

10

PANDEO

10.1. CONSIDERACIONES GENERALES

10.1.1. INTRODUCCIÓN

Al principio de la materia se estableció que la selección de elementos estructurales y de máquinas se basa en tres características: resistencia, rigidez y estabilidad. Los procedimientos de análisis de esfuerzos y deformaciones se estudiaron en detalle en los capítulos anteriores. En este capítulo se tratará la cuestión de la posible inestabilidad de sistemas estructurales. En tales problemas se deben hallar parámetros críticos adicionales que determinen si es posible una configuración o patrón de deformación dado para un sistema particular. Este problema es diferente de cualquier otro de los vistos anteriormente.

Como un ejemplo intuitivo sencillo considérese una barra de diámetro D sometida a una fuerza axial de compresión. Si tal barra actuando como “columna”, fuera de longitud D , no surgiría ninguna cuestión acerca de la inestabilidad y este miembro corto podría soportar una fuerza considerable. Por otra parte, si la misma barra tuviera una longitud de varios diámetros, al ser sometida a una fuerza axial aún menor que la que puede soportar la pieza corta podría llegar a ser lateralmente inestable, presentándose en ella pandeo lateral y podría fallar o sufrir colapso. Una regla delgada ordinaria, si se somete a compresión axial, fallará de esta manera. La consideración de la sola resistencia del material no es suficiente para predecir el comportamiento de tal miembro.

El mismo fenómeno se presenta en numerosas otras situaciones en que existen esfuerzos de compresión. Placas delgadas, completamente capaces de resistir cargas de tracción, resultan muy ineficaces para transmitir compresión. Vigas angostas, sin arriostramiento lateral, pueden doblarse lateralmente y romperse por la acción de una carga aplicada. Tanques al vacío, así como cascos de submarinos, a menos que estén apropiadamente diseñados, pueden deformarse gravemente por la presión externa y asumir formas que difieren en forma notable de su configuración geométrica original. Un tubo de pared delgada puede arrugarse o plegarse como papel de seda cuando se somete a torsión¹. Durante algunas etapas de su encendido, las delgadas cubiertas de los cohetes o proyectiles autopropulsados se cargan críticamente a compresión. Estos son problemas de primordial importancia en el diseño de ingeniería. Además, por lo general los fenómenos de pandeo o arrugamiento que se observan en miembros cargados ocurren más bien repentinamente. Por esta razón, muchas de las fallas estructurales por pandeo son espectaculares y muy peligrosas.

El enorme número de problemas de inestabilidad o pandeo de estructuras sugerido por la lista anterior está fuera del alcance de esta materia. Aquí solo se considerará el problema de la columna. Utilizándolo como ejemplo, sin embargo se ponen de relieve las características esenciales del fenómeno de pandeo y algunos procedimientos básicos para su análisis.

10.1.2. EQUILIBRIO ESTABLE, INESTABLE E INDIFERENTE

Sabemos que es condición necesaria pero no suficiente, para que la configuración tomada por un cuerpo sometido a fuerzas sea permanente, que todas las fuerzas que actúen estén en equilibrio

¹ Como ejemplo, ver Figura 14.1 del libro “Introducción a la mecánica de sólidos” – E. Popov – Ed. Limusa. 1992.

entre sí; y sabemos también que esta condición es suficiente si el equilibrio de las fuerzas es estable. Si el equilibrio es inestable, la configuración es extremadamente precaria, de modo que si existe una causa perturbadora, el sistema se aparta de esta configuración y ya no la vuelve a tomar. En el caso límite en que el equilibrio es indiferente el sistema puede mantenerse en su configuración o pasar a otras configuraciones muy próximas a la primera, deteniéndose en alguna cualquiera de éstas.

Una forma clásica de determinar si el equilibrio es estable consiste en desviar muy poco el sistema de su configuración mediante una causa perturbadora cualquiera y ver que sucede cuando ésta cesa. Si el sistema retoma la configuración inicial el equilibrio es estable, si se aleja aún más de ella el equilibrio es inestable; y por último, si el sistema permanece en la posición final el equilibrio es indiferente.

Vamos a tratar de clarificar más aún estos conceptos estudiando el comportamiento de las tres esferas del esquema de la figura 10.1. Si en el caso (a) hacemos mover la esfera sobre la superficie y luego la soltamos, intuitivamente podemos reconocer que la esfera volverá a su posición inicial. Este es un caso de equilibrio estable. Si en la situación (b) cambiamos levemente a la esfera de posición, ésta ya no retomará la posición inicial sino que seguirá rodando, ésta es entonces una situación de equilibrio inestable. Si en el caso (c) movemos la esfera, ésta permanecerá en el nuevo lugar o próximo a éste, constituyendo entonces un estado de equilibrio indiferente.

Todo esto que puede ser comprendido intuitivamente puede ser explicado más científicamente si lo analizamos desde un punto de vista energético.

En el caso (a), para mover la esfera y llevarla a una posición distinta debe realizarse un trabajo, el cual se transforma en energía potencial gravitatoria. Si la causa perturbadora cesa, esta energía potencial acumulada tenderá a transformarse en energía cinética y la esfera rodará, llegará hasta el fondo y probablemente subirá por la otra ladera, oscilando en torno del fondo hasta que por fricción, el trabajo entregado originalmente se haya transformado totalmente en calor, permaneciendo la esfera en el lugar donde la energía potencial es mínima. Por esta razón el equilibrio es estable.

En el caso (b), al moverse un poco la esfera pierde energía potencial, la cual se transforma en energía cinética, de esta forma adquiere velocidad y continúa con el movimiento iniciado. Resulta evidente entonces que el equilibrio es inestable.

Finalmente para mover la esfera de la situación (c) debe realizarse un cierto trabajo, el cual se transforma fundamentalmente en energía cinética. La esfera adquiere velocidad y cambia de posición, pero cuando la perturbación termina, la energía adquirida se transforma en calor por fricción, con lo que la esfera se detiene, si bien no en la última posición, en una muy próxima a ésta. Este es entonces un caso de equilibrio indiferente.

A continuación vamos a analizar la estabilidad de una configuración de equilibrio en una estructura simple. Se trata de una barra rígida, recta, vertical, empotrada elásticamente en su extremo inferior mediante un resorte que reacciona proporcionalmente al giro de la barra, y sometida en su extremo superior a una carga vertical P de compresión.

La posición vertical de la barra es una configuración de equilibrio, de la cual deseamos averiguar si es estable. Es posible demostrar que el equilibrio puede ser estable o inestable, dependiendo ello de la carga P . La carga a partir de la cual el equilibrio se transforma en inestable recibe el nombre de "Carga crítica".

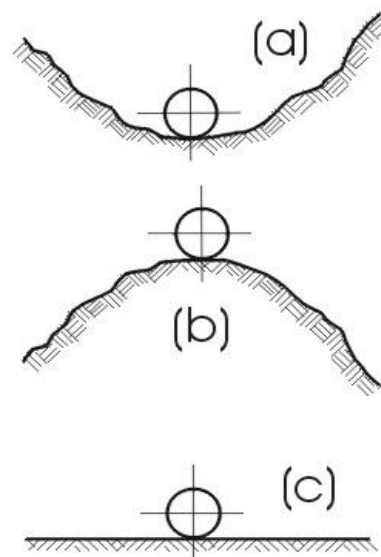


Fig. 10.1



Fig. 10.2

Para justificar lo que hemos dicho vamos a aplicar en el borde superior de la barra una carga horizontal infinitesimal de modo que la barra se aparte de su posición original y luego eliminamos la fuerza perturbadora.

Supongamos que la posición última también es una configuración de equilibrio, con lo que deberá verificarse la correspondiente igualdad entre el momento exterior el momento elástico interno.

$$P \cdot \overline{A'A''} = P \cdot l \cdot \text{sen } \varphi = m \cdot \varphi \tag{10.1}$$

$$\rightarrow P = \frac{m}{l} \cdot \frac{\varphi}{\text{sen } \varphi}$$

Si tomamos en cuenta que cuando $P \rightarrow P_{crít}$ debe ocurrir que $\varphi \rightarrow 0$ y como:

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\varphi}{\text{sen } \varphi} = 1 \quad ; \quad \text{entonces:}$$

$$P_{crít} = \frac{m}{l} \tag{10.2}$$

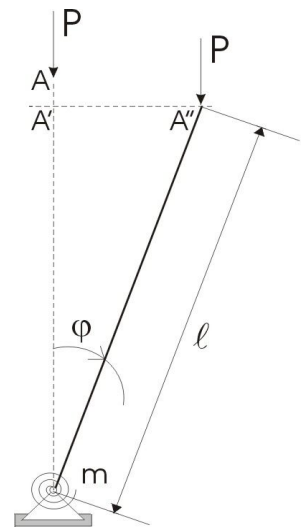


Fig. 10.3

Como sabemos la función $\varphi / \text{sen } \varphi \geq l$, con lo que la expresión [10.1] nos da la relación entre P y φ para $P \geq P_{crít}$.

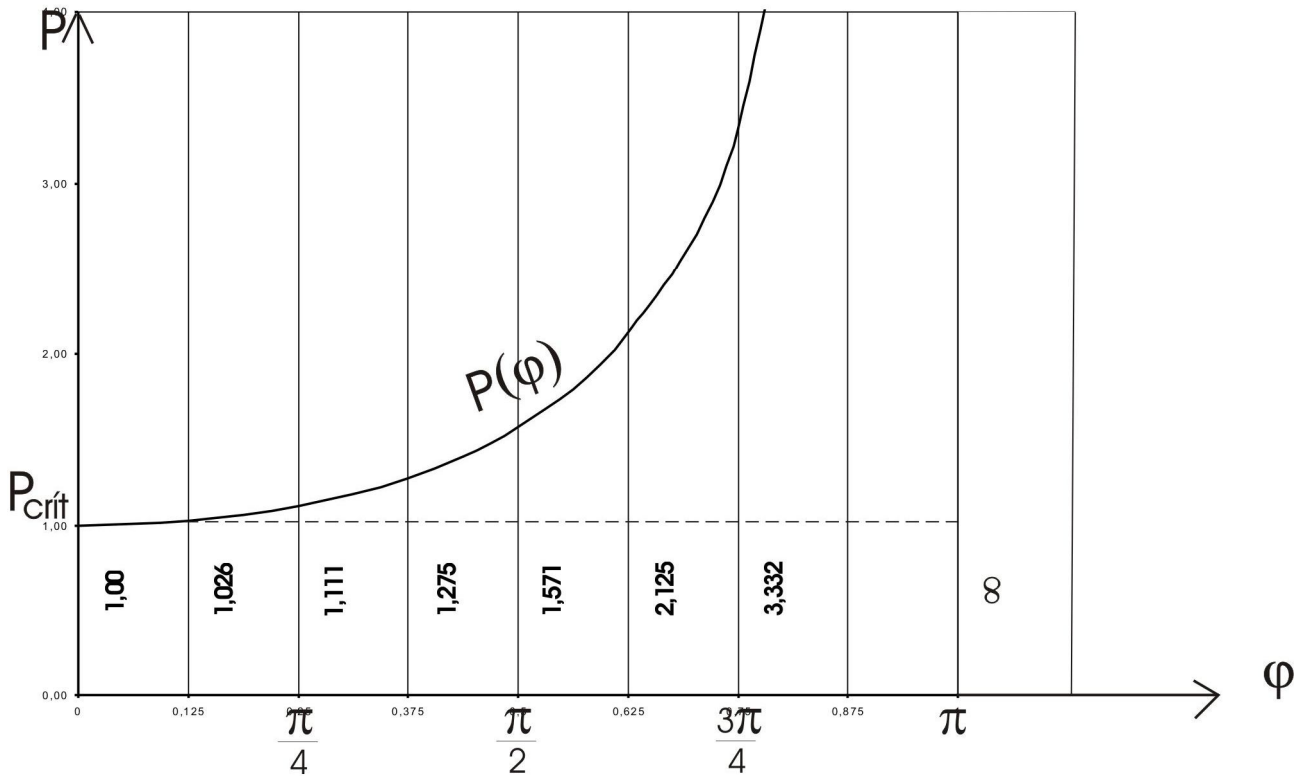


Fig.10.4

Observando la gráfica de la función dada por la expresión [10.1] podemos ver que para valores de la carga inferiores a $P_{crít}$ existe una sola configuración de equilibrio, la vertical por lo tanto el equilibrio es estable. En efecto, consideremos por ejemplo una carga:

$$P = \frac{1}{2} P_{\text{crít}} = \frac{1}{2} \frac{m}{l}$$

y supongamos que existe otra configuración de equilibrio distinta de la vertical, entonces debería cumplirse la ecuación de equilibrio anterior para $\varphi \neq 0$.

$$P.l.\text{sen}\varphi = m.\varphi$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{m}{l} \cdot l \cdot \text{sen}\varphi = m \cdot \varphi \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} \text{sen}\varphi = \varphi \quad (10.3)$$

La ecuación última se cumple solamente para $\varphi = 0$, es decir, para la barra en posición vertical, con lo que bajo cualquier perturbación horizontal, la barra volvería a su posición original.

Para los valores de la carga superiores a $P_{\text{crít}}$ podemos ver que existen dos configuraciones de equilibrio posibles. En efecto, supongamos una carga $P = 1,275 P_{\text{crít}}$, de la gráfica de la figura 10.4 podemos ver que $\varphi = \frac{3}{8}\pi$ satisface la relación [10.1], luego, la barra vertical o girada un ángulo φ como el indicado constituyen dos configuraciones de equilibrio posibles para la carga indicada.

Se acostumbra a decir, con cierta impropiedad, que para la carga crítica el equilibrio es indiferente. En rigor, la configuración de equilibrio vertical pasa sin solución de continuidad de la condición de estable a la condición de inestable siendo la carga crítica la última carga para la cual la configuración es estable.

Para $P > P_{\text{crít}}$ se produce la llamada “bifurcación del equilibrio” porque existen dos formas de equilibrio posibles, una inestable (la vertical), y otra estable con una cierta rotación φ que depende del valor de la carga.

10.2 PANDEO EN EL CAMPO ELÁSTICO

10.2.1. COLUMNA DE EULER

Los primeros problemas de estabilidad elástica relativos al pandeo de barras comprimidas fueron resueltos por Euler. El problema planteado por éste y que nosotros vamos a estudiar a continuación es similar al analizado en el ítem anterior, bajo las siguientes condiciones:

- La barra es de un material perfectamente homogéneo y elástico, es decir que verifica la Ley de Hooke y en el estado de tensiones alcanzado no se supera la tensión de proporcionalidad.
- Su eje es idealmente recto.
- La carga está exactamente centrada.
- Los vínculos son ideales, sin rozamiento, de los tipos indicados en la Figura 10.5

En las condiciones que hemos enunciado precedentemente la posición vertical de la barra es una configuración de equilibrio, de la cual deseamos saber si es estable.

Para determinar esto comenzamos por hacer actuar una fuerza perturbadora horizontal infinitésima, y suponemos además que el equilibrio vertical es indiferente, de modo tal que la barra pasa a otra configuración de equilibrio curvada como la que se indica en la Figura 10.6.

Para una sección genérica ubicada a una abscisa “x” la barra tiene un desplazamiento “y”. Si planteamos el equilibrio entre el momento externo y el

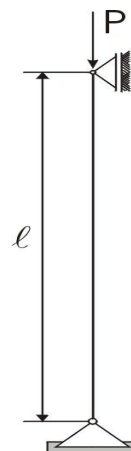


Fig. 10.5

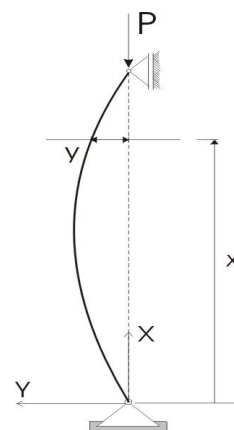


Fig. 10.6

momento elástico interno tendremos:

$$P \cdot y = -E \cdot I \cdot y'' \quad (10.4)$$

$$P \cdot y + E \cdot I \cdot y'' = 0$$

$$y'' + \frac{P}{E \cdot I} \cdot y = 0$$

Si llamamos $\alpha^2 = \frac{P}{E \cdot I}$ llegamos a la siguiente ecuación diferencial:

$$y'' + \alpha^2 \cdot y = 0 \quad (10.5)$$

Cuya solución general es la siguiente:

$$y = A \cdot \text{sen } \alpha \cdot x + B \cdot \text{cos } \alpha \cdot x \quad (10.6)$$

Imponiendo condiciones de borde tenemos:

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad y = 0 \quad \rightarrow \quad B = 0 \quad (10.7)$$

$$x = l \quad \rightarrow \quad y = 0 \quad \rightarrow \quad A \cdot \text{sen } \alpha \cdot l = 0 \quad (10.8)$$

Para que se cumpla la nulidad de la ecuación [10.8] pueden ocurrir dos situaciones:

a) $A = 0$

En este caso obtenemos como ecuación de la elástica la función idénticamente nula, que estaría representando a la configuración vertical de la barra. Lógicamente este caso no es el que nos interesa pues estamos buscando otras configuraciones de equilibrio.

b) $\text{sen } \alpha \cdot l = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{n \cdot \pi}{l}$ (dónde n: número entero)

Si recordamos:

$$\alpha^2 = \frac{P}{E \cdot I} \quad \rightarrow \quad P = E \cdot I \cdot \frac{n^2 \cdot \pi^2}{l^2} \quad (10.9)$$

Para valores de la carga P que verifiquen la ecuación [10.9] se obtienen distintas elásticas que corresponden a configuraciones de equilibrio de la barra. La menor de todas las cargas que genera la situación indicada en el último párrafo corresponde a $n = 1$. Dicha carga es la "Carga crítica".

$$P_{\text{crít}} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2} \quad (10.10)$$

Vemos que la expresión de la elástica correspondiente a ella es:

$$y = A \cdot \text{sen } \frac{\pi \cdot x}{l}$$

La cual queda indeterminada, ya que no hemos encontrado el valor de A puesto que siendo $\alpha = \pi/l$, la condición de borde $A \cdot \text{sen } \alpha \cdot l = 0$ implica $A \cdot 0 = 0$, de donde no es posible despejar la constante. Esto en realidad ocurre porque hemos usado como valor de la curvatura $l/\rho = y''$, en lugar de la expresión exacta:

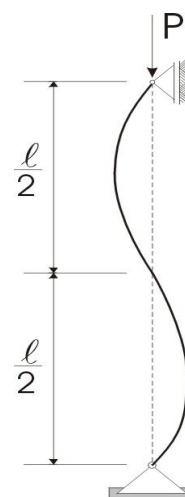


Fig. 10.7

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \quad (10.11)$$

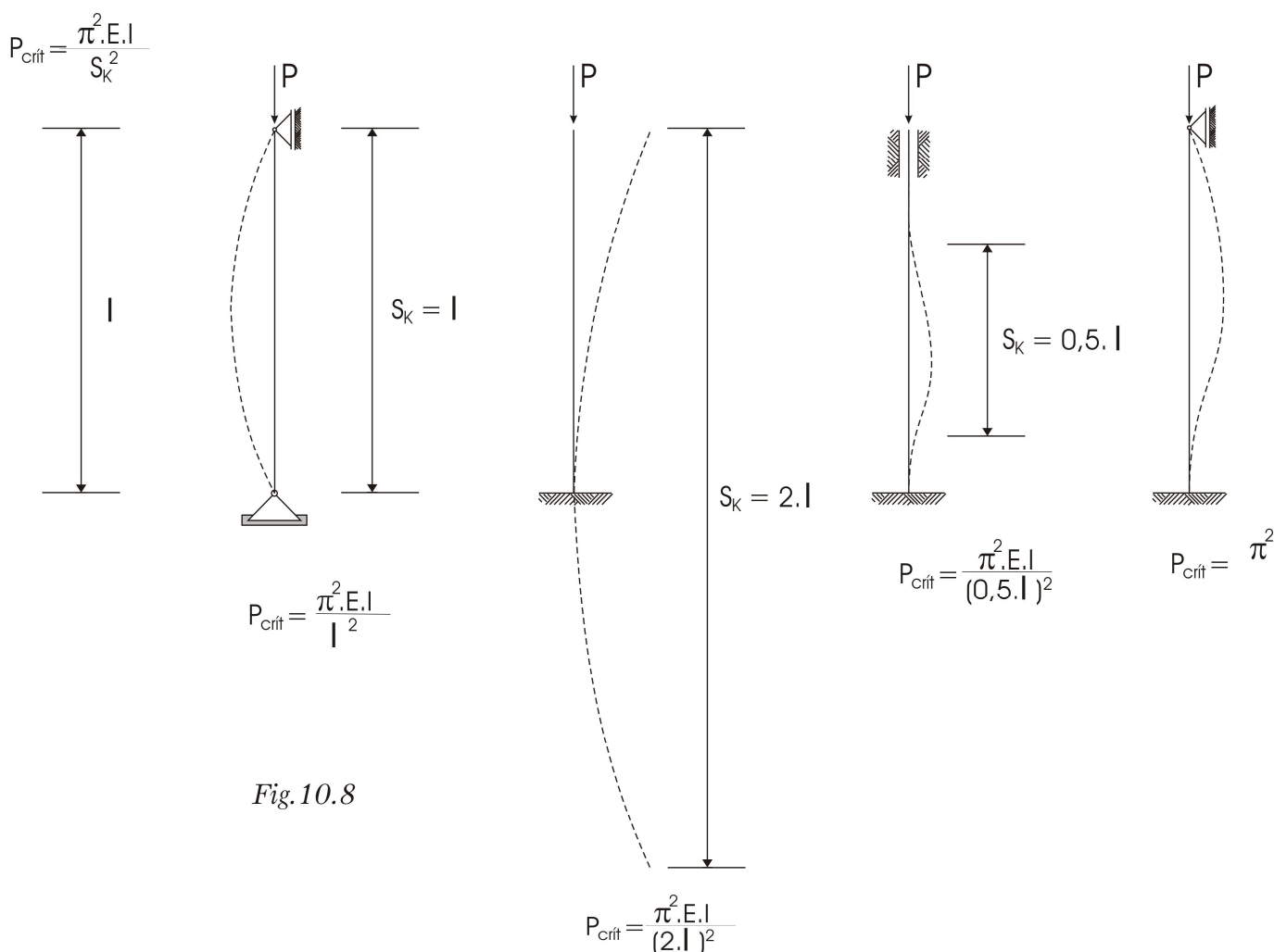
La aproximación anterior es válida cuando las deformaciones son pequeñas, por lo que debemos concluir que la solución encontrada para la carga crítica es el límite de las cargas P cuando la configuración de equilibrio curvada se acerca tanto como se quiere a la vertical.

Finalmente podemos analizar el significado que tienen las cargas críticas correspondientes a $n = 2, 3, 4$, etc. Si consideramos, por ejemplo el caso de $n = 2$, podemos ver que $P = 2 \cdot P_{crít}$ y que la elástica sinusoidal indeterminada queda constituida por una doble semionda. Esta carga tiene solamente un interés teórico y corresponde a la carga crítica en el caso que la barra se fijase en la mitad de su luz mediante un apoyo móvil.

10.2.2. DISTINTAS FORMAS DE SUSTENTACIÓN

Así como en el ítem anterior hemos estudiado el pandeo de una barra biarticulada bajo ciertas hipótesis, es posible realizar un estudio semejante para otras condiciones de vínculo, pudiendo establecer para cada caso la correspondiente carga crítica.

A continuación vamos a indicar los valores obtenidos en los casos más comunes, los que podremos comparar con el valor para la barra biarticulada.



Si observamos detenidamente los esquemas anteriores podremos apreciar que las expresiones correspondientes a las cargas críticas para los distintos casos son muy similares a la de la barra biarticulada, difiriendo solamente en una constante.

Desde el punto de vista práctico resulta muy conveniente poder tratar cualquier caso de sustentación mediante una expresión única para la carga crítica. Esto se logra transformando a la pieza en una barra ficticia biarticulada con una luz ideal que depende la luz real y de las condiciones reales de vinculación. Esta luz ficticia recibe el nombre de “Luz de pandeo” ó “Longitud de pandeo”.

$$P_{\text{crít}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{S_k^2} \quad (10.12)$$

S_k : Longitud de pandeo	Barra biarticulada:	$S_k = 1$
	Barra empotrada – libre:	$S_k = 2 \cdot l$
	Barra empotrada – empotrada:	$S_k = 0,5 \cdot l$
	Barra empotrada – articulada:	$S_k = 0,7 \cdot l$

Para otros elementos estructurales tales como patas de pórticos o barras con sección variable existen tablas de donde se puede determinar la correspondiente longitud de pandeo.

10.2.3. TENSION CRÍTICA DE EULER. LIMITACIÓN DE LA TEORÍA DE EULER.

La tensión crítica de Euler se calcula como el cociente entre la carga crítica de pandeo de Euler y el área de la sección transversal de la barra:

$$\begin{aligned} \sigma_{ki} &= \frac{P_{\text{crít}}}{A} \\ \sigma_{ki} &= \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{S_k^2 \cdot A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot i^2}{S_k^2} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\left(\frac{S_k}{i}\right)^2} \\ \sigma_{ki} &= \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \end{aligned} \quad (10.13)$$

Llamando λ a la relación:

$$\lambda = \frac{S_k}{i} \quad (10.14)$$

λ : esbeltez de la pieza

La esbeltez de la pieza se define como la relación entre la luz de pandeo y el radio de giro mínimo de la sección transversal de la pieza correspondiente a la luz de pandeo considerada. Este parámetro es sumamente importante en el problema de pandeo. Efectivamente, cuanto más esbelta es una barra mayor es el riesgo de pandeo, y ello puede verse en la fórmula de la tensión crítica de Euler (10.15) que depende inversamente de la esbeltez.

Podemos representar la función $\sigma_{ki} = f(\lambda)$, y al hacerlo vemos que cuando λ tiende a cero, la tensión crítica de Euler tiende a infinito.

La fórmula de Euler fue deducida bajo la hipótesis de la validez ilimitada de la Ley de Hooke por lo tanto la misma solamente es válida si $\sigma_{ki} \leq \sigma_p$.

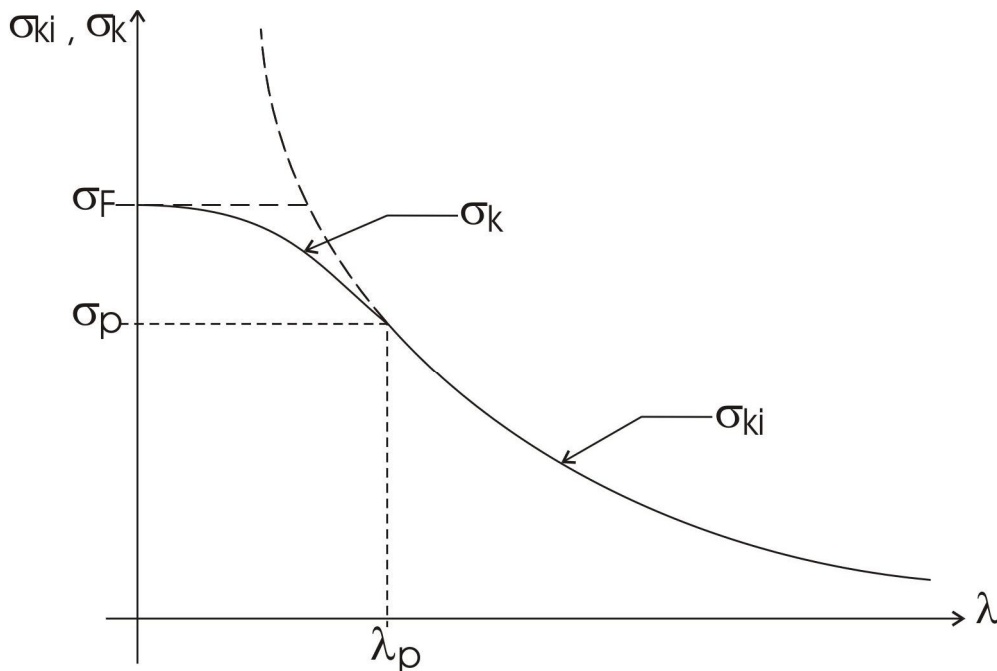


Fig. 10.9

La esbeltez límite para la cual tiene validez la Ley de Euler será:

$$\sigma_{ki} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} = \sigma_p \quad \rightarrow \quad \lambda_p = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} \quad (10.15)$$

Para el acero común: $\lambda_p = 103,9 \quad \therefore \quad \sigma_{ki} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \quad \forall \lambda \geq 103,9$

En la zona comprendida entre esbeltez cero y σ_p , la fórmula de Euler debe ser reemplazada por otra ley que contemple el comportamiento elastoplástico del material.

10.3. PANDEO ANELÁSTICO

Como se ha mencionado, para esbelteces menores que λ_p no es válida la Teoría de Euler. Engesser estudió el comportamiento teórico de piezas comprimidas de acero bajo tensiones superiores al límite de proporcionalidad; partió de iguales hipótesis que las establecidas por Euler para la deducción de la carga crítica, excepto la constancia del módulo de elasticidad E. Para esto último, en diferentes años propuso dos hipótesis para su determinación:

- a) teoría basada en el *módulo tangente*;
- b) teoría del *doble módulo*.

En los resultados no existen diferencias apreciables por el uso de una u otra teoría.

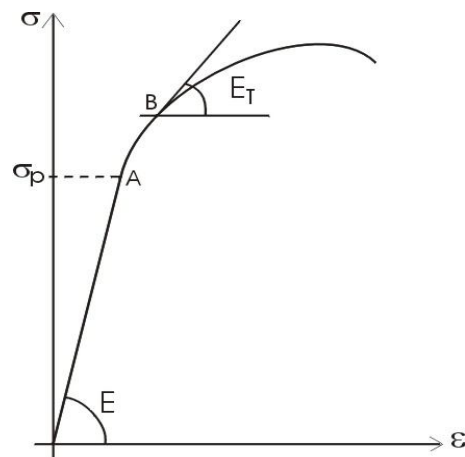


Fig. 10.10

Recordemos el diagrama tensión – deformación del acero ($\sigma - \epsilon$) para valores de tensiones menores a la de fluencia:

El punto A representa el estado correspondiente a la tensión conocida como límite de proporcionalidad σ_p . Para valores superiores de tensión, por ejemplo el punto B, la rigidez del material ya no depende del módulo inicial E .

Engesser primeramente (1889) presentó una teoría tomando en cuenta sólo el módulo tangente E_t . Si para un cierto valor de carga el estado tensional se representa con un punto como el B en el diagrama de tenso-deformación, y a través de un incremento ΔP la carga llega a su valor crítico, la rigidez del material en ese momento está dada instantáneamente por la tangente a la gráfica, E_t . En función de ello propuso la expresión siguiente:

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 \cdot E_t}{\lambda^2} \quad (10.16)$$

Como las tensiones correspondientes a los módulos referidos a la tangente se pueden obtener a partir del diagrama $\sigma - \epsilon$, la relación $\lambda = S_k / i$ a la cual pandeará la columna, se puede calcular a partir de la ecuación [10.16].

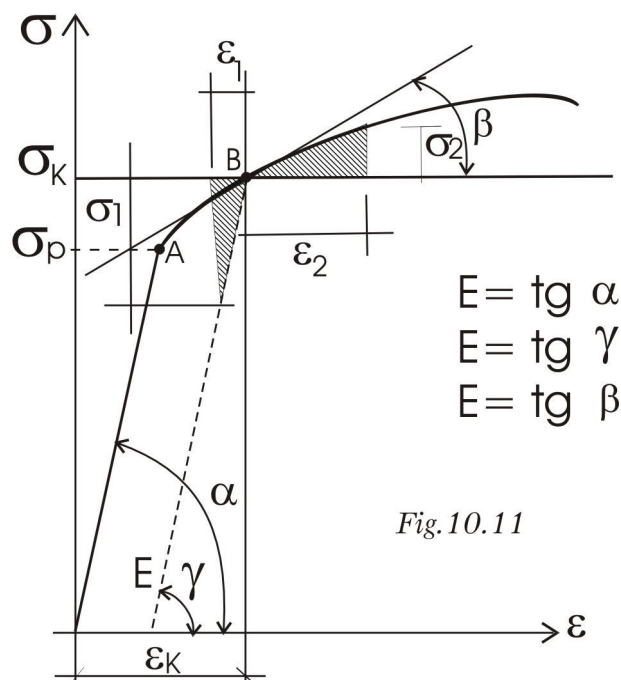
Con posterioridad, en 1895, Engesser propone una expresión similar pero con un módulo de elasticidad diferente. Con ello estableció la llamada teoría del doble módulo o teoría del módulo reducido, algunos de cuyos aspectos se estudian a continuación.

Suponiendo la permanencia de las secciones planas durante la flexión, la ecuación de la elástica será la misma que para los materiales que siguen la Ley de Hooke, con la excepción de que el módulo de elasticidad E se reemplaza por un módulo de elasticidad reducido T que depende la tensión σ_k originada por la carga P_k .

Suponiendo que el diagrama tenso – deformación del acero fuese el del esquema de la figura 10.11, y que se somete la pieza a una compresión que origina la tensión σ_k , si se descarga la pieza hasta cero, el módulo de elasticidad en descarga queda representado por la recta BO' casi paralela a OA .

La carga P_k origina la tensión de compresión σ_k uniformemente repartida mientras la pieza permanezca recta, pero en cuanto el eje pasa a la posición curva, el momento flector origina compresiones σ_2 que se suman a las σ_k y tensiones de tracción σ_1 en el lado convexo que se restan a las tensiones σ_k .

La carga crítica P_k es aquella capaz de mantener a la pieza en la posición curva del esquema (b) de la Figura 10.12, alejada de la vertical valores “ y ” que se suponen infinitésimos.



Si consideramos una tajada de la barra como la indicada en la figura 10.12, de longitud unitaria, se producen acortamientos suplementarios ϵ_2 en el lado derecho y alargamientos ϵ_1 en el lado izquierdo.

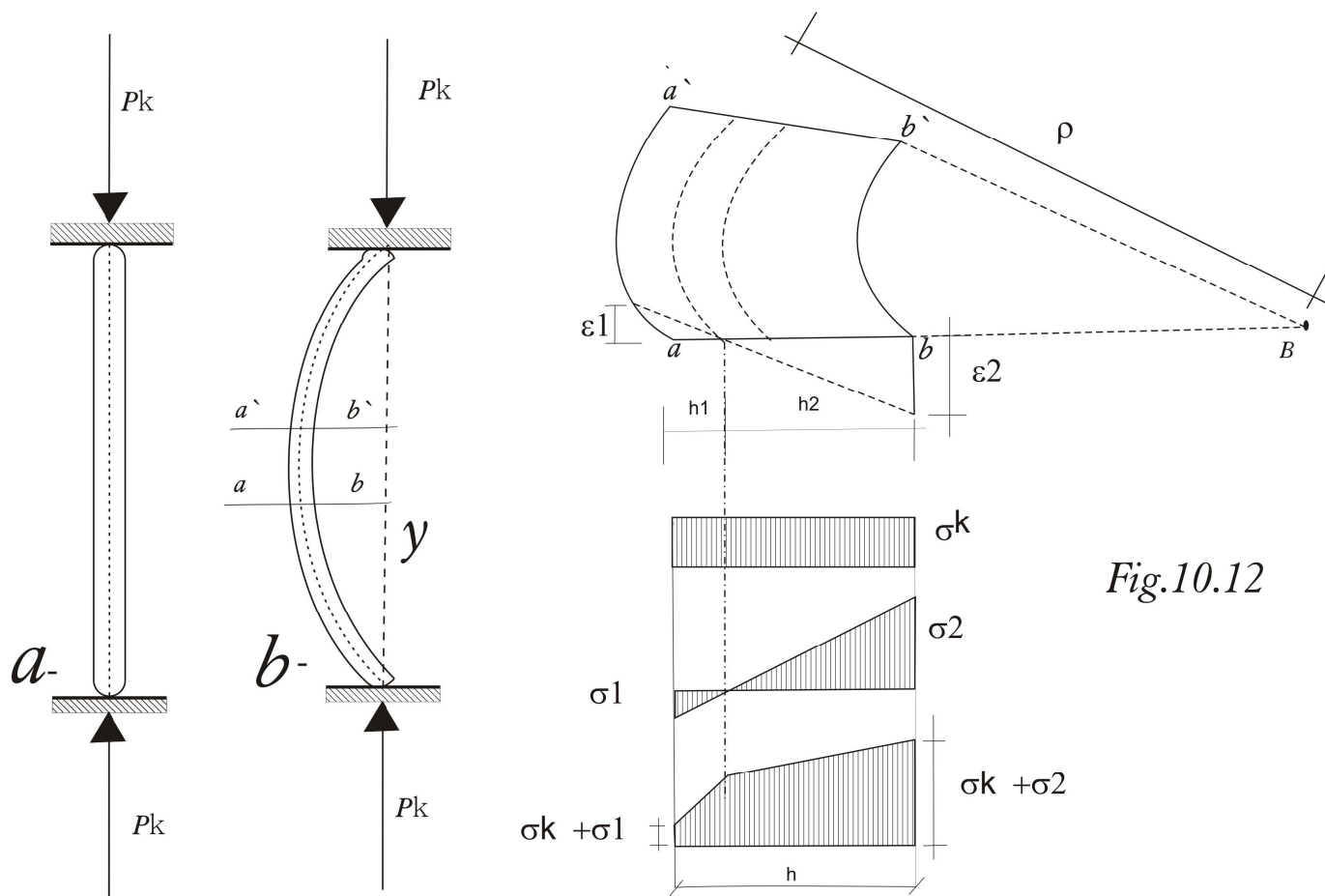


Fig.10.12

Admitiendo que la hipótesis de Navier – Bernoulli de las secciones planas podemos establecer:

$$\frac{\epsilon_2}{h_2} = \frac{\epsilon_1}{h_1} = \frac{1}{\rho} \tag{10.17}$$

Como las deformaciones ϵ_2 son infinitésimas, las tensiones σ_2 son poco superiores a las que corresponde al punto B en el diagrama $\sigma - \epsilon$ de la figura 10.10, pudiendo calcularse como:

$$\sigma_2 = E_2 \cdot \epsilon_2 \tag{10.18}$$

Donde $E_2 = \text{tg } \beta$ (módulo tangente)

Mientras que para σ_1 es válida la aplicación de la Ley de Hooke:

$$\sigma_1 = E \cdot \epsilon_1 \tag{10.19}$$

Donde $E = \text{tg } \alpha \cong E_1$

Luego:

$$\sigma_1 = \frac{E \cdot h_1}{\rho} \qquad \sigma_2 = \frac{E_2 \cdot h_2}{\rho}$$

Supongamos ahora que la sección transversal es rectangular y de ancho "b". Al igualar la resultante de tracción con la de compresión tenemos:

$$b \cdot \int_0^{h_1} \sigma_1 \cdot dy = b \cdot \int_0^{h_2} \sigma_2 \cdot dy$$

$$\frac{1}{2} \sigma_1 \cdot h_1 = \frac{1}{2} \sigma_2 \cdot h_2 \quad \rightarrow \quad \frac{E \cdot h_1^2}{2 \cdot \rho} = \frac{E_2 \cdot h_2^2}{2 \cdot \rho} \quad \rightarrow \quad E \cdot h_1^2 = E_2 \cdot h_2^2 \quad (10.20)$$

Siendo $h = h_1 + h_2$ se obtiene:

$$h_1 = \frac{h \cdot \sqrt{E_2}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_2}} \quad (10.21)$$

$$h_2 = \frac{h \cdot \sqrt{E}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_2}} \quad (10.22)$$

El momento flector M de las fuerzas exteriores debe ser igual al de las interiores, luego:

$$M = \frac{E \cdot h_1}{\rho} \cdot \frac{b \cdot h_1}{2} \cdot \frac{2}{3} h = \frac{b \cdot h^3}{12 \cdot \rho} \cdot \frac{4 \cdot E \cdot E_2}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_2})^2} = \frac{I}{\rho} \cdot \frac{4 \cdot E \cdot E_2}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_2})^2} \quad (10.23)$$

llamando:

$$T = \frac{4 \cdot E \cdot E_2}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_2})^2} \quad (10.24)$$

La ecuación de la elástica en la zona elastoplástica resulta:

$$y'' + \zeta^2 \cdot y = 0 \quad (10.25)$$

$$\text{Dónde } \zeta^2 = \frac{P}{T \cdot I} \quad (10.26)$$

Integrando la ecuación (10.26) se llega a:

$$P_k = \frac{\pi^2 \cdot T \cdot I}{l^2} \quad (10.27)$$

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 \cdot T}{\lambda^2} \quad \text{Tensión crítica de Engesser} \quad (10.28)$$

En el caso de secciones de forma cualquiera se demuestra que:

$$T = E \cdot \frac{I_1}{I} + E_2 \cdot \frac{I_2}{I} \quad (10.29)$$

Donde I_1 es el momento de inercia de la zona traccionada, I_2 es el momento de inercia de la zona comprimida e I es el momento de inercia de la sección total, todos ellos calculado respecto del eje neutro. Si se comparan los valores de T para distintas formas de sección se concluye que T es poco

sensible a los cambios de sección. Por ello cuando es necesario definir una sección se toma la rectangular ya que es más fácil la formulación matemática en el desarrollo del tema.

A fin de disponer de una base general para calcular la tensión crítica, los reglamentos definen la función que relaciona σ_k con la esbeltez λ .

Existen manuales con tablas donde se hallan tabulados los valores correspondientes a σ_k para distintas esbelteces y diferentes calidades de acero. En las mismas también se indica el valor de σ_{ki} . En la Figura 10.9, además de graficarse σ_{ki} , se dibujó la curva correspondiente a σ_k .

10.4. PANDEO REAL

Una barra real no responde nunca a las condiciones ideales que hemos supuesto anteriormente, es decir, el eje de la barra no es rigurosamente recto, el material no resulta homogéneo, la línea de acción de la fuerza de compresión no coincide con el eje de la pieza, etc.

A continuación vamos a ver las consecuencias de estas imperfecciones. Al hacerlo veremos que en la barra real no se produce una “bifurcación del equilibrio”, sino una “divergencia del equilibrio”.

Consideremos el caso de la barra de la Figura 10.13 sometida a flexión compuesta. La excentricidad “e” debe interpretarse como una excentricidad no prevista pero inevitable, consecuente con lo expresado en el primer párrafo.

Por tratarse de una barra esbelta, el momento flector debe calcularse sobre la configuración deformada.

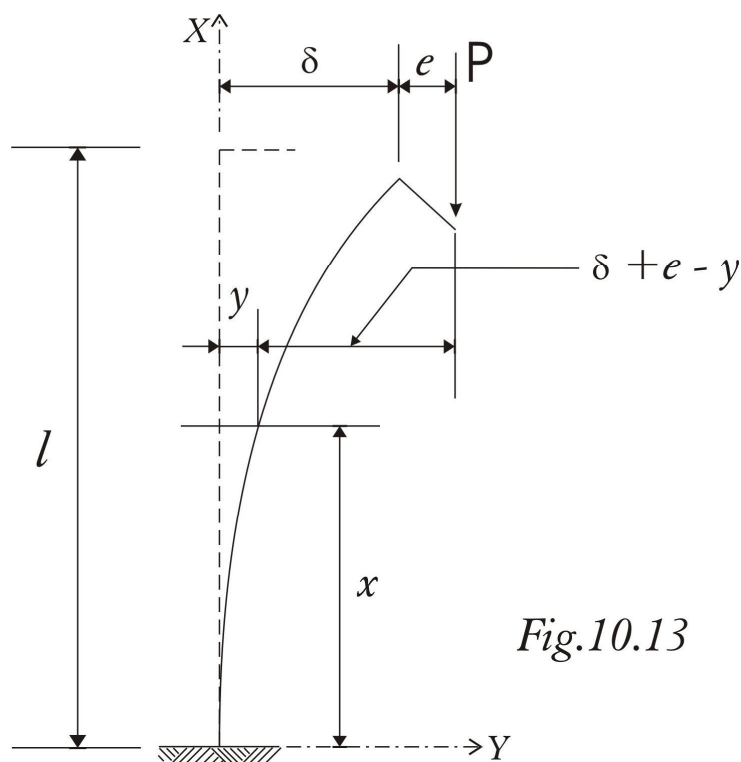


Fig.10.13

$$M_e = P.(\delta + e - y) \quad (10.30)$$

$$M_i = E.I.y'' \quad (10.31)$$

$$M_e = M_i \quad \rightarrow \quad E.I.y'' + P.y = P.(\delta + e) \quad (10.32)$$

$$\text{llamando} \quad \alpha^2 = \frac{P}{E.I} \quad (10.33)$$

$$y'' + \alpha^2.y = \alpha^2(\delta + e) \quad (10.34)$$

La solución general de la ecuación diferencial (10.33) es:

$$y = A.\text{sen}\alpha x + B.\text{cos}\alpha x + e + \delta \quad (10.35)$$

Para satisfacer las condiciones de borde debe cumplirse:

$$y_{(x=0)} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{B} + \mathbf{e} + \delta = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{B} = -(\mathbf{e} + \delta) \quad (10.36)$$

$$y'_{(x=0)} = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha \cdot \mathbf{A} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{A} = 0 \quad (10.37)$$

$$y = (\mathbf{e} + \delta) \cdot (1 - \cos \alpha \cdot x) \quad (10.38)$$

δ es el valor correspondiente a la elástica para $x = l$.

$$y = (\mathbf{e} + \delta) \cdot (1 - \cos \alpha \cdot l) \quad \rightarrow \quad \delta = \frac{\mathbf{e} \cdot (1 - \cos \alpha l)}{\cos \alpha l} \quad (10.39)$$

$$y = \frac{\mathbf{e} \cdot (1 - \cos \alpha x)}{\cos \alpha l} \quad (10.40)$$

Vemos que a diferencia de lo que ocurre con el pandeo ideal, desde el comienzo, es decir, desde $P = 0$ se tiene una configuración curvada de la barra, no apareciendo el fenómeno de bifurcación del equilibrio.

Otra observación importante es que la flecha no resulta directamente proporcional a la carga P . Esto es debido a que la condición final de equilibrio fue planteada sobre la configuración deformada de la pieza que depende de P .

Como consecuencia de lo recientemente mencionado resulta que NO ES APLICABLE EL PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN DE EFECTOS.

La flecha aumenta más rápidamente que la carga y este efecto se acentúa en la medida que $\alpha \cdot l$ se aproxima al valor $\pi / 2$. Para $\alpha \cdot l = \pi / 2 \Rightarrow \delta \rightarrow \infty$. En este caso:

$$\alpha \cdot l = \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad \alpha^2 = \frac{\pi^2}{4 \cdot l^2} = \frac{P}{E \cdot I} \quad \rightarrow \quad P = \frac{\pi^2}{(2l)^2} \cdot E \cdot I = P_E$$

P_E : valor de la carga crítica de Euler o del pandeo ideal para el caso considerado. También podemos observar que este último resultado es independiente de la excentricidad inicial "e".

Para comprender un poco mejor el problema vamos a graficar la relación P / P_E versus δ / l para distintas relaciones e / l .

$$\alpha^2 = \frac{P}{E \cdot I} \cdot \frac{P_E}{P_E} = \frac{P}{E \cdot I} \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{4 \cdot l^2} \cdot \frac{1}{P_E} = \frac{\pi^2}{4 \cdot l^2} \cdot \frac{P}{P_E} \quad \rightarrow \quad \alpha \cdot l = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_E}}$$

$$\delta = \frac{\mathbf{e} \cdot (1 - \cos \alpha \cdot l)}{\cos \alpha \cdot l} \quad \rightarrow \quad \frac{\delta}{l} = \frac{e}{l} \cdot \left[\frac{1}{\cos \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_E}}} - 1 \right] \quad (10.41)$$

En el diagrama de la Figura 10.14 podemos apreciar que las curvas se aproximan tanto más al eje vertical a medida que la excentricidad relativa disminuye. En el límite, cuando $e = 0$ tendríamos la

curva quebrada punteada, con lo que el pandeo ideal de Euler resulta ser un caso particular del pandeo real.

Se ve además que las flechas aumentan muy rápidamente cuando la carga P se aproxima a su valor crítico, y todas las curvas tienen por asíntota la línea horizontal $P/P_E = 1$ independientemente de “ e ”.

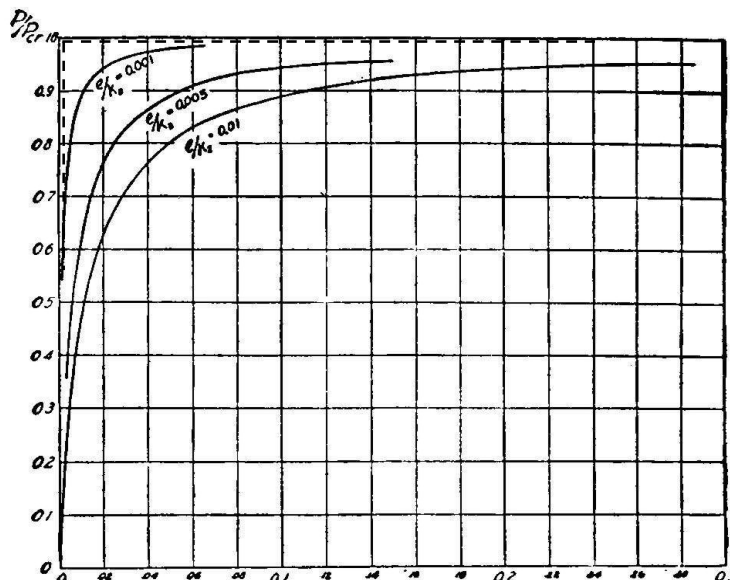


Fig. 10.14

Una aclaración importante que debemos realizar es que las curvas anteriores no son totalmente exactas ya que cuando la flecha δ toma valores muy grandes, la ecuación diferencial planteada pierde validez porque “ y ” ya no representa a la curvatura. No obstante podemos considerar que para el caso de barras de cierta rigidez tales como las usuales en la construcción de estructuras las deformaciones serán pequeñas y la simplificación de considerar:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \cong y''$$

si bien no es exacta matemáticamente es más que suficiente para pequeñas deformaciones.

La consideración de la fórmula completa de la curvatura será indispensable en el caso de análisis de dispositivos de máquinas, por ejemplo. No obstante, el resultado obtenido nos está indicando que cuando la carga se acerca a la de Euler, debido a las grandes deformaciones alcanzadas, el material llega a la fluencia en la sección más exigida. A partir de ese instante el momento interno permanece constante y ya no se equilibra con el externo, que sigue creciendo.

Si el material presenta en su curva tenso – deformación un período de refortalecimiento, cuando las tensiones alcanzan esta zona el momento interno vuelve a incrementarse, pero lo hace en forma más lenta que el exterior y ya no lo puede equilibrar.

Finalmente podemos decir que es posible demostrar que las conclusiones anteriores son independientes de la forma de sustentación. Por ello, en la práctica, la rotura siempre sobreviene para una carga $P < P_E$, y esto se debe a la existencia de imperfecciones como las ya indicadas. Ocurre entonces que en lugar de existir un fenómeno de bifurcación del equilibrio aparece un problema de flexocompresión.

Si realizamos un ensayo de laboratorio de una pieza comprimida axialmente, y fuese posible respetar todas las hipótesis de Euler, encontraríamos que la carga se va incrementando paulatinamente sin que se observen flechas, hasta alcanzar el valor de $P_{crít}$, en cuyo caso la barra pandea (se flexa) en forma repentina. Dado que las hipótesis de Euler son muy difíciles de lograr, en la medida en que la carga se incrementa van apareciendo flechas, las que aumentan cada vez más violentamente, produciéndose finalmente el agotamiento de la capacidad resistente de la sección más exigida y el colapso de la pieza.

Por reglamento se determinan las tensiones críticas reales bajo las siguientes hipótesis:

1. La sección constante de la barra tiene la forma representada en la Figura 10.15, con el punto de paso de la carga según se indica.
2. La compresión actúa en los extremos articulados de la barra y conserva su dirección durante el pandeo. La magnitud “ e ” que representa la excentricidad no prevista se determina arbitrariamente mediante la siguiente expresión:

$$e = \frac{i}{20} + \frac{S}{500} \quad (10.42)$$

i : radio de giro mínimo de la sección

S : longitud teórica de la pieza

3. Es válida la hipótesis de Navier – Bernoulli.
4. El acero verifica el diagrama tensión – deformación de la Figura 10.15.
5. La elástica se supone constituida por una semionda senoidal.

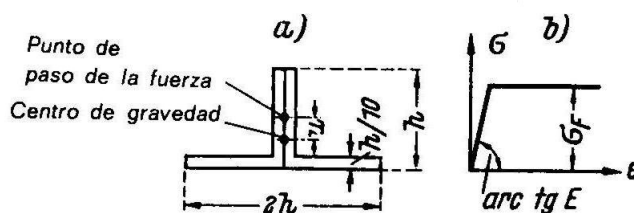


Fig. 10.15

De acuerdo con las hipótesis anteriores se deduce a partir de los puntos 1 a 5 la siguiente expresión para vincular la tensión crítica real con la esbeltez:

$$\lambda^2 = \frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_{kr}} \left[1 - \frac{m \cdot \sigma_{kr}}{\sigma_F - \sigma_{kr}} + 0,25 \cdot \left(\frac{m \cdot \sigma_{kr}}{\sigma_F - \sigma_{kr}} \right)^2 - 0,005 \cdot \left(\frac{m \cdot \sigma_{kr}}{\sigma_F - \sigma_{kr}} \right)^3 \right] \quad (10.43)$$

donde:

$$m = 2,317 \cdot \left(0,05 + \frac{\lambda}{500} \right)$$

10.5. CALCULO DE PIEZAS SOMETIDAS A COMPRESIÓN AXIAL

10.5.1. INTRODUCCIÓN

Los Reglamentos contienen los fundamentos de cálculo para diferentes casos de inestabilidad en la construcción metálica. En ellos se distinguen tres tipos de carga de agotamiento:

- La carga crítica de Euler P_{ki}
- La carga crítica usual de Engesser P_k
- La carga crítica real P_{kr}

La dificultad de la determinación teórica de éstas cargas crece en el orden indicado, por esta razón, en la construcción metálica se utilizan para el dimensionamiento:

- La carga crítica real sólo en los casos más sencillos,
- La de Engesser en general,
- La de Euler en los casos de mayor dificultad.

Según la carga crítica que se utilice en el dimensionamiento deberá realizarse alguna de las siguientes comprobaciones:

$$P \leq \frac{P_{ki}}{\gamma_{ki}} \quad P \leq \frac{P_k}{\gamma_k} \quad P \leq \frac{P_{kr}}{\gamma_{kr}} \quad (10.44)$$

Donde P: carga que actúa sobre la pieza

γ_{ki} , γ_k , γ_{kr} : coeficientes de seguridad de Euler, Engesser o real respectivamente.

Los coeficientes de seguridad recientemente mencionados deben estar comprendidos dentro de los límites que por razones de seguridad y economía, así como por los de experiencia y conocimiento teórico, se establecen, y tanto mayores han de fijarse cuanto más se aparten de la realidad las hipótesis fundamentales admitidas para el cálculo.

Desde el punto de vista práctico es sumamente importante tratar de simplificar al máximo las verificaciones a realizar en los problemas de pandeo. En este sentido, la introducción del concepto de longitud de pandeo permite reducir la mayoría de los problemas de pandeo a la determinación de la carga crítica de una barra recta biarticulada de sección constante y esfuerzo axial constante (barra de Euler)

Por otro lado resulta conveniente que el cálculo de pandeo se realice en forma semejante a otros tipos de cálculos donde usualmente se comparan tensiones.

Consecuentemente, las comprobaciones indicadas anteriormente pueden transformarse de la siguiente manera:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{P_{ki}}{\Omega} = \sigma_{ki} \rightarrow \frac{\sigma_{ki}}{\gamma_{ki}} \\ \frac{P_k}{\Omega} = \sigma_k \rightarrow \frac{\sigma_k}{\gamma_k} \\ \frac{P_{kr}}{\Omega} = \sigma_{kr} \rightarrow \frac{\sigma_{kr}}{\gamma_{kr}} \end{array} \right\} = \sigma_{c \text{ adm}} \quad (10.45)$$

$\sigma_{c \text{ adm}}$: tensión admisible a la compresión

Esta $\sigma_{c adm}$ se diferencia del σ_{adm} ya que éste es sólo función del tipo de material (Acero aleado, acero común, acero de fundición, cobre, aluminio, hormigón, madera, etc.). En cambio el $\sigma_{c adm}$ es función del tipo de material en primer lugar y luego de las dimensiones geométricas de la barra y su forma de sustentación.

Por ejemplo: una barra de acero común de sección rectangular de 0,10 m \times 0,15 m, longitud de 3,00 m y con un extremo empotrado y otro libre, tendrá una $\sigma_{c adm}$ distinto del que corresponde a una barra de sección doble T 200, longitud 5,20 m y con ambos extremos articulados.

O sea que para hallar la carga admisible de una barra debemos conocer previamente su sección, longitud y forma de vinculación además del tipo de material y ver si la tensión actuante no supera el valor del $\sigma_{c adm}$ de esta barra.

$$\sigma = \frac{P}{\Omega} \leq \sigma_{c adm} \quad (10.46)$$

Esta última comprobación parece muy simple pero no lo es. En efecto, la tensión $\sigma_{c adm}$ no resulta constante como la tensión admisible a la tracción (σ_{adm}).

Para no tener que comparar con tensiones que son variables se ha recurrido al siguiente artificio:

$$\frac{P}{\Omega} \leq \sigma_{c adm} \cdot \frac{\sigma_{adm}}{\sigma_{adm}} \rightarrow \frac{P}{\Omega} \leq \frac{\sigma_{adm}}{\left(\frac{\sigma_{adm}}{\sigma_{c adm}} \right)}$$

llamando: $\omega = \frac{\sigma_{adm}}{\sigma_{c adm}}$ (coeficiente de pandeo) (10.47)

$$\frac{\omega \cdot P}{\Omega} \leq \sigma_{adm} \quad (10.48)$$

El coeficiente de pandeo depende de la calidad del material y de la esbeltez de la barra. Sus valores pueden obtenerse de tablas incluidas en los Reglamentos. Para la construcción de estas tablas se tomó como norma la doble verificación:

$$\frac{P}{\Omega} \leq \frac{\sigma_{ki}}{\gamma_{ki}} \quad \frac{P}{\Omega} \leq \frac{\sigma_{kr}}{\gamma_{kr}} \quad (10.49)$$

Esto tiene sentido dado que si bien $\sigma_{kr} < \sigma_{ki}$ resulta $\gamma_{kr} < \gamma_{ki}$, con lo que no queda establecido que sea determinante alguna de las dos verificaciones. Para la tensión σ_{ki} se ha empleado la fórmula de Euler [10.14], y para las tensiones críticas reales se adoptaron las hipótesis indicadas en el artículo anterior.

La ecuación [10.49] es la que se utiliza en las verificaciones prácticas, y aunque resulta muy sencilla, no es una fórmula de dimensionamiento directo. En efecto, dado que el coeficiente ω depende de la esbeltez, y consecuentemente del área de la sección, ésta no puede ser despejada. Por este motivo el dimensionamiento de piezas comprimidas siempre es iterativo.

En la Figura 10.16 y en la Tabla 1, se dan las Tensiones de Pandeo Ideales (de Euler) σ_{ki} y las Tensiones Reales σ_{kr} para diferentes valores de la esbeltez λ . Dividiendo σ_{ki} por $v_{ki} = 2,50$ y σ_{kr} por $v_{kr} = 1,50$, el MENOR de los dos valores de la tensión obtenidos representa en cada caso, la tensión de

compresión admisible $\sigma_{c adm}$ en la hipótesis de carga 1 (fuerzas principales); en la hipótesis de carga 2 (fuerzas principales y secundarias) hay que aumentar este valor en relación con las tensiones a tracción admisibles². De los valores $\sigma_{c adm}$ se deducen los coeficientes de pandeo mediante la relación $\omega = \sigma_{adm} / \sigma_{c adm}$.

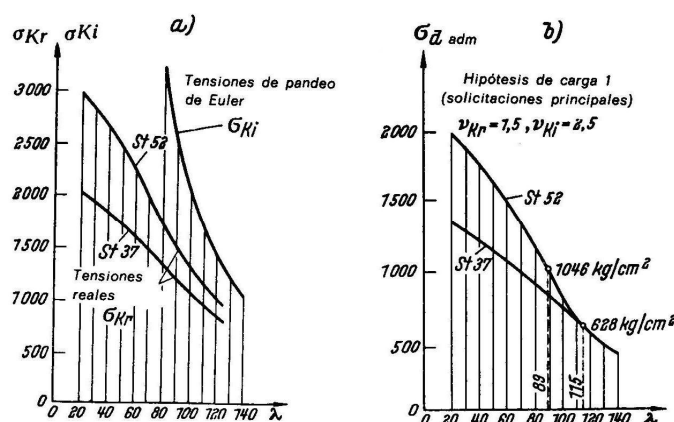


Fig. 10.16

Tabla 1

λ	σ_{Kr}		σ_{Ki}	$\sigma_{c adm}$ (hipót. carga 1)	
	St 37	St 52		St 37	St 52
20	2023	2975	–	1349	1983
30	1941	2832	–	1294	1888
40	1845	2659	–	1230	1773
50	1737	2456	–	1158	1637
60	1617	2231	–	1078	1487
70	1489	1995	4230	993	1330
80	1358	1762	3238	905	1175
90	1229	1546	2559	819	1024
100	1107	1354	2073	738	829
110	994	1186	1713	663	685
120	892	1043	1439	576	576
130	–	–	1226	490	490
140	–	–	1057	423	423
150	–	–	921	368	368

10.5.2. MÉTODOS DE PREDIMENSIONAMIENTO

Para dimensionar una pieza sometida a pandeo, primero se predimensiona y luego se verifica que:

$$P \leq \frac{\Omega \cdot \sigma_{adm}}{\omega} \tag{10.49}$$

Para predimensionar se adopta primeramente la forma de la sección, en base a consideraciones técnicas, económicas y comerciales.

² En asignaturas posteriores se estudian las Hipótesis de Carga 1 y 2.

Alternativas para el predimensionamiento:

- Iteraciones sucesivas
- Método Dömke
- Método Directo de la DIN 4114.
- Método Variante de la DIN 4114.

a) Iteraciones sucesivas:

Consiste en adoptar una sección Ω que como mínimo sea:

$$\Omega \geq \frac{P}{\sigma_{adm}}$$

Con dicho valor se recurre a tabla y se elige una sección con lo cual además del área se tiene el radio de inercia (i), que permite calcular $\lambda = S_k / i$ y de tabla $\lambda - \omega$, obtener un valor del coeficiente de pandeo. Se debe verificar que:

$$\sigma = \frac{\omega \cdot P}{\Omega} \leq \sigma_{adm}$$

Si $\sigma > \sigma_{adm}$, o bien si σ es bastante inferior a σ_{adm} , se debe reiniciar el proceso iterativo.

b) Método Dömke:

Para el caso de secciones geoméricamente semejantes se cumple la siguiente relación:

$$\lambda \cdot \sqrt{\omega} = \text{cte.} = \lambda_0$$

Existen tablas $\lambda - \lambda_0$ (pág. 297 del “El Acero en la construcción”) que para el caso de los aceros St37 y St52 vinculan la esbeltez con la relación λ_0 .

El procedimiento consiste en adoptar un valor inicial para ω ; por ejemplo $\omega = 1$. Con este valor se calcula una sección:

$$\Omega_0 = \frac{1 \cdot P}{\sigma_{adm}}$$

Con este dato se va a tabla de perfiles, y se elige el que satisface esta sección, obteniendo un valor de i_0 , para luego calcular:

$$\lambda_0 = \frac{S_k}{i_0}$$

operando

$$\lambda_0 \cdot \sqrt{\omega_0} = \lambda_0 \cdot \sqrt{1} = \lambda_0$$

valor que corresponde en la tabla de pág. 297 del Acero en la construcción a un valor de λ real; con este λ real vamos a tabla $\lambda - \omega$ y se obtiene ω . Con este dato del coeficiente de pandeo, se calcula:

$$\Omega_{nec} = \frac{\omega \cdot P}{\sigma_{adm}}$$

Con este valor entramos en tabla de perfiles y adoptamos uno (Ω' , i')

Corresponde verificar, para ello se determina $\lambda' = S_k / i'$; se recurre a la tabla $\lambda - \omega$, se obtiene un ω' . Se calcula:

$$\sigma = \frac{\omega' \cdot P}{\Omega'} \leq \sigma_{adm}$$

Si $\sigma > \sigma_{adm}$, conviene probar con el perfil inmediato superior. También se puede reiniciar el proceso, tomando como valor inicial el valor ω' y calcular $\lambda_0 = \lambda' \cdot \sqrt{\omega'}$. Si $\sigma \leq \sigma_{adm}$, ese sería el perfil que satisface al problema.

c) Método Directo de la DIN 4114:

Para el caso de secciones semejantes, además de que la expresión $\lambda\sqrt{\omega} = cte.$, también lo es la relación:

$$\Omega / i^2 = cte. = z \quad (\text{coeficiente de forma})$$

$$\zeta = \lambda \cdot \sqrt{\omega} = \frac{S_k}{i} \sqrt{\frac{\sigma_{adm} \cdot \Omega}{P}} = \sqrt{\frac{\Omega}{i^2} \cdot \frac{\sigma_{adm} \cdot (S_k)^2}{P}} = \sqrt{\frac{z \cdot \sigma_{adm} \cdot (S_k)^2}{P}}$$

ζ : característica de la barra

En manuales existen tablas $\zeta - \omega - \lambda$.

Atento a la forma de la sección, en publicaciones específicas figura el valor del coeficiente z (también puede determinarse haciendo el cálculo de la relación $z = \Omega / i^2$)

Conocido el coeficiente ζ , de la tabla respectiva sacamos un valor para ω . Se calcula:

$$\Omega_{nec} = \frac{\omega \cdot P}{\sigma_{adm}}$$

Con la sección necesaria adoptamos un perfil (Ω', i'). Se calcula $\lambda' = S_k / i'$ y de tabla $\lambda - \omega$ se obtiene un valor de ω' ; se verifica entonces que:

$$\sigma = \frac{\omega' \cdot P}{\Omega'} \leq \sigma_{adm}$$

d) Método Variante de la DIN 4114:

Si los perfiles considerados para el dimensionado, por ejemplo los perfiles laminados de una serie, no son semejantes geoméricamente de manera exacta, el procedimiento indicado en el punto c) sólo es aproximado, y su utilidad depende de la correcta evaluación del coeficiente de forma z . En lugar de estimar un valor para z , puede también estimarse directamente el coeficiente de pandeo y en base a este valor (que lo identificaremos como ω^*), calcular una superficie:

$$\Omega_{nec} = \frac{\omega \cdot P}{\sigma_{adm}}$$

De una tabla de perfiles se toma un radio de giro i^* , con el cual se determina la característica de la barra:

$$\zeta = \frac{S_k}{i^*} \cdot \sqrt{\omega^*}$$

A este ζ corresponderá en la tabla $\zeta - \omega$ un valor de coeficiente de pandeo ω , que, en caso de diferir notablemente de ω^* , puede servir como nuevo valor estimado, corregido; pero que, en caso contrario puede emplearse ya para el cálculo de la sección buscada

$$\Omega_{nec} = \frac{\omega \cdot P}{\sigma_{adm}}$$

De tabla de perfiles se obtiene (Ω', i') . Se calcula $\lambda' = S_k = i'$ y de tabla $\lambda - \omega$ se obtiene un valor de ω' ; con el cual debemos verificar:

$$\sigma = \frac{\omega' \cdot P}{\Omega'} \leq \sigma_{adm}$$