

8

DEFORMACIONES EN LA FLEXIÓN

8.1 ANALISIS DE DEFORMACIONES

8.1.1 Generalidades

Las piezas flexadas sufren desplazamientos o deflexiones, cuyo control es tan importante para garantizar el buen comportamiento estructural como la verificación de la resistencia.

Cuando la estructura presenta deformaciones excesivas, la percepción de las mismas por parte de los usuarios genera en éstos una sensación de alto riesgo. No sólo esto es muy significativo sino que también pueden aparecer problemas colaterales tales como fisuración en tabiques de mampostería que apoyen sobre la estructura y en cielorrasos.

Los elementos de máquinas, debido a grandes deflexiones pueden presentar desgastes prematuros u originar efectos vibratorios inadecuados.

El conocimiento de las deformaciones resulta también sumamente importante desde el punto de vista constructivo. En efecto, si se conoce por ejemplo, la flecha máxima que tendrá una viga de hormigón armado sometida a las cargas permanentes, cuando se la construye puede contraflecharse el encofrado de manera tal de compensar esa deformación, de modo que la pieza quede para ese estado de cargas sin deformación aparente.

Por otro lado, no es posible conocer las características dinámicas y vibratorias de un elemento estructural sino se analizan deformaciones. Así mismo, y atendiendo a lo que hemos demostrado en el artículo 3.2, el análisis de las deflexiones resulta imprescindible para la resolución estática de piezas flexadas hiperestáticas.

Todo esto ha motivado la existencia de numerosos métodos de cálculo de deformaciones, algunos aplicables a cualquier tipo de estructuras y otros solamente a estructuras lineales. A continuación analizaremos algunos de estos métodos.

8.1.2 Línea elástica

8.1.2.1 Ecuación

Llamaremos “Línea elástica” a la forma que adopta el eje de una viga al producirse la deformación de la misma por acción de las cargas exteriores.

Para deducir la ecuación de la elástica vamos a suponer que las deformaciones son pequeñas. Además solo consideramos las deformaciones debidas a los momentos flectores. (ver art. 7.8)

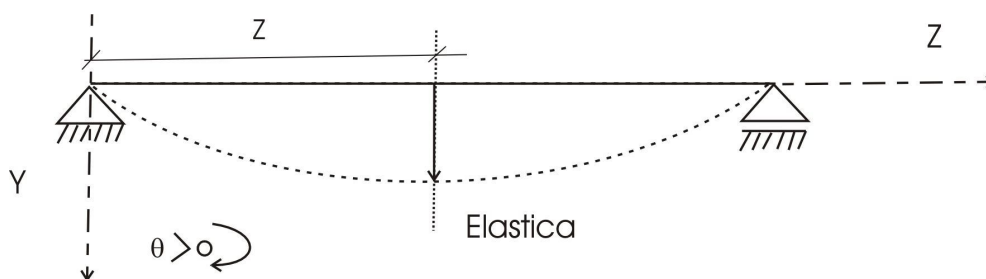


Fig.8.1

El ángulo que forma la tangente a la elástica en un punto con respecto a la horizontal, es el mismo que habrá girado la sección recta en dicho punto con respecto a la vertical.

Si consideramos otra sección ubicada a una distancia dz con respecto a la anterior, entre ambas habrá un giro relativo $d\theta$.

$$ds = \rho d\theta \rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} \quad (8.1)$$

$$ds \cong dz = \rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dz}$$

Por ser θ un ángulo pequeño:

$$\theta \cong \text{tg}\theta = \frac{dy}{dz} \rightarrow \frac{d\theta}{dz} = \frac{dy^2}{dz^2} = \frac{1}{\rho} \quad (8.2)$$

Para los ejes coordenados elegidos vemos que a valores crecientes de z corresponden valores decrecientes de θ . En consecuencia, en la ecuación 8.2 debemos afectar al primer término de un signo menos.

$$-\frac{dy^2}{dz^2} = \frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI} \quad (8.3)$$

$$y'' = -\frac{M_z}{EI} \quad \text{Ecuación diferencial de la línea Elástica} \quad (8.4)$$

Cuando la barra es muy flexible y los desplazamientos no son pequeños debe utilizarse para la curvatura la expresión rigurosa:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\frac{dy^2}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (8.5)$$

Conocida en cada caso la función que define la variación del momento flector, por integración de la ecuación diferencial 8.4 se determina la correspondiente ecuación de la línea elástica, la que permite obtener el corrimiento máximo o “flecha”.

En la práctica usualmente se acotan los valores relativos flecha – luz (f/L). Cuando las vigas tienen luces muy grandes y cargas de poca consideración, son frecuentemente determinantes en el dimensionamiento las condiciones relativas a las flechas.

$$\left(\frac{f}{L}\right)_{\max} = \frac{1}{300} \text{ a } \frac{1}{500} \quad (8.6)$$

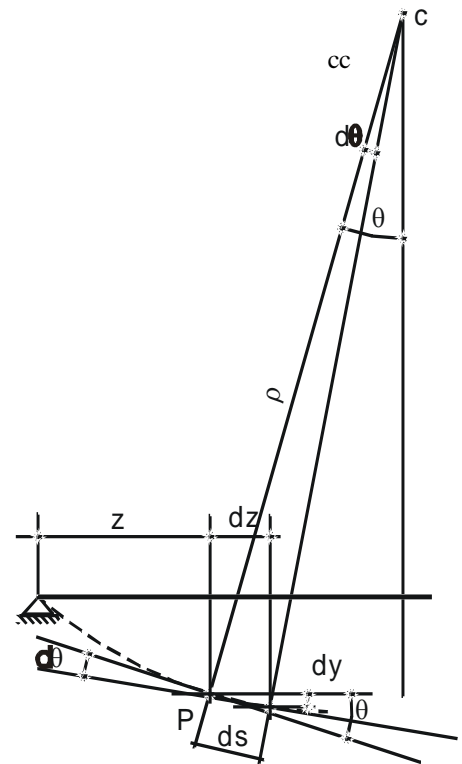


Fig. 8.2

Para la deducción de la ecuación de la elástica, en algunas circunstancias resulta más práctico partir de la ecuación del corte o de la carga. Eso no es ningún inconveniente ya que conocemos la siguiente relación:

$$\frac{d^2M}{dz^2} = \frac{dQ}{dz} = -q_z \quad (8.7)$$

luego:

$$\begin{aligned} y'' &= -\frac{M_z}{EI} \\ y''' &= -\frac{Q_z}{EI} \\ y^{IV} &= \frac{q_z}{EI} \end{aligned} \quad (8.8)$$

8.1.2.2. Ejemplos de aplicación

a) Elástica de una viga simplemente apoyada sometida a una carga uniformemente repartida.

$$M_z = \frac{qL}{2} z - \frac{q}{2} z^2$$

$$EIy'' = -M_z$$

$$EIy' = \frac{qLz^2}{4} - \frac{q}{6} z^3 + C_1$$

$$EIy = -\frac{qLz^3}{12} + \frac{q}{24} z^4 + C_1z + C_2$$

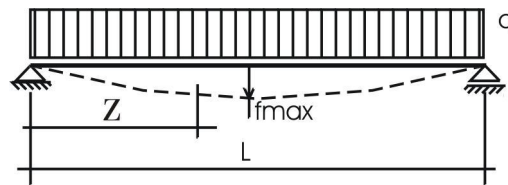


Fig. 8.3

Para encontrar las constantes de integración debemos considerar las siguientes condiciones de borde:

$$y_{(z=0)} = 0 \quad \rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$y_{(z=L)} = 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{qL^4}{12} + \frac{qL^4}{24} + C_1L = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = \frac{qL^3}{24}$$

(8.9)

$$y_{(z)} = \frac{1}{EI} \left[-\frac{qL}{12} z^3 + \frac{q}{24} z^4 + \frac{qL^3}{24} z \right]$$

$$y_{(z)} = \frac{qL^4}{24EI} \left[-\left(\frac{z}{L}\right)^4 - 2\left(\frac{z}{L}\right)^3 + \left(\frac{z}{L}\right) \right]$$

Por razones de simetría la flecha máxima se produce para $z = L/2$

$$f = \frac{qL^4}{24EI} \left[\frac{1}{16} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right] = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI} \quad (8.10)$$

$$f = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI}$$

b) Elástica de una ménsula con carga uniformemente repartida

$$M_z = -\frac{qz^2}{2}$$

$$EIy'' = \frac{qz^2}{2}$$

$$EIy' = \frac{qz^3}{6} + C_1$$

$$EIy = \frac{qz^4}{24} + C_1z + C_2$$

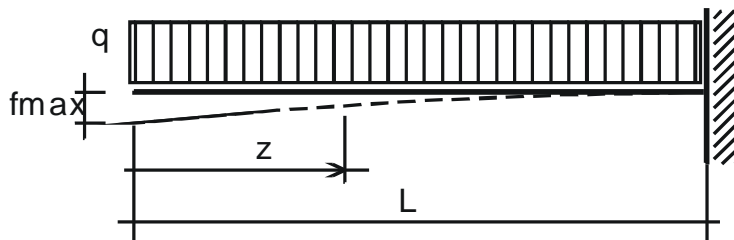


Fig. 8.4

$$z = L \rightarrow y' = 0 \rightarrow C_1 = -\frac{qL^3}{6}$$

$$y = 0 \rightarrow \frac{qL^4}{24} - \frac{qL^4}{6} + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = \frac{qL^4}{8}$$

$$y_{(z)} = \frac{1}{EI} \left[\frac{qz^4}{24} - \frac{qL^3}{6}z + \frac{qL^4}{8} \right] \quad (8.11)$$

$$y_{(z)} = \frac{qL^4}{8EI} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{z}{L} \right)^4 - \frac{4}{3} \left(\frac{z}{L} \right) + 1 \right]$$

$$f = \frac{qL^4}{8EI} \quad (8.12)$$

c) Elástica de una viga simplemente apoyada sometida a una carga concentrada

$$z \leq a \quad M_{(z)} = \frac{Pb}{L}z$$

$$a < z \leq L \quad M_{(z)} = \frac{Pb}{L}z - P(z-a)$$

$$z \leq a \quad EIy'' = -\frac{Pb}{L}z$$

$$a < z \leq L \quad EIy'' = -\frac{Pb}{L}z + P(z-a)$$

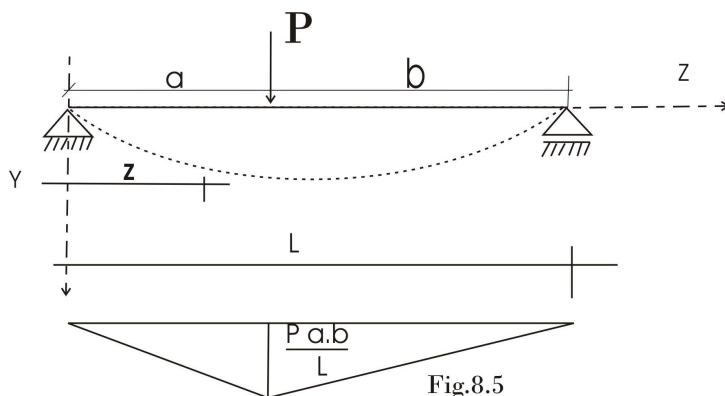


Fig.8.5

Dado que la función momento no queda expresada mediante una única ley debemos integrar en dos campos distintos.

$$EI y'_i = -\frac{Pb}{2L} z^2 + C_1$$

$$EI y'_d = -\frac{Pb}{2L} z^2 + \frac{P(z-a)^2}{2} + C_2$$

$$EI y_i = -\frac{Pb}{6L} z^3 + C_1 z + C_3$$

$$EI y_d = -\frac{Pb}{6L} z^3 + \frac{P(z-a)^2}{2} z + C_2 z + C_4$$

$$z = a \rightarrow y'_i = y'_d \rightarrow C_1 = C_2$$

$$y_i = y_d \rightarrow C_3 = C_4$$

$$z = 0 \rightarrow y_i = 0 \rightarrow C_3 = 0 \Rightarrow C_4 = 0$$

$$z = L \rightarrow y_d = 0 \rightarrow -\frac{PbL^2}{6} + \frac{Pb^3}{6} + C_2 L = 0$$

$$C_2 = \frac{Pb}{6L} (L^2 - b^2) = C_1$$

$$z \leq a \quad y_{(z)} = \frac{Pb}{6LEI} [-z^3 + (L^2 - b^2)z] \tag{8.13}$$

$$a < z \leq L \quad y_{(z)} = \frac{P}{6EI} \left[-\frac{bz^3}{L} + (z-a)^3 + b \frac{(L^2 - b^2)}{L} z \right]$$

En el caso particular en que la carga se encuentra en la mitad de la luz:

$$f = \frac{P L^3}{48EI} \tag{8.14}$$

8.1.3 Método del área del diagrama de momentos

8.1.3.1 Teoremas del área del diagrama de momentos reducidos

Si relacionamos las ecuaciones 8.1 y 8.3 analizadas precedentemente llegamos a la siguiente expresión:

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{M}{EI} \tag{8.15}$$

y siendo $ds \cong dz$ obtenemos:

$$d\theta = \frac{M}{EI} dz \tag{8.16}$$

Consideremos una porción de línea elástica comprendida entre dos puntos cualesquiera A y B, tal como se indica en la figura 8.6. Las tangentes a la línea elástica en los puntos extremos, indicadas a través de los segmentos AB' y A'B, forman entre si un ángulo θ que suponemos pequeño.

Supongamos que el diagrama entre los puntos A_1 y B_1 es el diagrama de momentos flectores dividido por EI correspondiente a la estructura que presenta la elástica supuesta. A este diagrama lo denominaremos "diagrama de momentos reducidos".

Si consideramos dos secciones de la elástica muy próximas, separadas entre si ds , ambas secciones presentan un giro relativo $d\theta$. En virtud de la ecuación 8.16 ese valor resulta ser igual al área de la franja rayada del diagrama de momentos reducidos. Luego, si integramos la ecuación 8.16 obtenemos el ángulo θ que forman las tangentes externas.

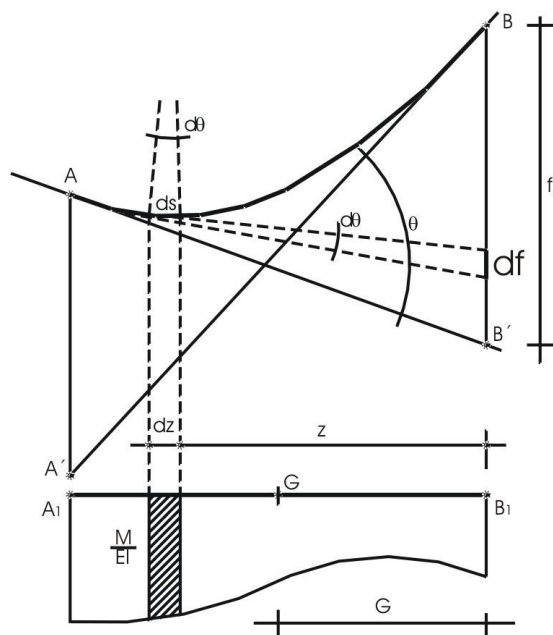


Fig. 8.6

$$\theta = \int_A^B \frac{M}{EI} dz \tag{8.17}$$

El resultado de la integral dada por la ecuación 8.17 no es sino el área del diagrama de momentos reducidos, con lo cual puede enunciarse el siguiente teorema:

TEOREMA I: El ángulo θ comprendido entre dos tangentes en dos puntos cualesquiera A y B de la línea elástica, es igual al área total del trozo correspondiente del diagrama de momentos reducidos.

Consideramos nuevamente la figura 8.6 y observemos el segmento BB'. Podemos apreciar que cada segmento ds de la elástica contribuye a la longitud f en una cantidad $z \cdot d\theta$. Luego, integrando estas distancias podemos obtener el valor de f .

$$f = \int_A^B z d\theta = \int_A^B \frac{M}{EI} z dz \tag{8.18}$$

Dado que el producto $\frac{M}{EI} dz$ es el área de la franja rayada del diagrama de momentos reducidos, la integral de la ecuación 8.18 resulta ser el momento estático con respecto a B del área del diagrama de momentos reducidos. Esto último permite enunciar el siguiente teorema:

TEOREMA II: Dado dos puntos A y B pertenecientes a una línea elástica, la ordenada de B respecto a la tangente en A es igual al momento estático con respecto a B del área de momentos reducidos comprendida entre A y B.

El momento estático recientemente mencionado puede calcularse en forma muy simple multiplicando el área total del diagrama de momentos reducidos comprendida entre A y B por la distancia a su centro de gravedad. Por otro lado, si la figura que representa el diagrama puede descomponerse en figuras elementales tales como rectángulos, triángulos, parábolas, etc., el momento estático total resultara ser la suma de los correspondientes a cada una de las figuras elementales.

Una observación muy importante en cuanto a la aplicación de los teoremas anteriores es que cuando la elástica tiene un punto de inflexión el diagrama de momentos reducidos cambia de signo, en ese caso cada parte del diagrama debe tratarse con su propio signo.

Usualmente los dos teoremas anteriores se conocen como Teoremas de Mohr, sin embargo éstos fueron presentados por Green en 1873, Mohr había presentado en 1868 un artículo donde desarrollaba las bases del método conocido como “Método de la viga conjugada”, el que veremos luego.

8.1.3.2 Aplicaciones

a) Ejemplo 1

En este caso vamos a determinar la flecha δ y el ángulo θ en el borde libre de la estructura en voladizo de la figura 8.7.

Dado que la tangente a la elástica en B coincide con el eje no flexado de la viga, la flecha δ resulta ser el desplazamiento de A respecto a la tangente en B. Aplicando entonces el teorema II tenemos:

$$\delta = \frac{PL}{EI} \frac{L}{2} \frac{2}{3} L = \frac{PL^3}{3EI} \quad (8.18)$$

Idénticamente, la pendiente en A es el ángulo que forma las tangentes en A y B, por lo que según el teorema I tenemos:

$$\theta = \frac{PL}{EI} \frac{L}{2} = \frac{PL^2}{2EI} \quad (8.19)$$

b) Ejemplo 2

A continuación vamos a determinar el valor de la flecha máxima que se produce en la viga simplemente apoyada de la figura 8.8.

La flecha máxima tiene lugar en el punto C donde la tangente a la elástica es horizontal. El ángulo entre las tangentes en A y C resulta igual a θ_A . Este ángulo podemos calcularlo de la siguiente manera:

Aplicando el teorema II podemos calcular la distancia BB'.

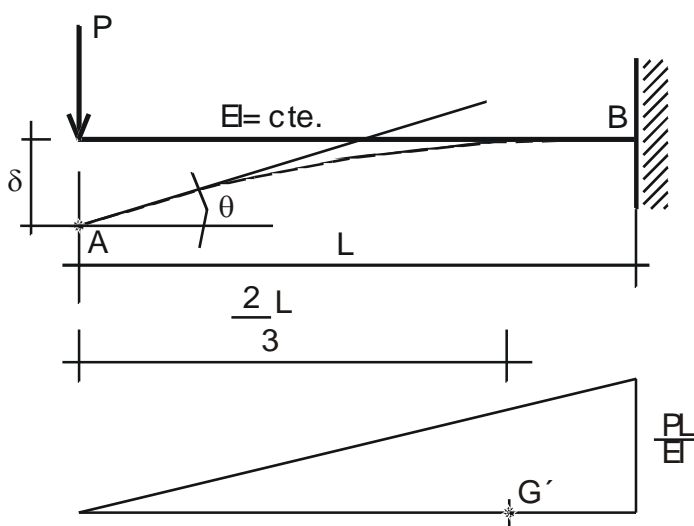


Fig. 8.7

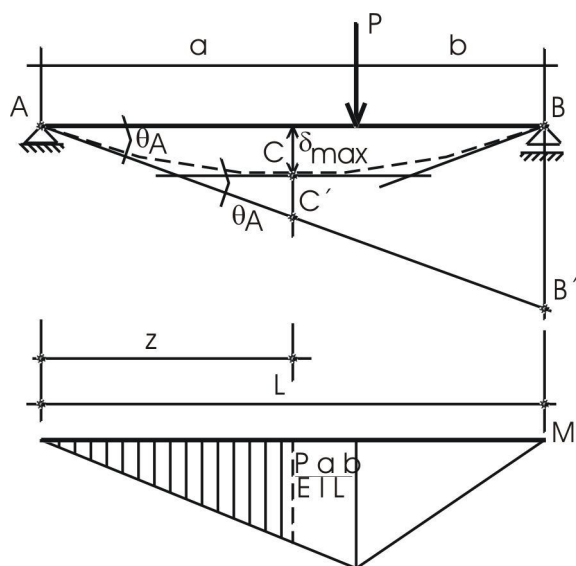


Fig. 8.8

$$BB' = \frac{Pab}{EIL} \frac{a}{2} \left(\frac{a}{3} + b \right) + \frac{Pab}{EIL} \frac{b}{2} \frac{2}{3} b$$

$$BB' = \frac{Pab}{6EI} (L + b)$$

La distancia anterior también puede calcularse como:

$$BB' = \theta_A L$$

Con lo que tenemos:

$$\theta_A = \frac{P}{EI} \frac{ab(L+b)}{6L} \quad (8.20)$$

Por otro lado, el área rayada en el diagrama de momentos reducidos también debe darnos el valor de θ_A . Siendo que ya conocemos el valor de este ángulo podemos calcular z , que es la distancia desde A hasta el punto donde la flecha es máxima.

$$\theta_A = \frac{Pb}{EIL} z \frac{z}{2} = \frac{P}{EI} \frac{ab(L+b)}{6L} \rightarrow z = \sqrt{\frac{a(L+b)}{3}} \quad (8.21)$$

Si aplicamos el teorema II podemos determinar la distancia CC' , a partir de la cual determinamos δ_{\max} .

$$CC' = \frac{Pb}{EIL} z \frac{z}{2} \frac{z}{3} = \frac{Pb z^3}{6EIL}$$

$$\delta_{\max} = \theta_A z - CC' = \frac{P}{EI} \frac{ab(L+b)}{6L} z - \frac{Pb}{6EIL} z^3$$

$$\delta_{\max} = \frac{Pb}{9\sqrt{3}L} \sqrt{a^3(L+b)^3} \quad (8.22)$$

c) Ejemplo 3

En este ejemplo vamos a determinar el descenso del punto D de la viga Gerber de la figura 8.9.

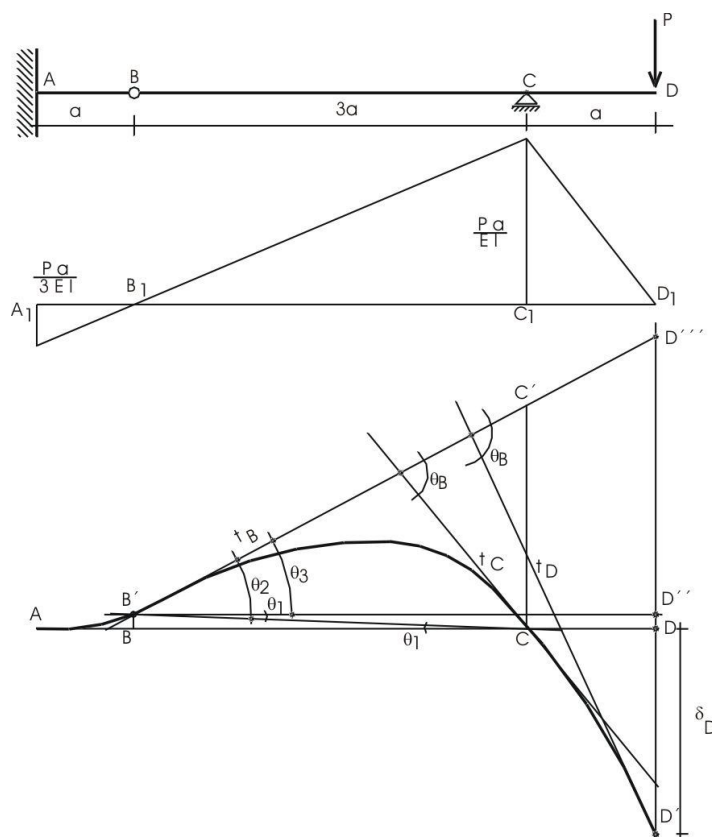


Fig. 8.9

$$\delta_D = DD' = D''D' - D''D' - D''D$$

$$D''D = B'B$$

$$D''D' = \theta_3 4a$$

$$\theta_3 = \theta_2 - \theta_1 = \frac{C'C}{3a} - \frac{B'B}{3a} = \frac{(C'C - B'B)}{3a}$$

$$\delta_D = D''D' - \frac{4a}{3a}(C'C - B'B) - B'B$$

$$\delta_D = D''D' - \frac{4}{3}C'C + \frac{1}{3}B'B$$

$$\delta_D = D''D' - \frac{4}{3}C'C + \frac{1}{3}B'B \quad (8.23)$$

Las distancias $D''D'$, $C'C$ y $B'B$ pueden calcularse utilizando el teorema II. La distancia $D''D'$ resulta ser igual al momento estático respecto del punto D del diagrama de momentos reducidos comprendido entre los puntos B_1 y D_1 , la distancia $C'C$ puede calcularse como el momento estático respecto del punto C del diagrama de momentos reducidos comprendido entre los puntos B_1 y C_1 , y la distancia $B'B$ se calcula como el momento estático respecto del punto B de la parte del diagrama de momentos reducidos comprendidos entre los puntos A_1 y B_1 .

$$D''' D' = \frac{Pa}{EI} \frac{3}{2} a \cdot 2a + \frac{Pa}{EI} \frac{a}{2} \frac{2}{3} a = \frac{10}{3} \frac{Pa^3}{EI}$$

$$C' C = \frac{Pa}{EI} \frac{3a}{2} a = \frac{3}{2} \frac{Pa^3}{EI}$$

$$B' B = \frac{Pa}{3EI} \frac{a}{2} \frac{2}{3} a = \frac{Pa^3}{9EI}$$

$$\delta_D = \frac{10}{3} \frac{Pa^3}{EI} - 2 \frac{Pa^3}{EI} + \frac{1}{27} \frac{Pa^3}{EI} = \frac{37}{27} \frac{Pa^3}{EI}$$

$$\delta_D = \frac{37}{27} \frac{Pa^3}{EI} \quad (8.24)$$

8.1.4. Método de la viga conjugada

Recordemos dos ecuaciones diferenciales ya conocidas:

$$\frac{d^2 M}{dz^2} = -q \quad (8.25)$$

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = -\frac{M}{EI} \quad (8.26)$$

Como ya sabemos, la ecuación 8.25 relaciona el momento flector con la carga aplicada, mientras que la ecuación 8.26 da la relación existente entre la elástica y el momento flector reducido, tal como denominamos a la relación $M/(EI)$ en el ítem anterior.

Si consideramos al diagrama de momentos reducidos o diagrama de curvaturas, como un diagrama de cargas ficticias $q^* = M/(EI)$ aplicado sobre una viga también ficticia y que llamaremos “viga conjugada”, de la identidad formal entre las dos ecuaciones anteriores surge que la línea elástica de una viga coincide con el diagrama de momentos ficticios M^* producido en todas las secciones de su viga conjugada cargada con la carga q^* . En otras palabras:

$$y = M^* \quad (8.27)$$

Esta última conclusión se conoce como Teorema de Mohr sobre la línea elástica, y al diagrama de momentos reducidos utilizando como carga se lo denomina “carga elástica”.

Si la viga es homogénea y de sección constante ($EI = \text{cte}$), la viga conjugada puede cargarse directamente con el diagrama de momentos, siempre que luego los resultados sean divididos por EI .

Si derivamos la ecuación 8.27 obtenemos:

$$y' = \text{tg}\theta = \frac{dM^*}{dz} = Q^* \quad (8.28)$$

siendo Q^* el esfuerzo de corte ficticio originado en la viga conjugada por la carga q^* .

La ecuación 8.28 nos muestra que el diagrama de esfuerzos de corte Q^* nos da, para cualquier sección de la viga real, el valor de la tangente de la línea elástica. Dado que el esfuerzo de corte Q^* en los extremos de la viga conjugada se corresponde con las reacciones de vínculo, éstas representan numéricamente los giros de la elástica de la viga real en correspondencia con sus apoyos.

$$R_A^* = \theta_A \quad R_B^* = \theta_B \quad (8.29)$$

En cuanto a las características de la viga conjugada, dado que al cargarse ésta con las cargas elásticas su diagrama de momentos flectores debe representar exactamente la elástica de la viga real, sus vínculos deben elegirse de manera tal que se respeten estas premisas.

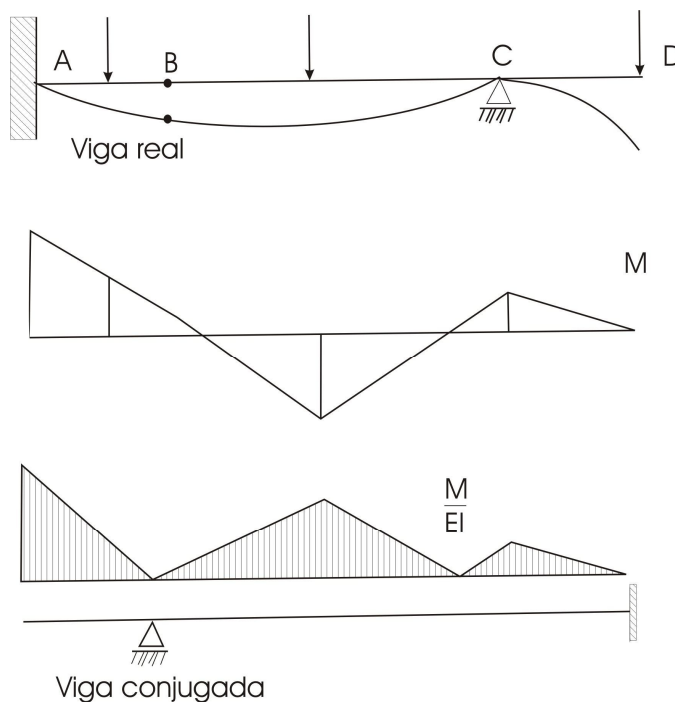


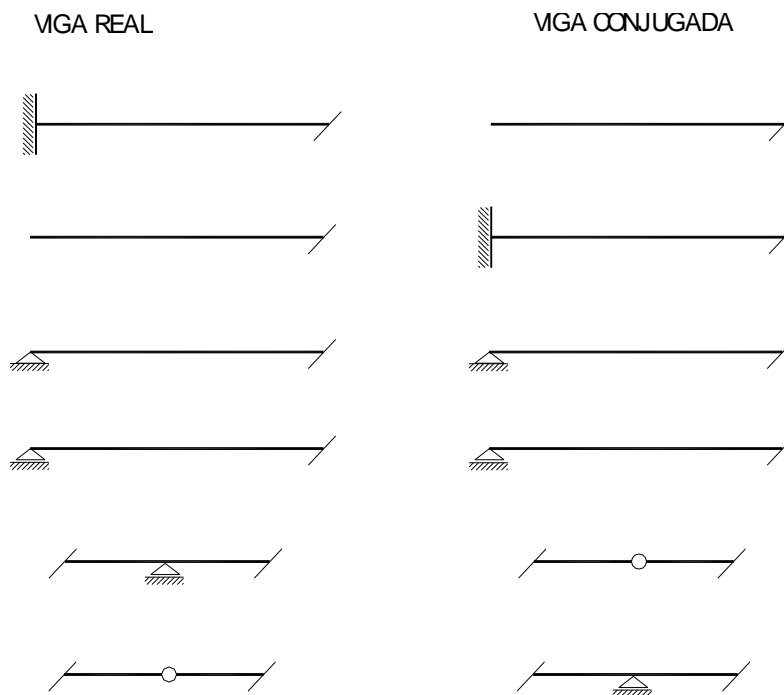
Fig. 8.10

Consideremos el ejemplo de la figura 8.10. En el punto A no tenemos flecha ni pendiente, en el punto B hay un descenso y además la pendiente a la derecha es distinta que a la izquierda, en el punto C no hay descenso pero sí existe un giro, y en el punto D tenemos flecha y pendiente.

- | | | | |
|-----|--|---|--|
| (A) | No hay flecha → $M^* = 0$ No hay pendiente → $Q^* = 0$ | } | La viga conjugada debe tener un extremo libre |
| (B) | Hay flecha → $M^* \neq 0$ Hay pendiente y resulta distinta a derecha que a izquierda → $Q_i^* \neq 0$ $Q_d^* \neq 0$ | } | La viga conjugada debe tener un apoyo móvil intermedio |
| (C) | No hay flecha → $M^* = 0$ Hay pendiente y resulta igual a derecha que a izquierda → $Q_i^* = Q_d^* \neq 0$ | } | La viga conjugada debe tener una articulación simple |

(D) $\left. \begin{array}{l} \text{Hay flecha} \rightarrow M^* \neq 0 \\ \text{Hay pendiente} \rightarrow Q^* \neq 0 \end{array} \right\} \text{La viga conjugada debe tener un empotramiento}$

Las conclusiones que hemos obtenido apoyándonos en el ejemplo citado pueden generalizarse de la siguiente manera:



En algunos casos, en especial cuando las estructuras son estáticamente indeterminadas, la viga conjugada puede resultar inestable. Este inconveniente queda resuelto cuando se carga a la misma, ya que el propio estado de cargas le confiere estabilidad.

8.2 VIGAS ESTATICAMENTE INDETERMINADA

8.2.1 Resolución por superposición

Consideremos la estructura de la figura 8.11, que consiste en una viga sustentada en A mediante un apoyo fijo y en B y C mediante dos apoyos móviles. Debido a las cargas actuantes, en los vínculos mencionados aparecen reacciones. Si realizamos el diagrama de cuerpo libre y planteamos las condiciones de equilibrio podemos ver que por tratarse de una chapa plana, sólo pueden formularse tres ecuaciones de equilibrio linealmente independientes, mientras que tenemos cuatro incógnitas.

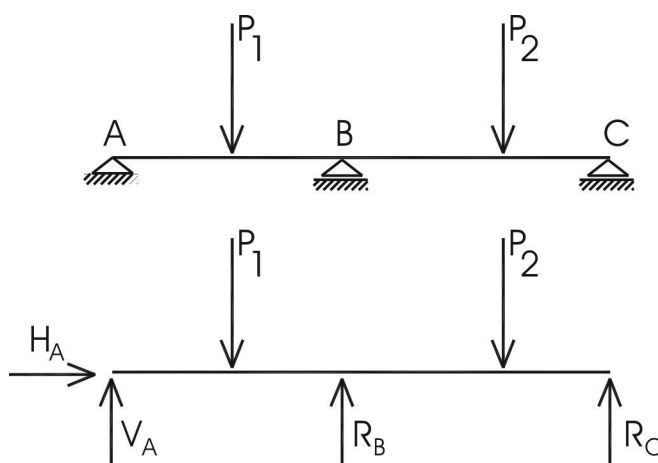


Fig. 8.11

$$\sum X = 0 \quad \sum Y = 0 \quad \sum M = 0 \quad (8.30)$$

Dado que las ecuaciones 8.30 no son suficientes para determinar las cuatro reacciones, decimos que la viga resulta “estáticamente indeterminada” o “hiperestática”. En lo que respecta a la Estática, no hay manera alguna de determinar las reacciones en los apoyos tratando al cuerpo como rígido; éstas solamente pueden calcularse si analizamos las deformaciones de la estructura.

Una forma de resolver estáticamente la estructura planteada es la siguiente:

a- En primera instancia quitamos el apoyo en B. Dado que a pesar de ello la estructura sigue siendo estable, decimos que este apoyo es “superabundante”. Algo semejante hubiese ocurrido si en lugar de eliminar el apoyo en B hubiésemos quitado el apoyo en C.

b- A continuación estudiamos la estructura simplemente apoyada que nos queda, la cual se denomina “sistema primario o fundamental”.

Este sistema se deforma, y su elástica presenta un corrimiento vertical δ'_B en correspondencia con el apoyo eliminado. Si suponemos la existencia de una carga concentrada R_B , ésta actuando independiente produce una elástica que genera en correspondencia con B un desplazamiento δ''_B .

c- Finalmente, dado que el desplazamiento $\delta_B = 0$ tenemos:

$$\delta_B = \delta'_B - \delta''_B = 0 \quad (8.31)$$

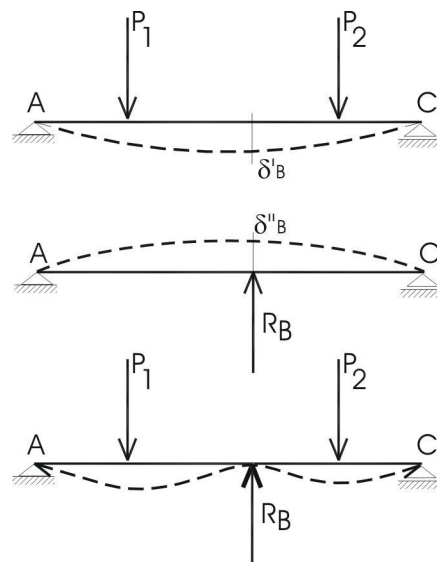


Fig. 8.12

Esta última ecuación nos permite obtener el valor de R_B , y conociendo su valor, con las ecuaciones de la Estática determinamos las reacciones faltantes.

Para clarificar estas ideas a continuación vamos a resolver el ejemplo de la figura 8.13.

En el sistema primario, bajo la acción de la carga repartida tenemos:

$$\delta'_B = \frac{5}{384} \frac{q(2L)^4}{EI} \quad (\text{ver ec. 8.10})$$

Bajo la acción de R_B tenemos:

$$\delta''_B = \frac{R_B (2L)^3}{48 EI} \quad (\text{ver ec. 8.14})$$

$$\delta''_B = \delta'_B \rightarrow \frac{R_B (2L)^3}{48 EI} = \frac{5}{384} \frac{q(2L)^4}{EI}$$

$$R_B = \frac{5}{8} q(2L) = \frac{5}{4} qL$$

Por simetría:

$$V_A = R_C = \frac{1}{2} \left(q2L - \frac{5}{4} qL \right)$$

$$V_A = R_C = \frac{3}{8} qL$$

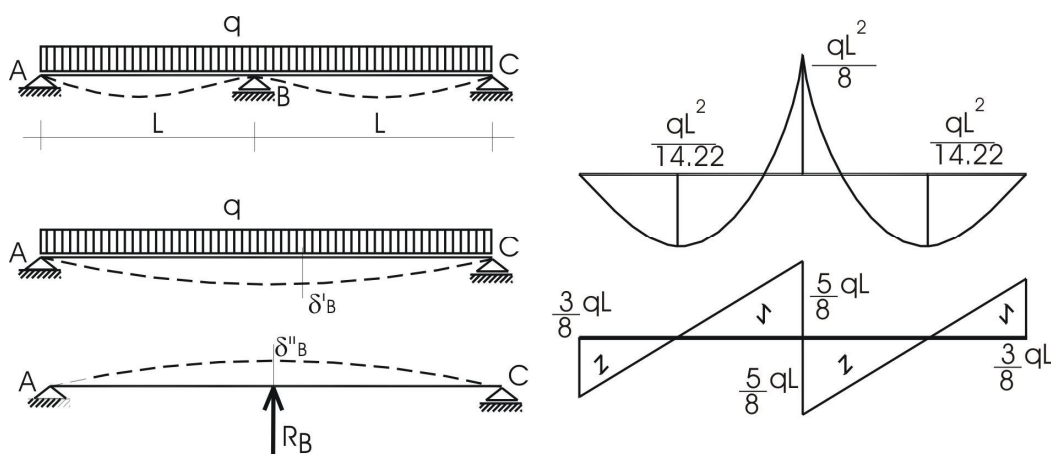


Fig. 8.13

Para resolver este tipo de viga nos basamos en el Método o Principio de superposición”.

8.2.2 Vigas hiperestáticas de un solo tramo

En lo que sigue resolveremos algunos ejemplos de las vigas hiperestáticas de un solo tramo, aplicando el método de superposición.

- a) Viga empotrada – empotrada sometida a una carga concentrada
 Elegimos como sistema primario la viga simplemente apoyada indicada en la figura 8.14 En este caso tenemos dos incógnitas hiperestáticas por calcular, M_A y M_B , ya que al no existir cargas horizontales las reacciones H_A y H_B son nulas.

Los giros en los extremos A y B pueden determinarse por superposición de efectos de la siguiente manera:

$$\theta_A = \theta_{A0} + \theta_{A1} + \theta_{A2} = 0$$

$$\theta_B = \theta_{B0} + \theta_{B1} + \theta_{B2} = 0$$

El ángulo θ_{A0} ya fue determinado en el art. 8.1.3.2 (ver ec. 8.20)

$$\theta_{A0} = \frac{P}{EI} \frac{ab(L+b)}{6L}$$

En forma semejante a lo realizado oportunamente, puede demostrarse que:

$$\theta_{B0} = -\frac{P}{EI} \frac{ab(L+a)}{6L}$$

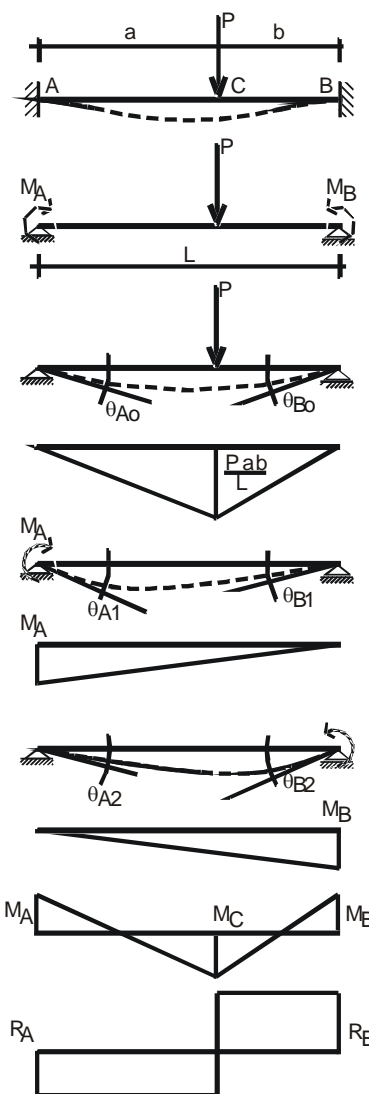


Fig. 8.14

Los ángulos θ_{A1} y θ_{B1} pueden ser calculados aplicando el teorema II del área del diagrama de momentos reducidos.

$$\theta_{A1} L = \frac{M_A}{EI} \frac{L}{2} \frac{2}{3} L$$

$$\theta_{A1} = \frac{M_A L}{3EI}$$

$$\theta_{B1} L = -\frac{M_A}{EI} \frac{L}{2} \frac{L}{3}$$

$$\theta_{B1} = -\frac{M_A L}{6EI}$$

En forma idéntica obtenemos los giros θ_{A2} y θ_{B2}

$$\theta_{A2} = \frac{M_B L}{6EI}$$

$$\theta_{B2} = -\frac{M_B L}{3EI}$$

Luego resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones podemos determinar los valores de las incógnitas hiperestáticas.

$$\frac{L}{3EI} M_A + \frac{L}{6EI} M_B = -\frac{P}{EI} \frac{ab(L+b)}{6L}$$

$$\frac{L}{6EI} M_A + \frac{L}{3EI} M_B = -\frac{P}{EI} \frac{ab(L+a)}{6L}$$

$$M_A = -P \frac{ab^2}{L^2} \quad (8.32)$$

$$M_B = -P \frac{a^2b}{L^2} \quad (8.33)$$

Una vez conocidos los valores correspondientes a M_A y M_B es muy simple calcular las reacciones verticales y si interesa, el momento máximo M_C .

b) Viga empotrada – articulada sometida a una carga concentrada

Este caso es semejante al anterior pero mucho más simple ya que tenemos sólo una incógnita hiperestática por determinar.

$$\theta_{A0} = \frac{P}{EI} \frac{ab(L+b)}{6L}$$

$$\theta_{A1} = \frac{M_A L}{3EI}$$

$$\theta_A = \theta_{A0} + \theta_{A1} = 0$$

$$M_A = -\frac{Pab(L+b)}{2L^2} \quad (8.34)$$

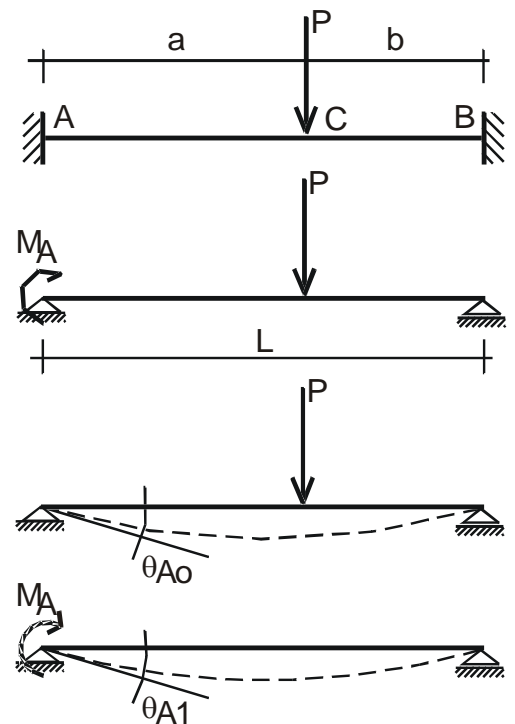


Fig. 8.15