envolventes constituyen las **curvas** denominadas **isostáticas** o también **trayectorias de tensiones principales**, cuya propiedad fundamental reside en el hecho de que, en cualquier punto de las mismas la tangente nos da la dirección de una de las tensiones principales, siendo la segunda de dirección ortogonal. En consecuencia por el punto considerado pasará una segunda curva isostática, resultando así dos familias de curvas, ortogonales.

En los bordes libres, sin sollicitación exterior, el mismo borde constituye la isostática de una de las familias, mientras que las de la segunda familia son normales al borde. Ello puede observarse en la siguiente figura, donde se reproducen las isostáticas de una viga rectangular simplemente apoyada, sollicitada por carga repartida.

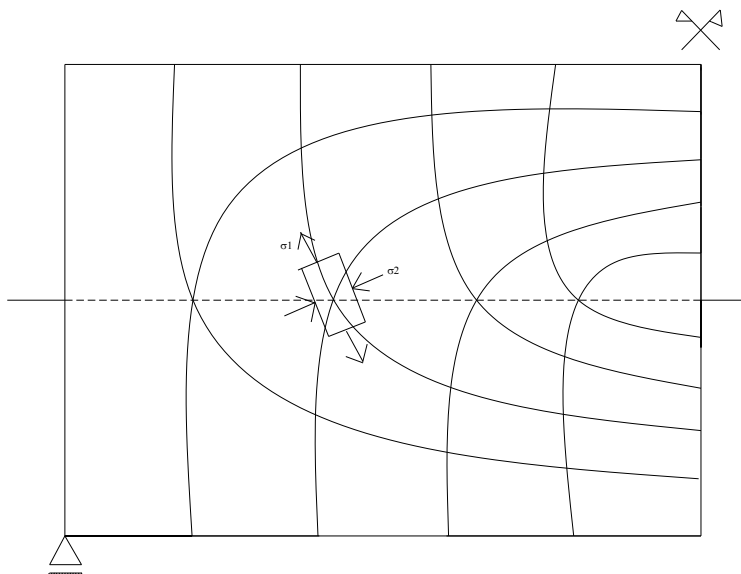


Fig. 7.17

7.4 DIMENSIONAMIENTO DE SECCIONES SOMETIDAS A FLEXIÓN TRANSVERSAL

Considerando el caso de una sección sujeta a flexión recta transversal, es decir que actúan simultáneamente un momento flector y un esfuerzo de corte.

Como ya sabemos, debido al momento flector existen tensiones normales cuya ley de distribución es lineal, alcanzando los valores máximos el las fibras mas alejadas del eje neutro. Debido al esfuerzo de corte se generan tensiones tangenciales, con una ley de distribución que depende de la forma de la sección, pero que en general es parabólica y con un máximo en el eje neutro.

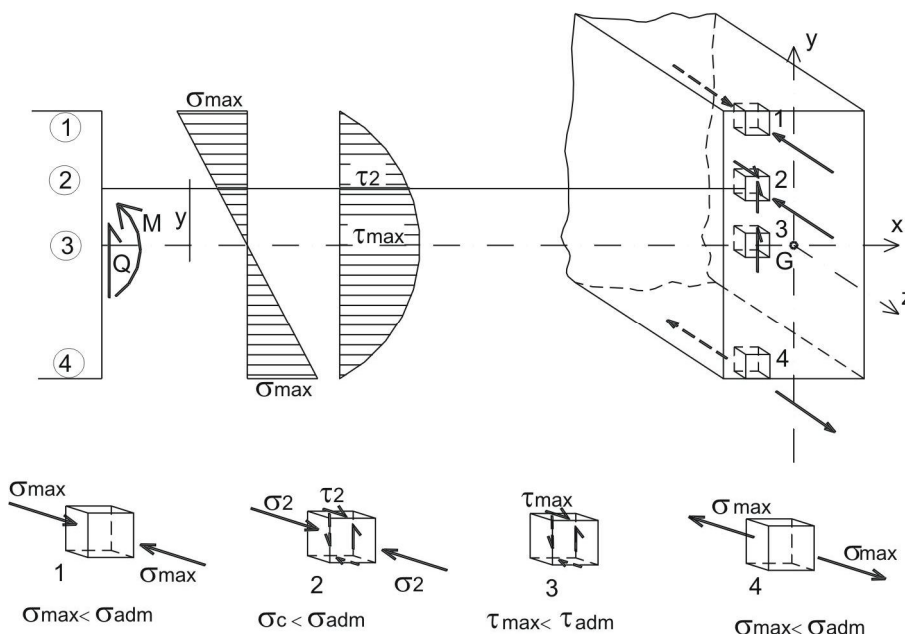


Fig. 7.18

Como consecuencia de la actuación simultánea de estos esfuerzos existen puntos con tensiones normales solamente, con tensiones tangenciales solamente y con tensiones normales y tangenciales simultáneas.

Los requerimientos de seguridad de la pieza son:

- σ solamente: $\sigma < \sigma_{adm}$
- τ solamente: $\tau < \tau_{adm}$
- σ y τ simultáneamente: $\sigma_c < \sigma_{adm}$

Este último caso corresponde a un estado doble, por ello debe verificarse aplicando una teoría de falla.

En la figura 7.18 se muestra lo que sucede cuando la sección es rectangular. En este caso la verificación de un punto como el 2 no es necesaria pues puede demostrarse que está en mejores condiciones que cualquiera de los otros tres. Sin embargo, en el caso de una sección doble T (Fig.7.19), un punto en correspondencia con el cuello del perfil puede estar en peores condiciones que un punto como el 1 o el 3. Esto se debe a que si bien $\sigma_2 < \sigma_{m\acute{a}x}$ y $\tau_2 < \tau_{m\acute{a}x}$, ambos valores son próximos a los máximos y actúan simultáneamente.

Verificaciones:

$$\sigma_1 = \sigma_{max} < \sigma_{adm}$$

$$\sigma_3 = \tau_{max} < \tau_{adm}$$

$$\sqrt{\sigma_2^2 + 3\tau_2^2} < \sigma_{adm} \quad (\text{expresión a utilizar por corresponder el perfil a material dúctil})$$

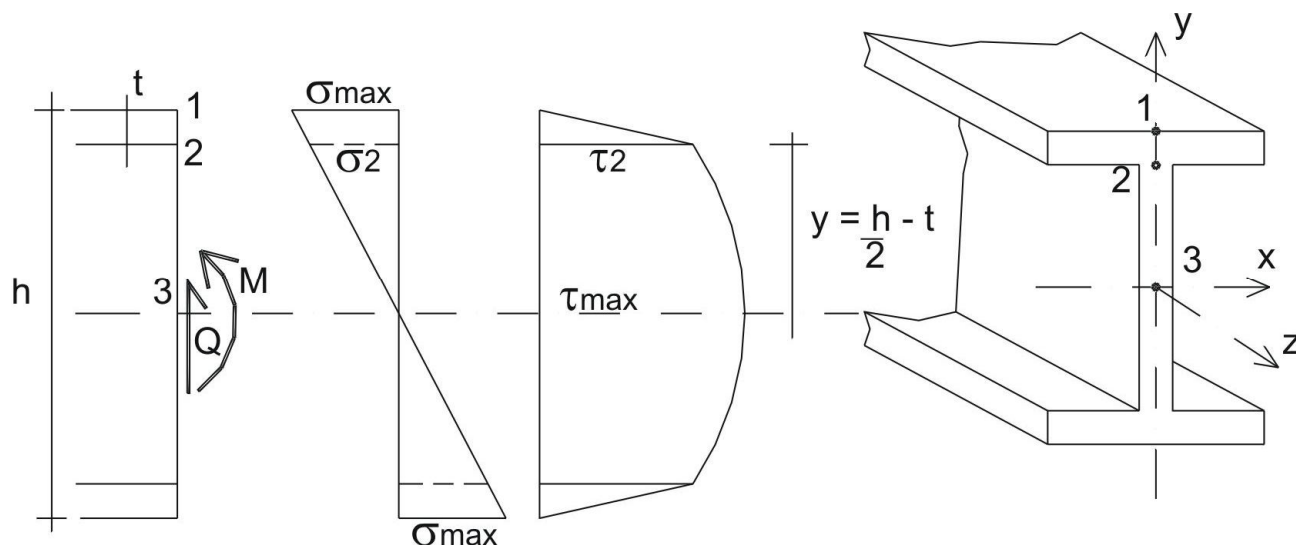


Fig. 7.19

7.5 ABSORCIÓN DE ESFUERZOS RASANTES LONGITUDINALES EN VIGAS

Al estudiar la fórmula de Jouravski – Colignon hemos visto que en una sección transversal de una viga sometida a flexión y corte aparecen tensiones tangenciales. La existencia de estas tensiones está relacionada a la aparición de esfuerzos rasantes longitudinales, los cuales se absorben internamente por la propia continuidad de la pieza.

Veamos que sucede con estos esfuerzos en los casos de vigas compuestas, es decir, vigas cuya sección transversal queda conformada mediante diferentes elementos unidos entre sí, como por ejemplo, una sección cajón de una viga de madera formada por cuatro tabloncillos unidos mediante clavos o

tornillos, o una sección doble T de acero formada por perfiles angulares y planchuela unidos mediante remaches o bulones.

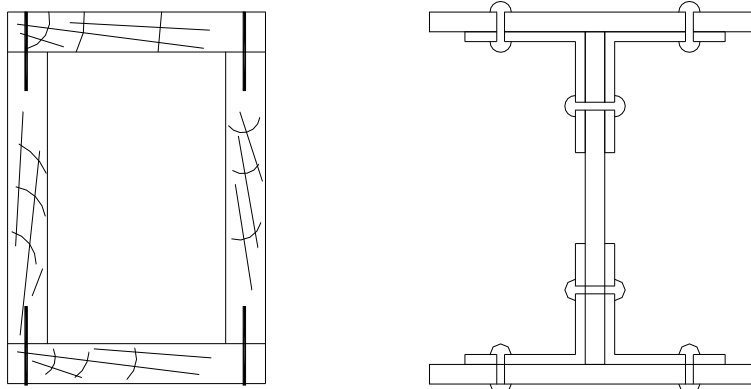


Fig. 7.20

Para poder conformar la pieza se utilizan elementos de unión. Estos elementos deben cumplir la misión de transmitir los esfuerzos rasantes longitudinales entre los distintos elementos constitutivos de la pieza de manera tal que funcionen en conjunto.

Para comprender esto analicemos el siguiente ejemplo, que se trata de una ménsula con una carga concentrada en el extremo. Primeramente supongamos que la viga está constituida por una única pieza:

$$\sigma_{\max} = \frac{Pl}{W_x} = \frac{6Pl}{bh^2} \quad (7.25)$$

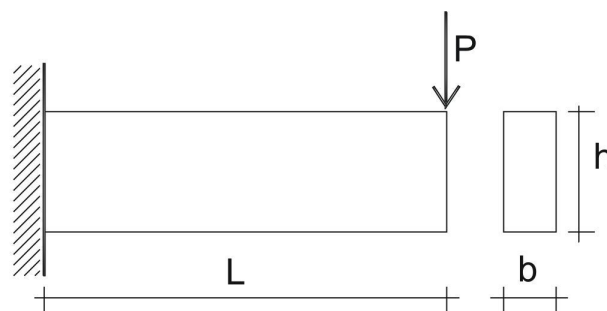
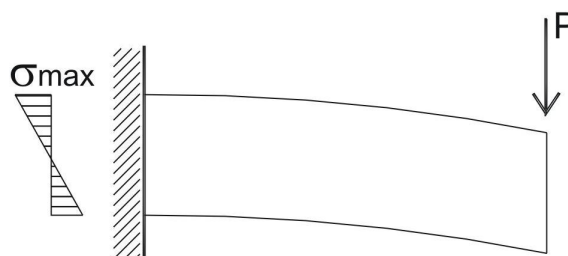


Fig. 7.21



En segunda instancia consideremos que la viga está formada por cuatro láminas superpuestas, las cuales no están vinculadas entre sí. Como las láminas no tienen fricción entre si, cada una de ellas se flexiona independientemente. La fuerza exterior que corresponde a cada lámina es P/4, con lo que la tensión máxima en cada una de ellas será:

$$\sigma_{\max} = \frac{\frac{P}{4}l}{\frac{b}{6}\left(\frac{h}{4}\right)^2} = \frac{6Pl}{bh^2} \cdot 4 \quad (7.26)$$

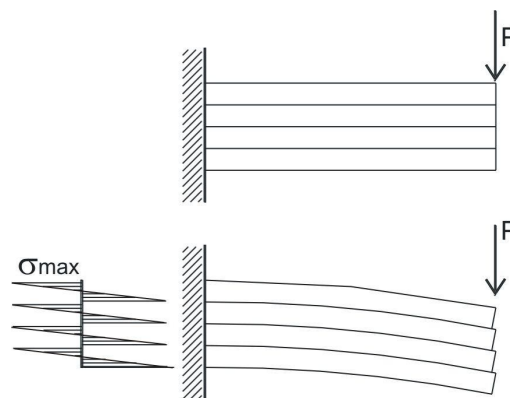


Fig. 7.22

En el segundo caso la tensión resulta mayor, lo mismo que la flecha. Esto se debe a que como no se pudieron absorber los esfuerzos rasantes en las superficies de contacto de las láminas, se pierde rigidez.

Si las láminas se unen, por ejemplo, con pernos rígidos, se observa que la barra trabajará como una unidad, en forma similar a la primera situación. Lo que ocurre es que los pernos, trabajando al corte, absorben los esfuerzos rasantes longitudinales.

El esfuerzo rasante se define como el producto de las tensiones tangenciales por el ancho b de la sección en la superficie de deslizamiento.

$$H = \tau b = \frac{QS_n^s}{bI} b = \frac{QS_n^s}{I} \quad (7.27)$$

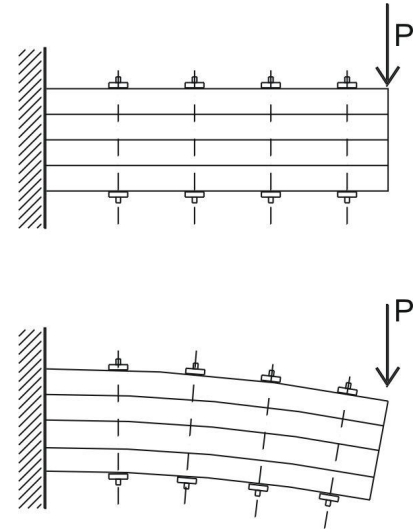


Fig. 7.23

El esfuerzo rasante resulta ser un esfuerzo por unidad de longitud de eje de la pieza y depende del esfuerzo de corte (Q), del momento de inercia de la sección (I) y del momento estático con respecto al eje neutro de la parte de la sección que tiende a separarse del conjunto (S_n^s). Siendo que H depende de Q , varía a lo largo del eje de la pieza según lo hace éste. En el caso del voladizo del ejemplo $Q=cte$, por lo que $H=cte$.

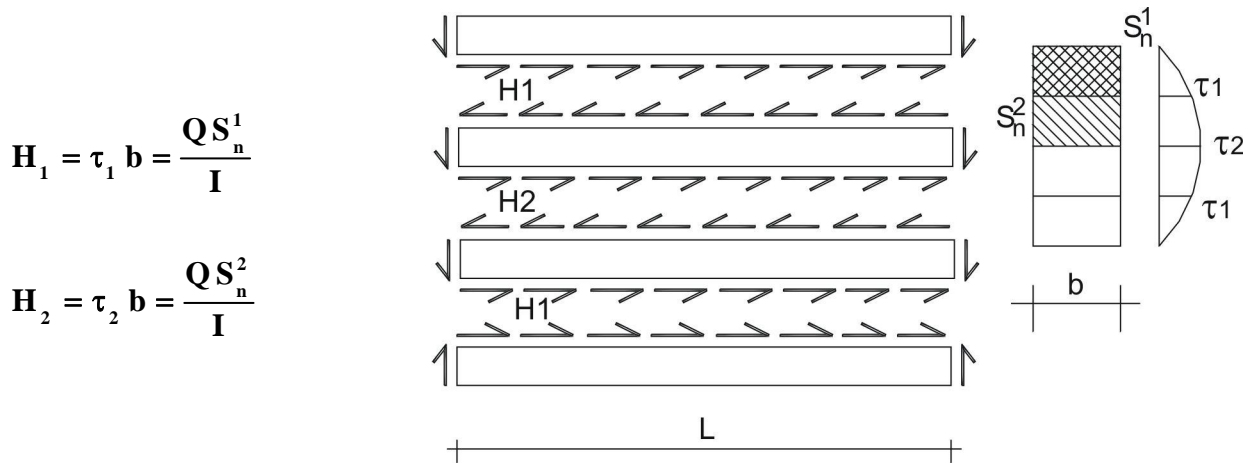


Fig. 7.24

Cada elemento de unión que se coloca debe absorber el esfuerzo rasante que le corresponde según su zona de influencia.

$$T = H e \quad (7.28)$$

Si se usan bulones, por ejemplo:

$$T = H e \leq \tau_{adm_{bul}} \Omega_{bul} n$$

n : cantidad de bulones en paralelo en una misma sección.

$$H e \leq \frac{\pi d^2}{4} \tau_{adm_{bul}} n \quad (7.29)$$

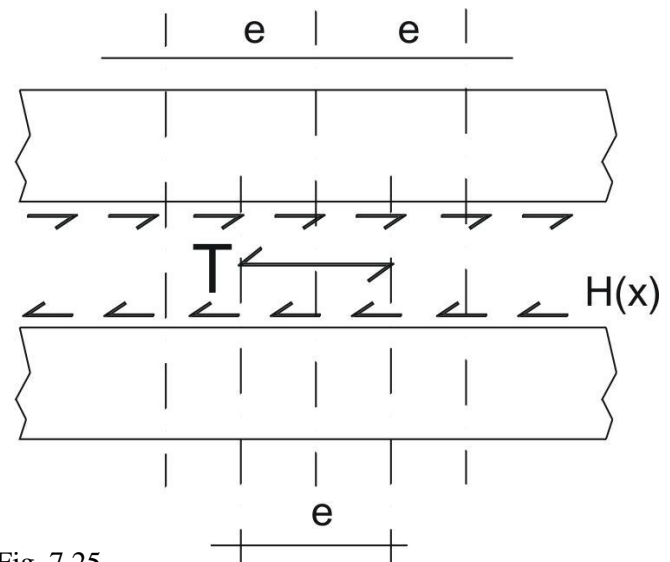


Fig. 7.25

Si se elige el diámetro de los bulones puede calcularse la separación a que deben colocarse, o bien, si se establece esta separación puede determinarse el diámetro necesario.

7.6 CENTRO DE CORTE

Consideramos un perfil U como el de la figura 7.26, sometido a flexión y corte, y en el que el eje de fuerza coincide con el eje principal de inercia "y". Supongamos en primera instancia que es válida la teoría de Jouravski.

$$S_n^y = \frac{e}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) + (b - e) \frac{t}{2} (h - t)$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q S_n^y}{e I}$$

$$S_x = x(h - t) \frac{t}{2}$$

$$\tau_{zx} = \frac{Q S_x}{I t}$$

$$\tau_{zx \max} = \frac{Q (h - t)(b - e)}{2 I} \quad (7.30)$$

$$H = \tau_{zx \max} (b - e) \frac{t}{2} = \frac{Q (h - t)(b - e)^2 t}{4 I} \quad (7.31)$$

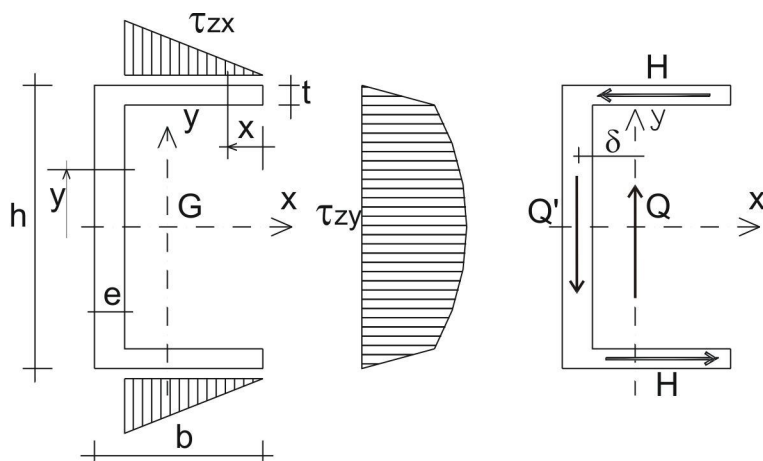


Fig. 7.26

Las fuerzas horizontales H, iguales en valor absoluto para ambas alas pero de signo contrario, forman un par M_H .

$$M_H = H(h - t) = \frac{Q (h - t)^2 (b - e)^2 t}{4 I} \quad (7.32)$$

La resultante de las tensiones tangenciales τ_{zy} da como resultado el esfuerzo de corte Q' , pero aplicado en el eje del alma.

Vemos entonces que no se cumplen las condiciones de equivalencia entre esfuerzos externos e internos de la sección. En efecto, al admitir la teoría de Jouravski aparece un esfuerzo de corte mas un momento torsor.

$$M_t = M_H + Q \delta = Q \left[\frac{(h - t)^2 (b - e)^2 t}{4 I} + \delta \right] \quad (7.33)$$

Por hipótesis sólo teníamos flexión y corte, por lo tanto en este caso no es aplicable esta teoría, no siendo posible admitir la hipótesis de Navier – Bernoulli de la conservación de las secciones planas. Para que haya equilibrio interno deben existir tensiones que generen la anulación del par que aparecería según Jouravski, quedando la sección sometida a un par torsor. Cuando esto ocurre, como ya se ha visto, la sección se alabea.

Si el plano de fuerzas en lugar de pasar por el baricentro G de la sección, lo hace por el punto O situado sobre el eje de simetría y desplazado de la recta de acción Q', una distancia $e_t = M_H/Q$, entonces existiría un momento torsor externo que lograría la equivalencia con los esfuerzos internos originados según la teoría de Jouravski. El punto O determinado en la forma indicada recibe el nombre de "centro de corte".

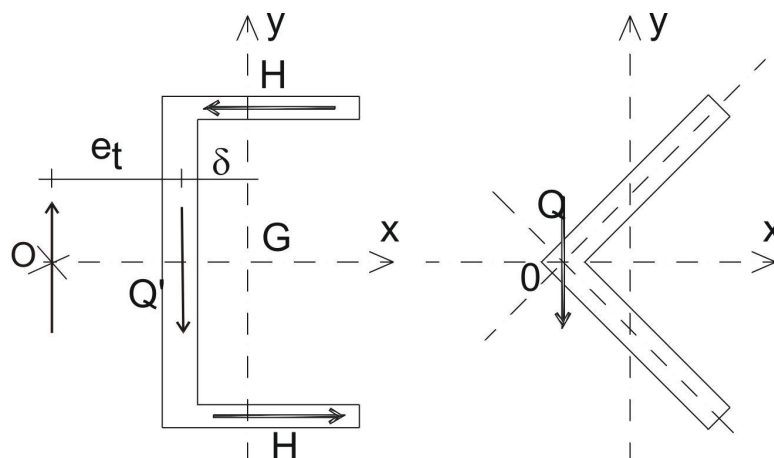


Fig. 7.27

En secciones como la que estamos estudiando la flexión se produce sin que aparezca torsión y sin alabeo, si el eje de fuerzas pasa por el centro de corte.

En el caso de un perfil ángulo de alas iguales el centro de corte se encuentra en el punto de concurrencia de los ejes de ambas alas.

7.7 ENERGIA DE DEFORMACIÓN POR ESFUERZO DE CORTE

Consideramos una viga de sección constante de la cual aislamos un elemento de longitud dz .

$$u_\tau = \frac{\tau \gamma}{2} \quad (7.35)$$

$$U_{(dz)} = \int_{Vol} \frac{\tau \gamma}{2} dVol = \int_{\Omega} \frac{\tau^2}{2G} d\Omega dz \quad (7.36)$$

$$U_{(dz)} = \frac{dz}{2G} \int_{\Omega} \tau^2 d\Omega$$

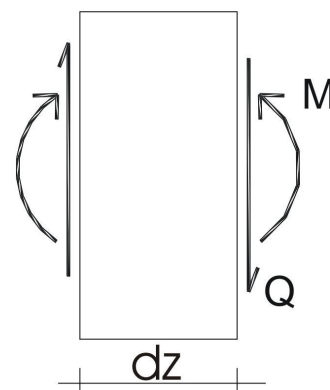


Fig. 7.28

A los efectos de simplificar los cálculos energéticos hacemos el siguiente reemplazo:

$$\tau = \eta \tau_{medio} = \eta \frac{Q}{\Omega} \rightarrow \int_{\Omega} \tau^2 d\Omega = \eta^2 \frac{Q^2}{\Omega^2} \int_{\Omega} d\Omega = \eta^2 \frac{Q^2}{\Omega}$$

llamando:

$$k = \eta^2 \quad (7.37)$$

resulta

$$U_{(dz)} = \frac{k Q^2}{2\Omega G} dz \rightarrow U_Q = \int_z \frac{k Q^2}{2\Omega G} dz \quad (7.38)$$

El coeficiente k recibe el nombre de “coeficiente de corte”. Veamos, por ejemplo, el valor del mismo para una sección rectangular.

$$\tau = \frac{Q}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

$$\int_{\Omega} \tau^2 d\Omega = \frac{Q^2}{4I^2} \int_{\Omega} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)^2 d\Omega = \frac{Q^2}{4I^2} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{h^4}{16} - \frac{h^2}{2} y^2 + y^4 \right) b dy$$

$$\int_{\Omega} \tau^2 d\Omega = \frac{Q^2}{4I^2} b \left[\frac{h^4}{16} h - \frac{h^2}{3} \left(\frac{h}{2} \right)^3 + \frac{2}{5} \left(\frac{h}{2} \right)^5 \right] = \frac{Q^2 b h^5}{4 \frac{b^2 h^6}{30}} = 1.2 \frac{Q^2}{\Omega}$$

$$k = 1.20 \quad (7.39)$$

En perfiles doble T y U el coeficiente de corte resulta ser aproximadamente igual al cociente entre el área de la sección transversal y el área del alma calculada para la altura total del perfil.

$$k \cong \frac{\Omega}{eh} \quad (7.40)$$

7.8 INFLUENCIA DEL CORTE EN ELÁSTICAS DE VIGAS

Al deducir ecuaciones de elástica hemos de tener en cuenta solamente las deformaciones producidas por momento flector. El hecho de no considerar las deformaciones por corte, se debe a que usualmente estas no inciden en la elástica.

Vamos a apreciar lo que hemos dicho recientemente calculando en el siguiente ejemplo la flecha máxima, tomando en cuenta tanto la que es originada por flexión como la producida por corte.

$$T_{\text{ext}} = U_M + U_Q$$

$$T_{\text{ext}} = \frac{P f}{2}$$

$$U_M = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dz \quad M_{(z)} = Pz$$

$$U_M = \int_0^L \frac{P^2}{2EI} z^2 dx = \frac{P^2}{6EI} L^3$$

$$U_Q = \int_0^L \frac{kQ^2}{2\Omega G} dz = k \frac{P^2}{2\Omega G} L$$

$$\frac{P f}{2} = \frac{P^2 L^3}{6EI} + \frac{k P^2 L}{2\Omega G}$$

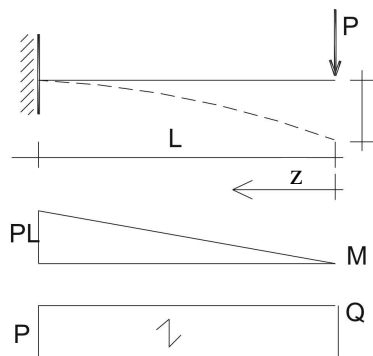


Fig. 7.29

$$f = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{kPL}{\Omega G} \quad \text{con } f_M = \frac{PL^3}{3EI} \quad \text{y } f_Q = \frac{kPL}{\Omega G}$$

Supongamos ahora que el material es acero y que la sección es rectangular. Vamos a comparar f_M con f_Q .

$$\frac{f_M}{f_Q} = \frac{\frac{PL^3}{3EI}}{\frac{kPL}{\Omega G}} = \frac{\Omega G L^2}{3EI k}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \cong \frac{E}{2.6}$$

$$\frac{f_M}{f_Q} = \frac{bh EL^2}{(3 * 2.6 * 1.2)E \frac{bh^3}{12}} = 1.3 \left(\frac{L}{h} \right)^2$$

Para una relación frecuente $L/h = 10$ resulta $f_M = 130 f_Q$, de lo que puede verse que el hecho de despreciar el efecto de corte implica un error menor que el uno por ciento.

Cuando la relación L/h es baja, por ejemplo $L/h = 1$ donde $f_M = 1.30 f_Q$, el error que se comete es muy grande. En este caso el error es del orden del 40 %.