

9

SOLICITACIONES COMPUESTAS

9.1 – FLEXION RECTA COMPUESTA

Esta situación se presenta cuando en una sección tenemos $N \neq 0$, $M_x \neq 0$, (o $M_y \neq 0$), de modo que puede aplicarse la ecuación general de la flexión:

$$\sigma = \frac{N}{\Omega} + \frac{M_x}{I_x} y \quad (9.1)$$

Puede verse que el diagrama de tensiones es lineal, pero aparece una situación diferente en lo que respecta a la flexión recta simple, el eje neutro deja de ser baricéntrico. Si queremos determinar su posición debemos hacer $\sigma = 0$

$$\sigma = \frac{N}{\Omega} + \frac{M_x}{I_x} y = 0$$

$$y_0 = - \frac{N}{M_x} \frac{I_x}{\Omega} \quad (9.2)$$

El problema de la sección compuesta puede ser considerado como resultado de la acción de una fuerza normal a la sección actuando en forma excéntrica con respecto al centro de gravedad.

Para que la flexión sea recta es necesario que la carga esté ubicada sobre alguno de los ejes principales de inercia. La fuerza N aplicada en el punto A de la figura 9.2 resulta equivalente a los esfuerzos indicados actuantes en G.

$$M_x = N \cdot e$$

$$\sigma = \frac{N}{\Omega} + \frac{M_x}{I_x} y = \frac{N}{\Omega} + \frac{N \cdot e}{I_x} y$$

$$\sigma = \frac{N}{\Omega} \left[1 + e \frac{\Omega}{I_x} y \right]$$

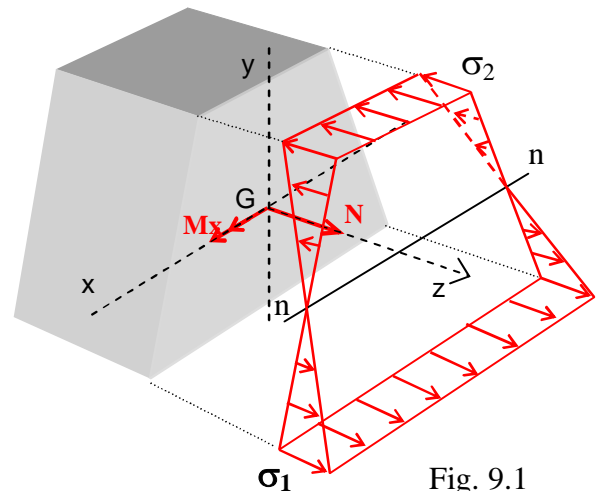


Fig. 9.1

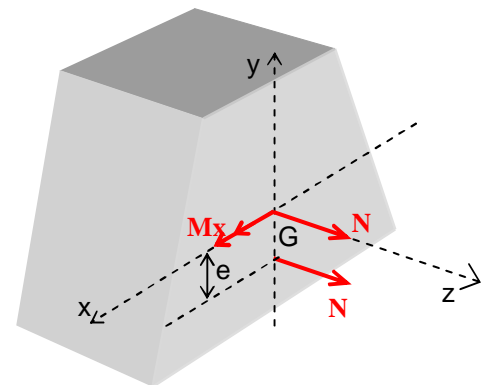
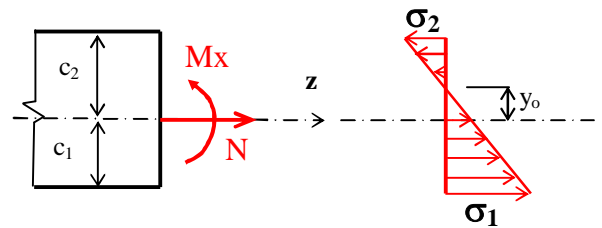


Fig. 9.2

$$\text{Si } \frac{\Omega}{I_x} = \frac{1}{i_x^2}$$

$$\sigma = \frac{N}{\Omega} \left[1 + \frac{e}{i_x^2} y \right] \quad (9.3)$$

Si determinamos a partir de esta última ecuación la posición del eje neutro tendremos:

$$y_0 = -\frac{i_x^2}{e} \quad (9.4)$$

Podremos ver que y_0 tiene signo contrario al de e , lo que significa que el eje neutro se desplaza del eje x en sentido contrario al de la ubicación de la carga. Analicemos a continuación algunos casos particulares:

$e \rightarrow 0 \Rightarrow y_0 \rightarrow \infty$ Esto es lógico pues estamos ante un caso de sollicitación axial

$e \rightarrow \infty \Rightarrow y_0 \rightarrow 0$ Este sería un caso de flexión simple

El diagrama de tensiones también puede ser obtenido por superposición de efectos:

$$\sigma_1 = \frac{N}{\Omega} + \frac{M}{I} c_1 = \frac{N}{\Omega} + \frac{M}{W_1} < \sigma_{adm} \quad (9.5)$$

$$\sigma_2 = \frac{N}{\Omega} - \frac{M}{I} c_2 = \frac{N}{\Omega} - \frac{M}{W_2} < \sigma_{adm} \quad (9.6)$$

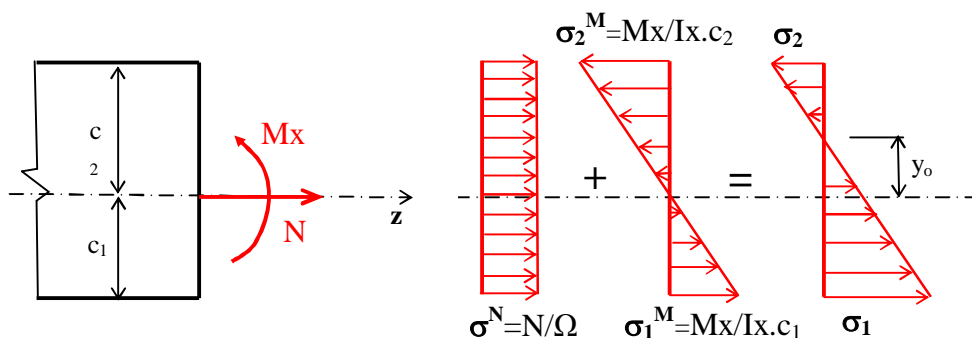


Fig.9.3

En este tipo de problema el dimensionamiento no es directo ya que hay más parámetros geométricos incógnitas que ecuaciones. El procedimiento usual es el siguiente:

- 1) Se desprecia el término N/Ω , que suele ser el de menor incidencia en el valor de la tensión.
- 2) Se adopta un valor de tensión admisible minorado ($\sigma_{adm}^* \cong 0,8\sigma_{adm}$)

$$W_1 \geq \frac{M}{\sigma_{adm}^*} \quad (9.7)$$

- 3) Con el valor de W_1 (o de W_2 según el caso) se elige la sección y luego se verifican las ecuaciones 9.5 y 9.6. Si la sección no se encuentra en buenas condiciones debe elegirse otra.

Ya hemos visto que el eje neutro no resulta baricéntrico y que la posición del mismo es función de la excentricidad de la carga. Si pensamos originalmente en un esfuerzo normal centrado que puede desplazarse sobre el eje “y”, podemos encontrar una posición de la carga para la cual el diagrama de tensiones resulta triangular, y que el eje neutro coincida con la fibra superior o inferior de la sección.

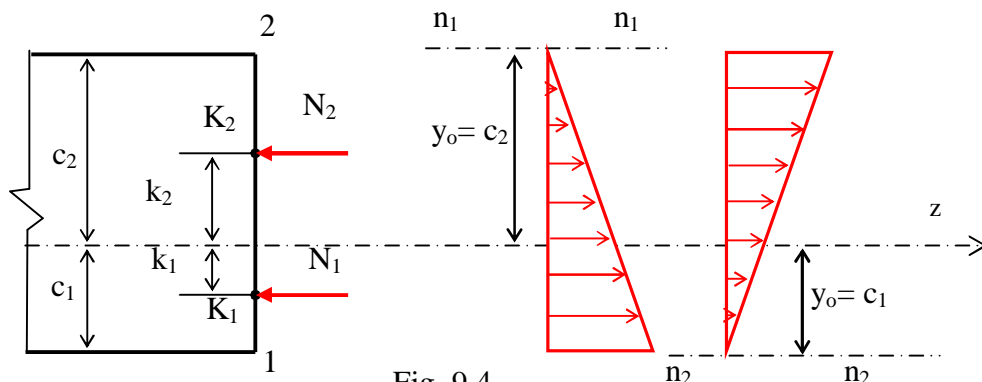


Fig. 9.4

Llamaremos “distancia nuclear” a la excentricidad de la carga con respecto al baricentro que hace que el eje neutro se coloque tangente a la sección. El punto de aplicación de la carga se denomina “punto nuclear”. Las expresiones correspondientes a las distancias nucleares pueden obtenerse de la expresión de y_o , la cual tomaremos en valor absoluto.

$$e = \frac{i_x^2}{y_o}$$

$$k_1 = \frac{i_x^2}{c_2} = \frac{I_x}{\Omega \cdot c_2} = \frac{W_2}{\Omega} \tag{9.8}$$

$$k_2 = \frac{i_x^2}{c_1} = \frac{I_x}{\Omega \cdot c_1} = \frac{W_1}{\Omega} \tag{9.9}$$

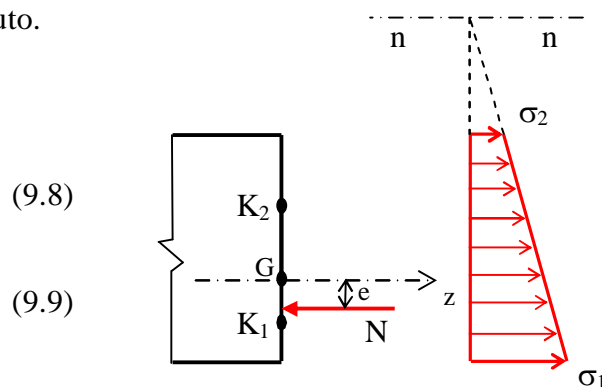


Fig. 9.5

Si la carga se ubica en cualquier punto dentro de los puntos nucleares, el diagrama de tensiones tendrá un solo signo, es decir, el eje no cortará la sección.

Todo lo que hemos desarrollado hasta este momento es válido para el caso de flexión recta compuesta transversal o pura.

En lo que respecta al esfuerzo de corte vamos a realizar una aclaración muy importante. En la fórmula de Colignon se calculan momentos estáticos y de inercia respecto al eje de inercia correspondiente a un caso de “flexión simple. Las tensiones rasantes que dan origen a la presencia de tensiones tangenciales aparecen como consecuencia de la variación de momento flector en dos secciones muy próximas. El esfuerzo normal no produce tensiones rasantes. Por lo tanto, aún en la flexión compuesta, el eje neutro a que se hace referencia en la fórmula de Colignon es el que correspondería si la flexión fuese simple.

9.2 – FLEXION OBLICUA COMPUESTA

Como ya lo habíamos mencionado en el capítulo 6, este es el caso más general de flexión. Ocurre cuando tenemos un momento flector cuyo plano de actuación no coincide con un eje principal de inercia y un esfuerzo normal.

$$N \neq 0 ; M_x \neq 0 ; M_y \neq 0$$

$$\sigma = \frac{N}{\Omega} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x \quad (9.10)$$

También se presenta este caso cuando existe una carga excéntrica normal a la sección, cuyo punto de aplicación no coincide con ningún eje principal de inercia.

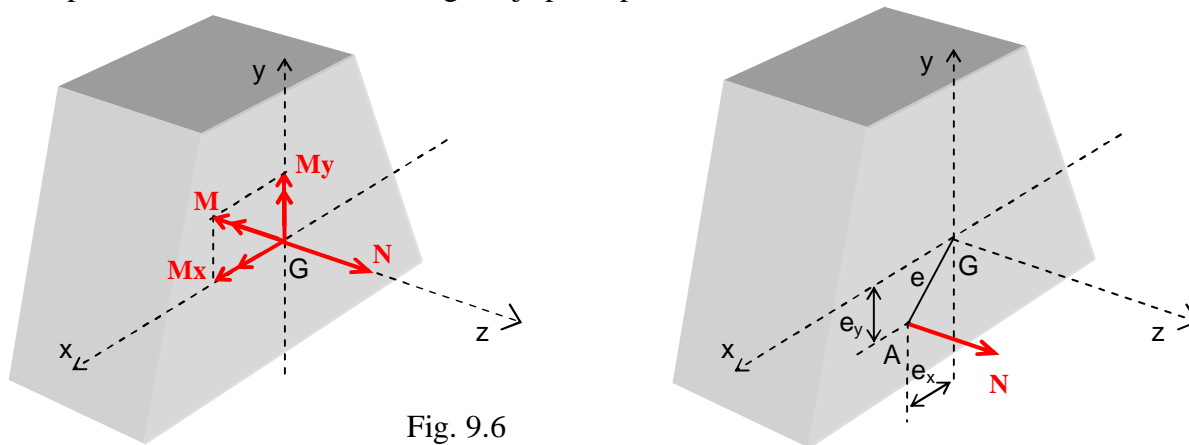


Fig. 9.6

$$M_x = N \cdot e_y \quad M_y = N \cdot e_x$$

$$\sigma = \frac{N}{\Omega} + \frac{M_y}{I_x} y + \frac{M_x}{I_y} x = \frac{N}{\Omega} \left[1 + \frac{e_y}{I_x/\Omega} y + \frac{e_x}{I_y/\Omega} x \right] \quad (9.11)$$

$$\sigma = \frac{N}{\Omega} \left[1 + \frac{e_y}{i_x^2} y + \frac{e_x}{i_y^2} x \right]$$

Si deseamos encontrar la posición del eje neutro debemos plantear $\sigma = 0$.

$$1 + \frac{e_y}{i_x^2} y + \frac{e_x}{i_y^2} x = 0 \quad (9.12)$$

$$\text{Si } x = 0 \rightarrow y_0 = -\frac{i_x^2}{e_y}$$

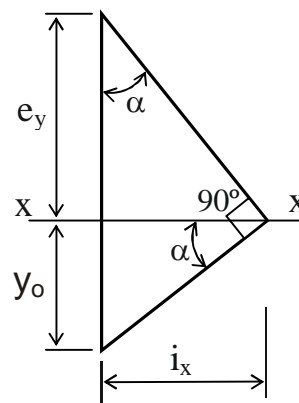
$$\text{Si } y = 0 \rightarrow x_0 = -\frac{i_y^2}{e_x}$$

Los valores de x_0 e y_0 pueden obtenerse gráficamente.

$$\text{tg} \alpha = \frac{i_x}{e_y} = \frac{y_0}{i_x}$$

$$i_x^2 = y_0 \cdot e_y$$

$$y_0 = -\frac{i_x^2}{e_y} \quad (9.13)$$



El signo menos que debería aparecer en la ecuación 9.13 queda implícito en la construcción gráfica al ubicarse y_0 del otro lado del eje x .

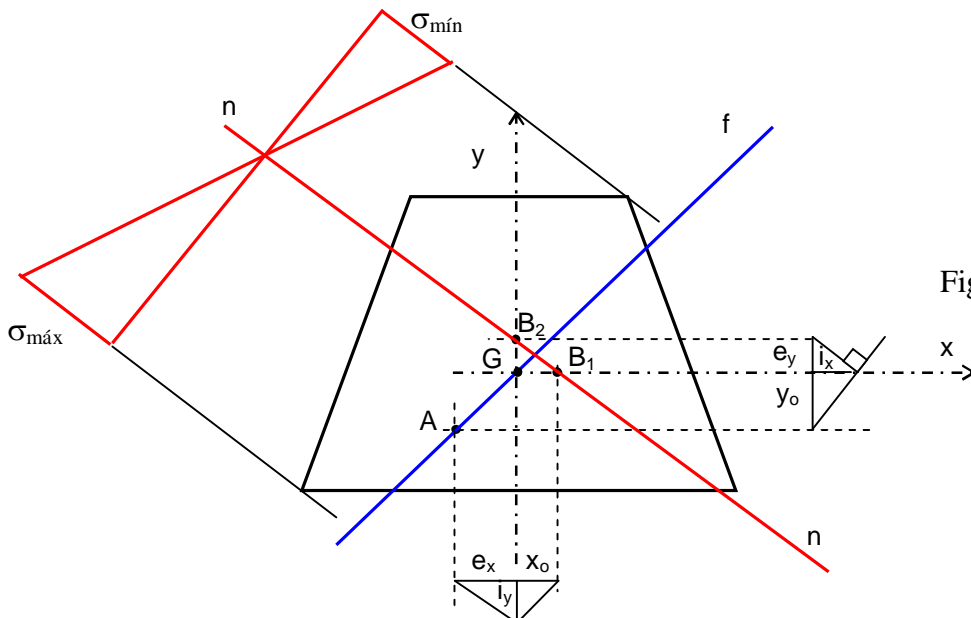


Fig. 9.7

En la construcción de la figura 9.7 podemos ver que, como en el caso de la flexión oblicua simple, el eje neutro resulta no ortogonal con el eje de las fuerzas, aunque en la flexión oblicua compuesta este no resulta baricéntrico.

En cuanto al problema de dimensionamiento deberíamos decir que salvo para el caso de secciones con dos ejes de simetría, la aplicación de la fórmula 9.10 no permite obtener fácilmente los parámetros geométricos requeridos, por lo que generalmente se adopta la sección y luego se verifica. Si estamos en el caso donde la sección a adoptar es doblemente simétrica, como por ejemplo un rectángulo, la tensión máxima se va a producir en alguno de los cuatro vértices, donde los tres términos se suman en valor absoluto.

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{\Omega} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{N}{\Omega} + \frac{M_x}{\frac{bh^2}{6}} + \frac{M_y}{\frac{hb^2}{6}} = \sigma_{\text{adm}}$$

si se adopta una cierta relación $\frac{h}{b} = \eta \rightarrow h = \eta \cdot b$

$$\sigma_{\text{adm}} = \frac{N}{\eta \cdot b^2} + \frac{6M_x}{\eta^2 b^3} + \frac{6M_y}{\eta \cdot b^3} \rightarrow \sigma_{\text{adm}} b^3 = \frac{N \cdot b}{\eta} + 6 \left(\frac{M_x}{\eta^2} + \frac{M_y}{\eta} \right)$$

$$\sigma_{\text{adm}} b^3 - \frac{N \cdot b}{\eta} - 6 \left(\frac{M_x}{\eta^2} + \frac{M_y}{\eta} \right) = 0 \tag{9.14}$$

Resolviendo la ecuación cúbica anterior se obtiene b y luego h.

Otra forma de plantear el problema de la flexión oblicua compuesta es aplicar superposición de efectos. Podemos pensar en la actuación independiente del momento flector M y de la fuerza normal N. La actuación exclusiva del momento flector M da origen a un problema de flexión oblicua simple donde las tensiones normales pueden expresarse a través de la fórmula de un término:

$$\sigma = \frac{M \text{sen} \beta}{I_n} y_n \tag{9.15}$$

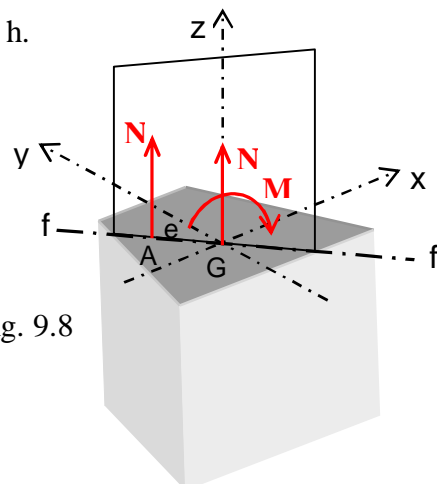


Fig. 9.8

La combinación de ambos efectos da origen a la expresión que sigue, conocida como “fórmula de dos términos” en la flexión oblicua compuesta:

$$\sigma = \frac{N}{\Omega} + \frac{M \cdot \text{sen} \beta}{I_m} y_m \tag{9.16}$$

La posición del eje neutro puede expresarse de la siguiente manera:

$$M = N \cdot e \rightarrow \sigma = \frac{N}{\Omega} \left(1 + \frac{e \cdot \text{sen} \beta}{i_m^2} y_m \right)$$

$$\sigma = 0 \rightarrow 1 + \frac{e \cdot \text{sen} \beta}{i_m^2} y_{m0} = 0 \rightarrow y_{m0} = - \frac{i_m^2}{e \cdot \text{sen} \beta} \tag{9.17}$$

El eje neutro resulta paralelo al que correspondería a la flexión oblicua simple (m), separada de este una distancia y_{m0} , y ubicado con respecto al baricentro en forma opuesta a la excentricidad de la carga N.

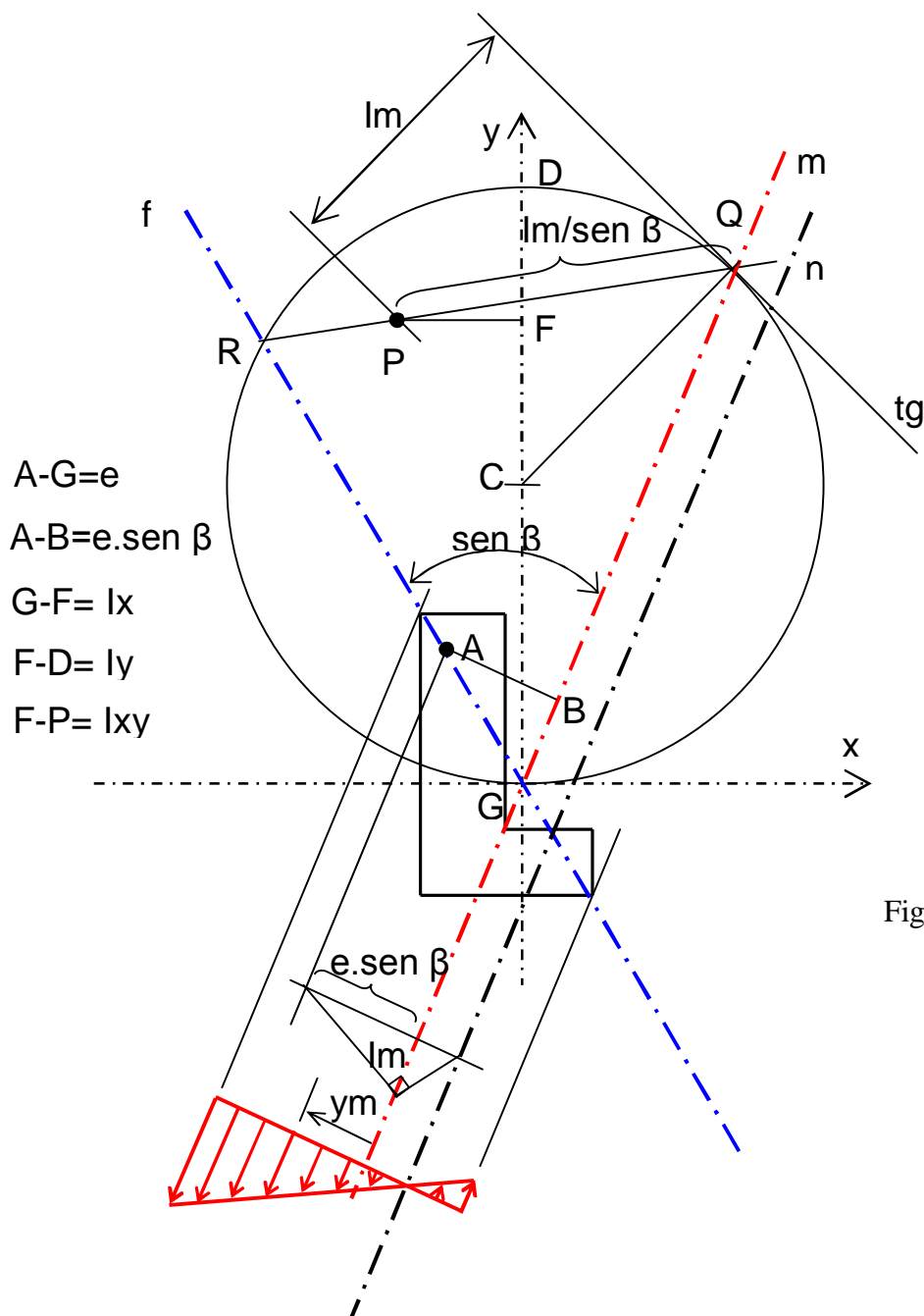


Fig. 9.9

9.3 – NUCLEO CENTRAL

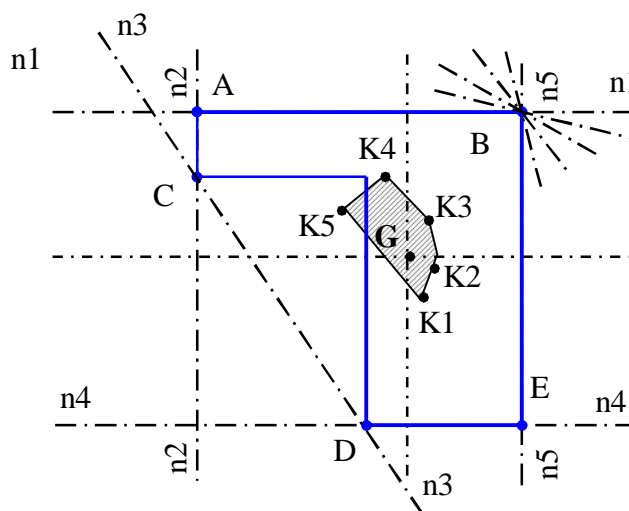
Ya hemos visto que la flexión oblicua compuesta es resultado de la acción de una fuerza normal excéntrica. El punto de paso de esa fuerza se denomina “centro de presión”.

Si el centro de presión coincide con el baricentro de la sección, el diagrama de tensiones normales es uniforme. En la medida que la carga se aleja del baricentro, el diagrama se va inclinando, hasta cambiar de signo dentro de la propia pieza. Se denomina “núcleo central” de una sección al lugar geométrico de los infinitos puntos que, tomados como centro de presión, originan en esta tensiones de un mismo signo.

El conocimiento del núcleo central de una sección tiene mucha importancia para el estudio de la flexión compuesta en materiales que, como la mampostería o el Hormigón simple, no trabajan adecuadamente a la tracción. En estos, para obtener un óptimo funcionamiento es necesario que la carga normal se ubique dentro del núcleo central.

Para la ubicación del núcleo central es necesario encontrar todos los centros de presiones que determinan su contorno, lo cual ocurre cuando estos coinciden con los “puntos nucleares”, es decir, son tales que originan ejes neutros que son tangentes a la sección y además no la cortan en ningún punto.

En la figura 9.10 se muestran los ejes neutros que dan el contorno del núcleo central para la sección indicada. En los puntos A, B, C, D y E existen infinitos ejes neutros, los que pivotando sobre ellos giran desde una posición extrema hasta otra.



Cuando esto ocurre es posible demostrar que los centros de presiones relacionados a cada eje neutro se emplazan sobre una recta. Esto último es sumamente importante ya que si se conocen los centros de presiones correspondientes a dos ejes neutros tales como en n_1 y el n_5 , por ejemplo, el segmento que se obtiene al unir ambos puntos define una parte del contorno del núcleo central.

Dado un eje neutro, si se desea saber la posición del centro de presiones correspondiente, sus coordenadas pueden calcularse mediante las siguientes expresiones:

$$x_k = \frac{I_y (y_A - y_B) - I_{yx} (x_A - x_B)}{\Omega (y_B x_A - y_A x_B)}$$

$$y_k = \frac{I_{xy} (y_A - y_B) - I_x (x_A - x_B)}{\Omega (y_B x_A - y_A x_B)}$$

Dónde: I_x , I_y e I_{xy} son momentos de inercia y producto de inercia de la sección, y Ω es el área. (x_A, y_A) e (x_B, y_B) son coordenadas de dos puntos, A y B pertenecientes al eje neutro.

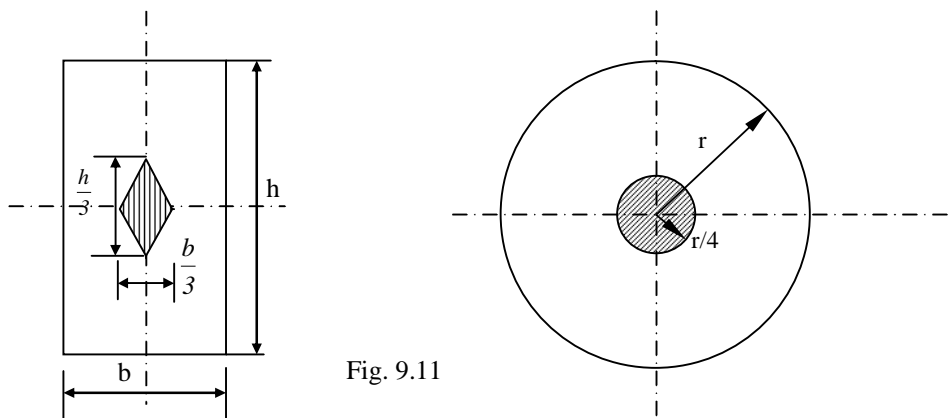


Fig. 9.11

Para las figuras elementales el núcleo central puede definirse directamente considerando las distancias nucleares tal como las definimos en el ítem 9.1.

9.4 – FLEXOCOMPRESION SIN TRACCION ADMISIBLE

Existen materiales como el hormigón simple y la mampostería de ladrillos, que si bien trabajan perfectamente a la compresión, en cambio resisten muy poco a la tracción. En estos casos, al verificar secciones sujetas a flexión compuesta es necesario desarrollar una teoría partiendo del hecho que, para tales secciones las condiciones de equivalencia se deben satisfacer teniendo en cuenta solamente tensiones de compresión y prescindiendo por completo de las de tracción.

Esta situación se presenta también es la sección de contacto entre dos cuerpos como en el caso de una base de hormigón apoyada sobre el suelo. Es evidente que entre ambos materiales podrán existir presiones pero no tracciones.

Por simplicidad solamente vamos a tratar el problema cuando la carga normal presenta excentricidad sobre un eje de simetría.

La carga está ubicada fuera del núcleo central, de manera tal que si el material fuese capaz de absorber tracción se tendría un diagrama de tensiones como el (a) en la figura 9.12. Siendo que no es posible absorber tracción el diagrama de tensiones que origina el equilibrio interno es como el (b).

Por razones de equilibrio:

$$N = N'$$

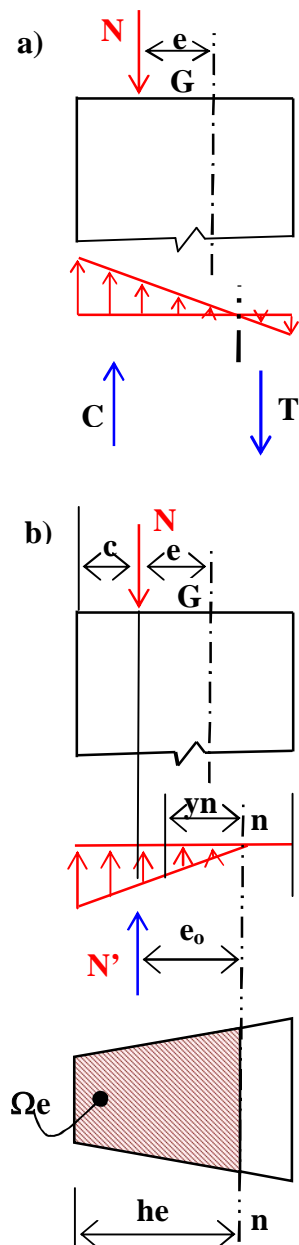
y el punto de paso de la resultante N' debe coincidir con la recta de acción de N .

Supondremos que tiene validez la Ley de Hooke y la hipótesis de Navier-Bernouilli de las secciones planas.

$$\sigma = \psi \cdot y_n$$

$$N' = \int_{\Omega_e} \sigma \cdot d\Omega = \int_{\Omega_e} \psi \cdot y_n \cdot d\Omega$$

$$N' = \psi \cdot S_n^e = N$$



$$\psi = \frac{N}{S_n^e} \quad (9.21)$$

El área rayada en la figura 9.12, que es la parte de la sección que realmente trabaja, se denomina “sección eficaz”.

S_n^e : momento estático respecto del eje neutro de la sección eficaz.

Si llamamos e_o a la excentricidad de la carga exterior respecto del eje neutro tenemos:

$$N \cdot e_o = \int_{\Omega^e} \psi \cdot y_n^2 \cdot d\Omega = \psi \int_{\Omega^e} y_n^2 \cdot d\Omega$$

$$N \cdot e_o = \psi \cdot I_n^e = N \frac{I_n^e}{S_n^e}$$

I_n^e : momento de inercia de la sección eficaz con respecto al eje neutro.

$$e_o = \frac{I_n^e}{S_n^e} \quad (9.22)$$

$$h_e = e_o + c \quad (9.23)$$

$$\sigma_{\max} = \psi \cdot h_e = \frac{N}{S_n^e} h_e \quad (9.24)$$

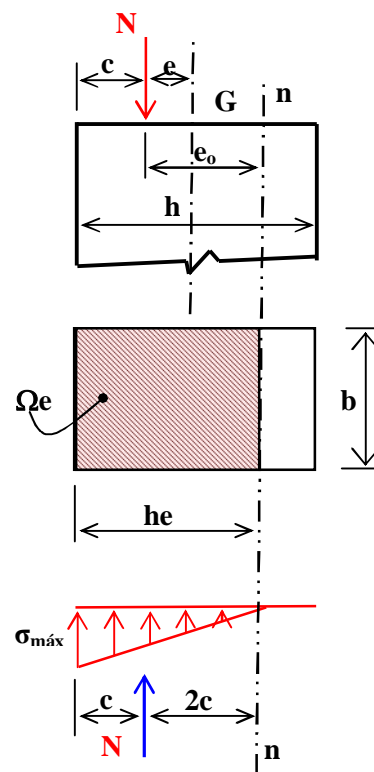
Es evidente que conociendo la posición del eje neutro el problema está resuelto, en especial en secciones que no son simples. Si consideramos el caso de una sección rectangular tenemos:

$$e > \frac{h}{6}$$

$$\left. \begin{aligned} I_n^e &= \frac{b \cdot h_e^3}{3} \\ S_n^e &= \frac{b \cdot h_e^2}{2} \end{aligned} \right\} e_o = \frac{\frac{b \cdot h_e^3}{3}}{\frac{b \cdot h_e^2}{2}} = \frac{2}{3} h_e$$

$$h_e = e_o + c = \frac{2}{3} h_e + c \rightarrow h_e = 3c$$

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{\frac{b \cdot h_e^2}{2}} h_e = \frac{N}{\frac{b \cdot (3c)^2}{2}} = \frac{2}{3} \frac{N}{bc}$$



En este caso los resultados obtenidos podrían haber sido anticipados; en efecto, siendo el ancho constante, la resultante debe estar a un tercio de h_e

9.5 – TORSION COMPUESTA

9.5.1 - Concepto

Este problema se presenta cuando la reducción de fuerzas que solicitan un sólido, al baricentro de una sección cualquiera del mismo, origina un momento torsor más otros tipos de esfuerzos internos, usualmente de flexión y corte, y en algunos casos también esfuerzo normal.

Este caso sería el más general que puede presentarse en un problema de análisis de tensiones en la Resistencia de Materiales. La herramienta más poderosa que utilizaremos para resolverlo es la aplicación del principio de superposición de efectos. Así, todo lo que ya hemos estudiado nos resulta de mucha utilidad.

Los estados tensionales se obtienen como superposición de los correspondientes a cada uno de los esfuerzos por separado. En la verificación de piezas deberá comprobarse que en los puntos donde aparecen estados tensionales simples (Normal o corte puro), las tensiones estén por debajo de los valores admisibles; y en aquellos lugares donde los estados sean múltiples, deberá comprobarse la teoría de rotura que corresponda.

9.5.2 – Ejes sometidos a Flexo-torsión

Si consideramos el siguiente ejemplo y analizamos la sección del empotramiento tenemos el estado de tensiones indicado en la figura 9.14.

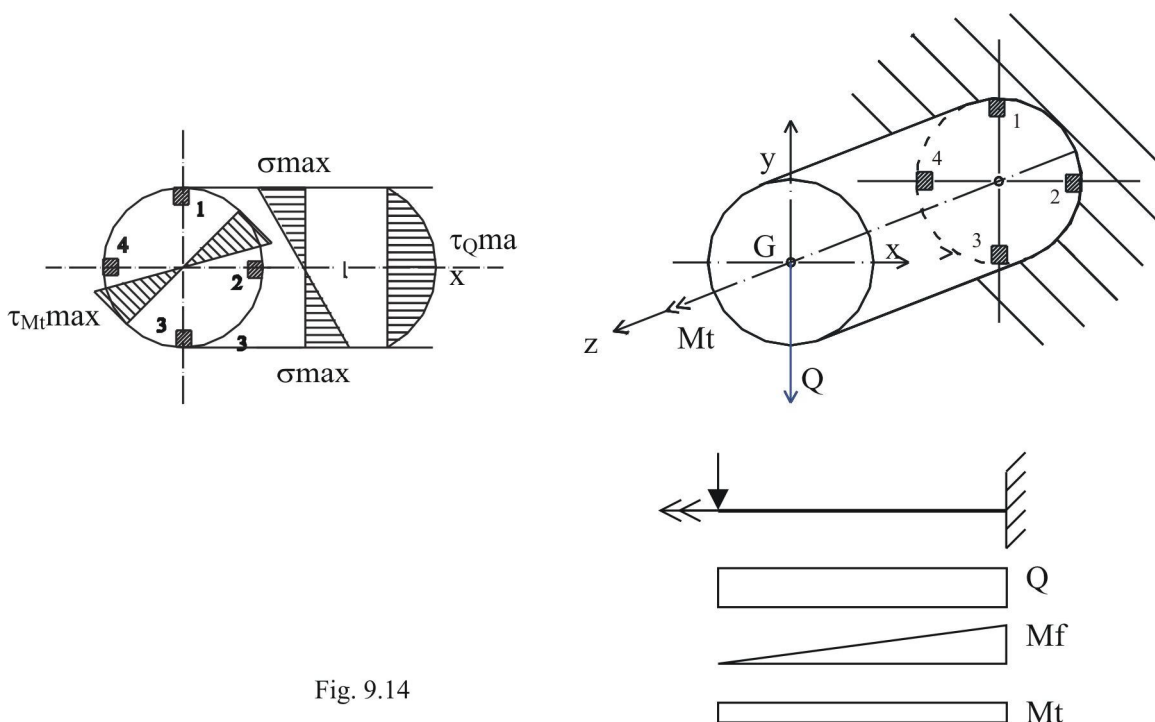


Fig. 9.14

Si tomamos un elemento ubicado en un punto como el 1, podemos ver que el mismo está solicitado por un estado doble de tensiones.

$$\sigma_1 = \frac{Mf}{Wf} = \frac{Mf}{\frac{\pi D^3}{32}} \tag{9.25}$$

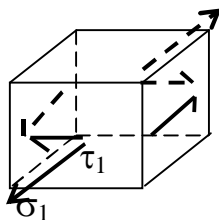


Fig. 9.15

$$\tau_1 = \frac{Mt}{Wt} = \frac{Mf}{\frac{\pi D^3}{16}} = \frac{Mt}{2Wf} \quad (9.26)$$

Si el material tiene un comportamiento frágil deberá utilizarse para su dimensionamiento la Teoría de falla de Rankine (σ_{\max}).

$$\sigma_c = \sigma_{\text{princ}} = \frac{\sigma_1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_1^2 + 4\tau_1^2} = \frac{Mf}{2Wf} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{Mf}{Wf}\right)^2 + 4\left(\frac{Mt}{2Wf}\right)^2}$$

$$\sigma_c = \frac{1}{2Wf} \left[Mf \pm \sqrt{Mf^2 + Mt^2} \right] \leq \sigma_{\text{adm}}$$

$$Wf \geq \frac{1}{2\sigma_{\text{adm}}} \left[Mf \pm \sqrt{Mf^2 + Mt^2} \right]$$

Para dimensionamiento el diámetro necesario sería:

$$D = \sqrt[3]{\frac{32}{2\pi\sigma_{\text{adm}}} \left[Mf \pm \sqrt{Mf^2 + Mt^2} \right]} = 1,72 \sqrt[3]{\frac{1}{\sigma_{\text{adm}}} \left[Mf \pm \sqrt{Mf^2 + Mt^2} \right]}$$

Si el material tiene un comportamiento dúctil, debería aplicarse la Teoría de falla de Huber-Hencky-Von Mises (también podría utilizarse la teoría de Guest).

$$\sigma_c = \sqrt{\sigma_1^2 + 3\tau_1^2} = \sqrt{\left(\frac{Mf}{Wf}\right)^2 + 3\left(\frac{Mt}{2Wf}\right)^2} = \frac{1}{Wf} \sqrt{Mf^2 + 0,75Mt^2}$$

Para dimensionar, el diámetro necesario:

$$D = \sqrt[3]{\frac{32}{\pi\sigma_{\text{adm}}} \sqrt{Mf^2 + 0,75Mt^2}} = 2,17 \sqrt[3]{\frac{1}{\sigma_{\text{adm}}} \sqrt{Mf^2 + 0,75Mt^2}}$$

Si consideramos un elemento ubicado en la posición del punto 4 (o el 2 según el sentido del Mt), veremos que en el mismo aparece aumentado el corte puro:

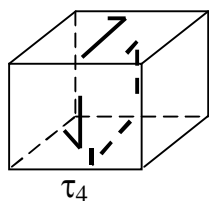


Fig. 9.16

$$\tau_4 = \tau_{Mt\max} + \tau_{Q\max}$$

$$\tau_4 = \frac{Mt}{\frac{\pi D^3}{16}} + \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi D^2}$$

Si conocemos el valor de τ_{adm} , planteamos que $\tau \leq \tau_{adm}$. De no ser así, aplicamos las Teorías de falla acorde con el material; se calcula la tensión de comparación σ_c y luego hacemos que $\sigma_c \leq \sigma_{adm}$.

En un elemento como el 3 la situación es similar a la del elemento ubicado en el punto 1.

En el caso de que en una sección circular actúen simultáneamente momentos flectores M_x , M_y y momento torsor M_z , se calcula el momento flector resultante $M_f = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$, con este valor se determina la tensión normal máxima $\sigma_{max} = \frac{M_{fR}}{W_f}$. Dicha tensión corresponde a los elementos ubicados en la periferia, los que a su vez están sometidos a las tensiones tangenciales máximas por torsión.

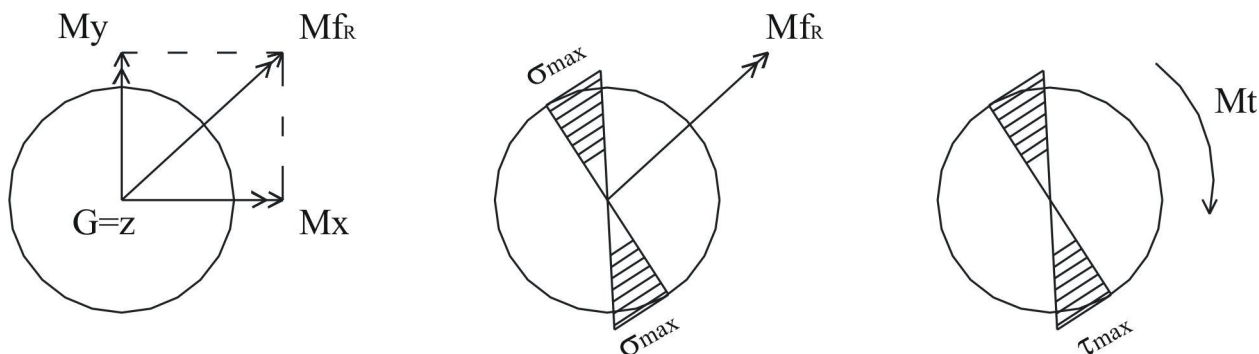


Fig.9.17

Para el dimensionamiento y verificación, se calcula la tensión de comparación sobre la base de los valores de $\sigma_{máx}$ y $\tau_{Mtmáx}$ señalados.