# Capítulo 1

# TENSIONES

## 1 - 1 : INTRODUCCIÓN

En el curso desarrollaremos la Teoría de la Elasticidad, y para ello nada mejor que encuadrarla en el campo de la Física Mecánica a la cual pertenece:

Mecánica
- Mecánica de los puntos materiales
- Mecánica de los Cuerpos Rígidos
- Mecánica del continuo
  - Mecánica del sólido
    - Resistencia de Materiales (comportamiento bajo hipótesis simplificativas)
    - Teoría de la Elasticidad (Comportamiento elástico)
    - Teoría de la plasticidad
    - Teoría de la visco-elasticidad y visco-plasticidad
  - Mecánica de los fluidos

De alguna manera en Ingeniería, en sus distintas especialidades y asignaturas, se recorre todo el campo de la Mecánica, ya sea en forma teórica como práctica. Respecto a la Mecánica del Sólido es innecesario referirnos a los temas de Resistencia de Materiales, ya tratados en los cursos de Estabilidad II y III. La Geotecnia y Mecánica de Suelos necesitan conocimientos de Elasticidad, Plasticidad y Viscosidad en sólidos, así como también el estudio de construcciones o elementos donde intervengan acero, hormigón, materiales plásticos, asfaltos, etc.

En el curso nos referiremos a la elasticidad lineal y consideraremos al sólido como un Medio Continuo, aunque en realidad sabemos que está formado por moléculas, con espacios entre ellas, si lo consideramos desde el punto de vista microscópico.

En la Ingeniería Civil y desde una perspectiva macroscópica, podemos considerar que el Material o Sólido cumple con las siguientes Hipótesis simplificativas, que pueden ser, de acuerdo a la experiencia, asumidas como propiedades del sólido en el tratamiento de diferentes problemas:

**a)** **HOMOGENEIDAD**: Esto implica que el material que constituye el cuerpo tiene las mismas características físicas y mecánicas en cualquier punto del medio. Si bien esto no es exactamente cierto, si consideramos la estructura molecular, es aceptable considerar que macroscópicamente los materiales se comportan como homogéneos. Aún el hormigón simple puede ser considerado así, aunque es evidente que no tiene las mismas propiedades en un punto coincidente con el agregado grueso que en otro que esté sobre el mortero aglomerante.

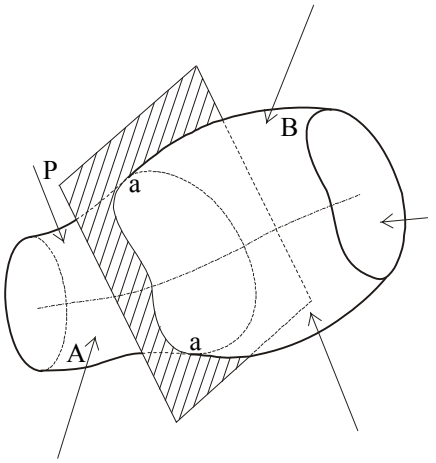
**b)** **ISOTROPIA**: Esta propiedad considera igualdad de características elásticas cualquiera sea la dirección estudiada. Un ejemplo clásico de falta de isotropía (anisotropía) es la madera, en la cual las características físico-mecánicas dependen de la dirección que se considere respecto a las fibras. Ciertos procesos, como el laminado de metales, pueden producir anisotropía.

**c)** **CONTINUIDAD**: El sólido se comporta como un continuo, aunque no lo sea en su estructura microscópica. Esta hipótesis nos permite plantear ecuaciones de

equilibrio y deformaciones, planteando soluciones de funciones continuas a las cuales es aplicable el cálculo diferencial.

**d)** **ELASTICIDAD**: Implica que al aplicar una carga los cuerpos sufren una deformación que desaparece totalmente al retirarse las cargas. Con referencia a la Elasticidad Lineal, o sea cuando los efectos son linealmente proporcionales a las cargas, será aplicable el Principio de superposición.

## 1 - 1 . 1 : CONCEPTO DE TENSIÓN

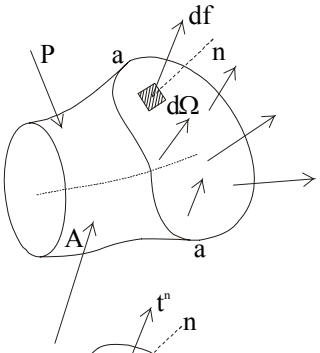



Al solo efecto de refrescar algunos conocimientos recordemos que entendemos por tensión en un medio continuo.

Para ello supongamos un sólido como el de la figura, cargado con fuerzas en equilibrio al cual mediante una sección a-a dividimos en dos sectores A y B.

Aislado el sector A, existirán sobre el las fuerzas P exteriores y una distribución continua de cargas sobre la sección a-a y que en su conjunto deben equilibrar al cuerpo.

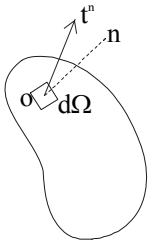
Estas cargas o fuerzas distribuidas sobre la sección a-a no son mas que la acción del sector B sobre el A actuando en la sección dΩ una fuerza df.




Definimos como tensión en el punto O sobre una superficie definida por el versor n.

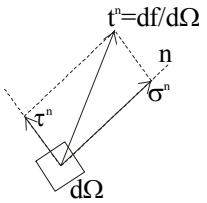
$$t^n = \frac{df}{d\Omega} = \lim_{\Delta\Omega \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta\Omega}$$

siendo su dimensión Fuerza/longitud$^2$.



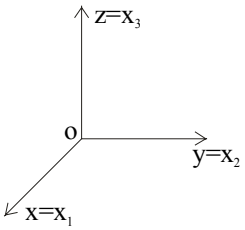

Sea n el versor normal a la superficie dΩ, podemos descomponer el vector tensión en un punto en sus componentes en las direcciones coincidente y normal a n.

Tensión normal: $\sigma^n$ (paralelo a n)
Tensión tangencial $\tau^n$ (normal a n)




Sus características y manejo son conocidas a través de problemas de Estabilidad II y Estabilidad III, entre otras asignaturas de la carrera.

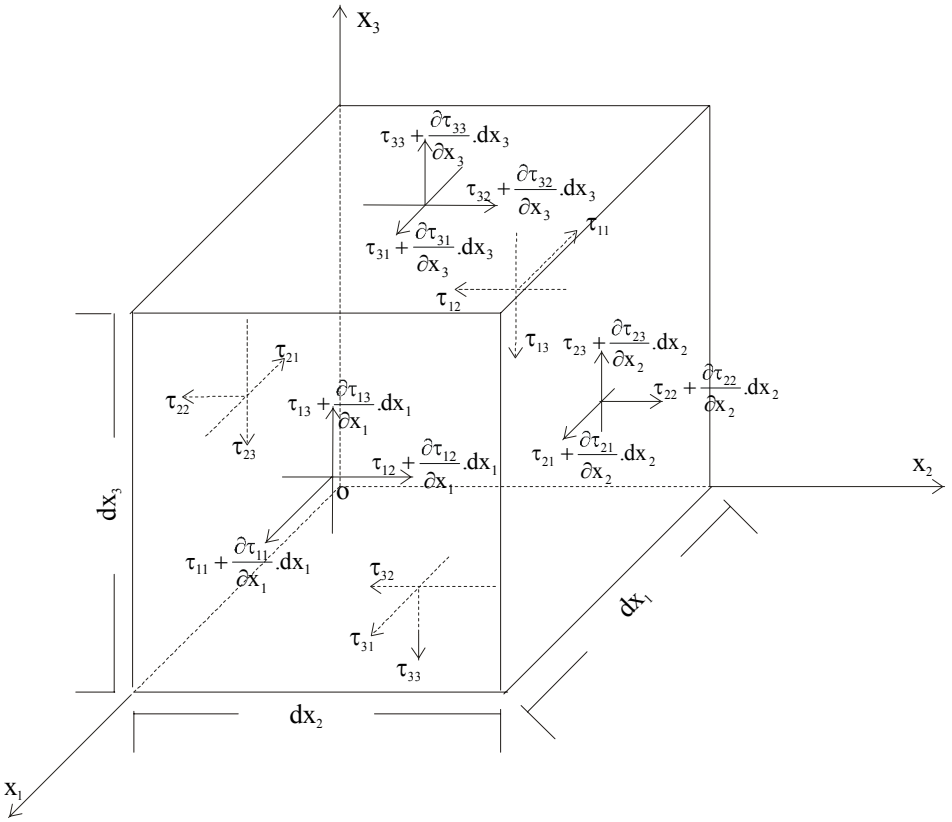
Debemos mencionar que las tensiones no se comportan exactamente como vectores fuerza, aunque tienen alguna de sus características, ya que en realidad las tensiones tienen carácter ***tensorial*** (de 2° orden) y son representadas por ***tensores***.



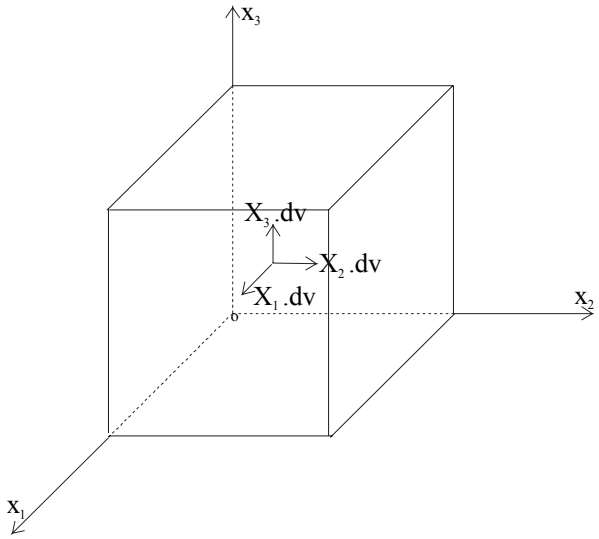

Explicitemos también el sistema de ejes coordenados que utilizaremos, que si bien supone un cambio respecto a los ejes x, y, z, tiene la ventaja de permitir, para aquellos que así lo deseen, la aplicación de la notación indicial. Por esto utilizaremos los ejes $x_1$, $x_2$, $x_3$, equivaliendo con esta nomenclatura: $x \to x_1$ $y \to x_2$ $z \to x_3$

## 1 - 2 : ECUACIONES DE EQUILIBRIO:

Estudiemos el equilibrio de un hexaedro diferencial extraído de un sólido en equilibrio




para ver como varían las tensiones internas. Sobre dicho hexaedro actuarán las tensiones internas $\tau_{ij}$ (que luego veremos componen una matriz T) y que están en la figura acompañadas de las componentes incrementadas. Además actúan las fuerzas de masa por unidad de volumen $X_i = (X_1, X_2, X_3)$ que se señalan en la figura siguiente por simplicidad, y donde el diferencial de volumen es:




$$dv = dx_1.dx_2.dx_3$$

Veamos ahora de plantear las condiciones de equilibrio del elemento

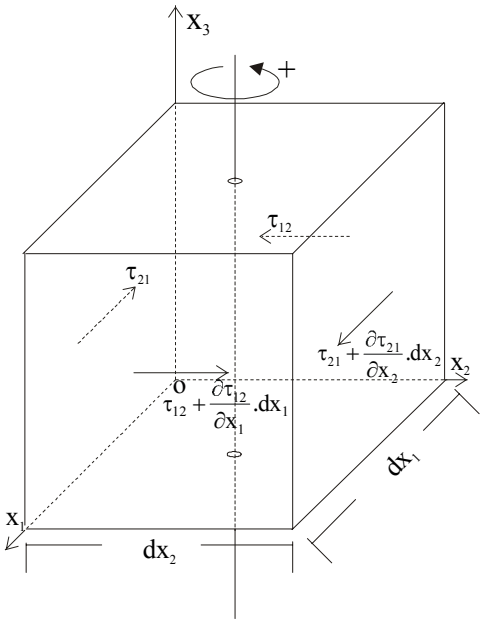
$$\sum_{i=1}^{3} M^{x_i} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{3} F^{x_i} = 0$$

### 1 - 2 . 1 : RECIPROCIDAD DE TENSIONES TANGENCIALES:

Conocido como Teorema de Cauchy, solo deseamos recordar un conocimiento ya adquirido que se obtiene planteando equilibrio de momento respecto a ejes paralelos a los coordenados. Se debe cumplir que:

$$\sum M^{x_1} = 0 \qquad \sum M^{x_2} = 0 \qquad \sum M^{x_3} = 0$$

Planteemos el equilibrio de momento respecto a un eje paralelo a $x_3$ y dibujemos solo las tensiones que producen momentos.




$$-\tau_{21}.(dx_1.dx_3).\frac{dx_2}{2}+\tau_{12}.(dx_2.dx_3).\frac{dx_1}{2}$$

$$-(\tau_{21}+\frac{\partial\tau_{21}}{\partial x_2}dx_2).(dx_1.dx_3).\frac{dx_2}{2}$$

$$+(\tau_{12}+\frac{\partial\tau_{12}}{\partial x_1}dx_1).(dx_2.dx_3).\frac{dx_1}{2}=0$$

$$-\tau_{21}.dx_1.dx_2.dx_3-\frac{1}{2}\frac{\partial\tau_{21}}{\partial x_2}dx_1.dx_2.dx_3.dx_2$$

$$+\tau_{12}.dx_1.dx_2.dx_3+\frac{1}{2}dx_1.dx_2.dx_3.dx_1=0$$

Despreciando el 2° y 4° término por ser infinitésimos de orden superior obtenemos:

$$\tau_{12}=\tau_{21}$$

Análogamente podemos expresar:

$$\tau_{23}=\tau_{32}$$

$$\tau_{13}=\tau_{31}$$

o en forma indicial:

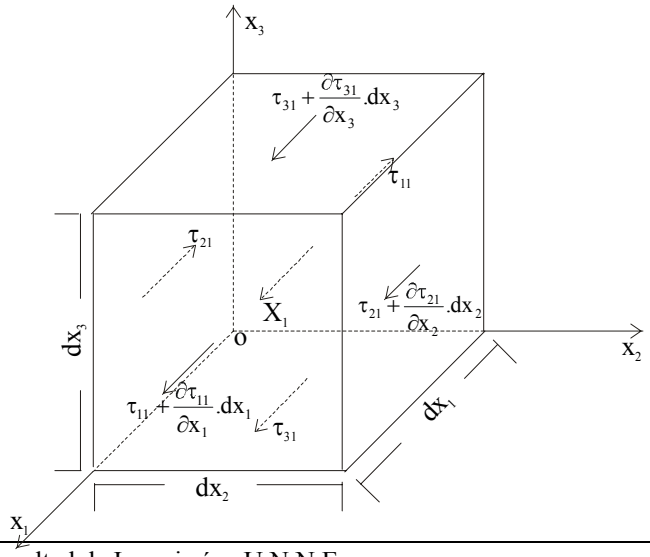
$$\tau_{ij}=\tau_{ji}$$

que es la expresión del Teorema de Cauchy o Ley de reciprocidad de la Tensiones Tangenciales.

Esta ley indica que la matriz del Tensor de Tensiones es simétrica respecto de su diagonal principal.

## 1 - 2 . 2 : <u>ECUACIONES DIFERENCIALES DEL EQUILIBRIO:</u>

Si ahora planteamos el equilibrio de fuerzas según los ejes $x_i$ (nosotros lo plantearemos respecto a $x_1$ y en la figura colocaremos solo las fuerzas que tienen esa dirección), vemos que estas componentes no pueden ser arbitrarias, debiendo cumplir ciertas condiciones, en todos y cada uno de los puntos del sólido continuo.



Del equilibrio $\sum F^{x_1} = 0$

$$(\tau_{11} + \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} dx_1).dx_2.dx_3 - \tau_{11}.dx_2.dx_3 + (\tau_{21} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} dx_2).dx_1.dx_3 - \tau_{21}.dx_1.dx_3 +$$

$$+ (\tau_{31} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} dx_3).dx_1.dx_2 - \tau_{31}.dx_1.dx_2 + X_1.dx_1.dx_2.dx_3 = 0$$

Sumando y simplificando términos obtenemos la 1ra. de las tres siguientes ecuaciones diferenciales, obteniéndose las otras dos en forma análoga:

$$\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} + X_1. = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_3} + X_2. = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3} + X_3. = 0$$

Que son las "Ecuaciones Diferenciales de Equilibrio" que deben ser en general integradas o resueltas cumpliendo además con las "Condiciones de Borde o de Contorno" y asociadas a "Ecuaciones de Compatibilidad de Deformaciones".

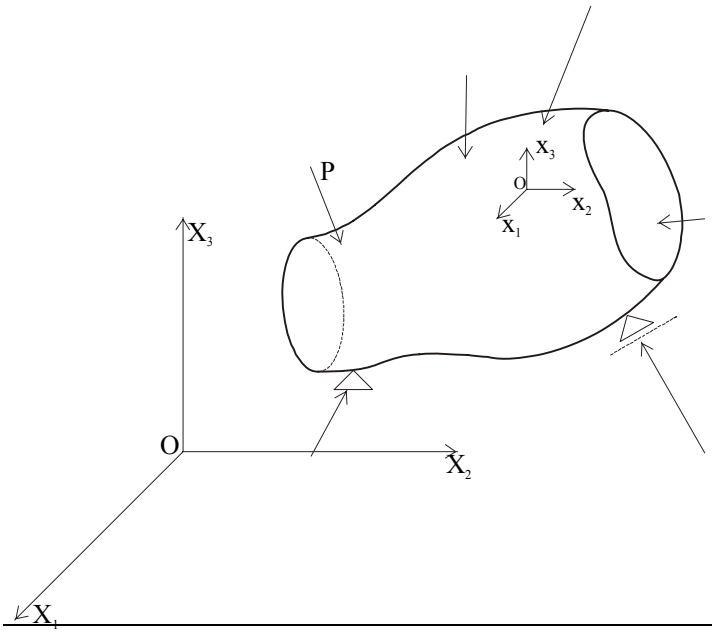
Con notación indicial las mismas se expresan:

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} + X_j = 0 \qquad \text{o bien:} \qquad \tau_{ij,i} + X_j. = 0$$

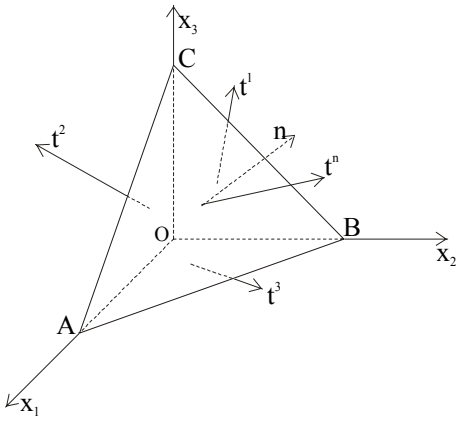
Podemos además decir que las componentes $\tau_{ij}$ del Tensor de Tensiones (simétrico) deben cumplir las tres ecuaciones o condiciones diferenciales que son consecuencia de la continuidad de las distintas tensiones internas a que está sometido el sólido, o sea las $\tau_{ij}$ son funciones continuas de las coordenadas $x_i = (x_1, x_2, x_3)$.

## 1 - 3 : ESTADO DE TENSIONES EN UN PUNTO - MATRIZ DE TENSIONES

Supongamos un sólido sometido a un sistema de fuerzas en equilibrio, el cual produce un estado de tensiones internas que estará asociado a la geometría del cuerpo, a las características elásticas y al estado de cargas entre otras cosas.



En cada punto del cuerpo definido por sus coordenadas $X_1$, $X_2$, $X_3$ tendremos un estado de tensiones y estudiaremos que pasa en un punto genérico $O(X_1, X_2, X_3)$ en el cual aplico un sistema local de ejes ($x_1$; $x_2$; $x_3$). Aislo alrededor del punto O una porción infinitesimal de materia formada por un tetraedro OABC aplicando sobre cada una de las caras la tensión correspondiente a que está sometida:

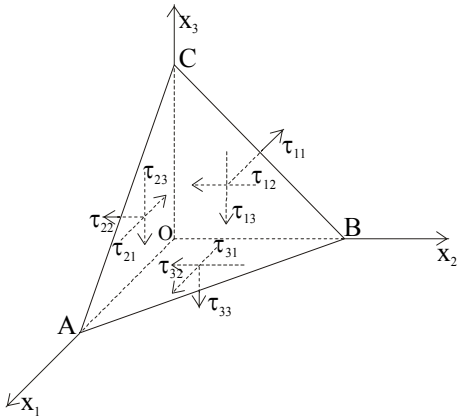


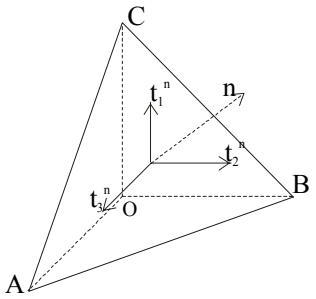

$t^1$ (sobre plano normal a $x_1$)
$t^2$ (sobre plano normal a $x_2$)
$t^3$ (sobre plano normal a $x_3$)
$t^n$ (sobre plano ABC, normal al versor n)

El versor n tiene ángulos ($\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$) y cosenos directores ($n_1$,$n_2$,$n_3$) respecto de los ejes coordenados ($x_1$,$x_2$,$x_3$)

$$n = (n_1,n_2,n_3) = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \cos\alpha_1 = n_1 \\ \cos\alpha_2 = n_2 \\ \cos\alpha_3 = n_3 \end{cases}$$

Si descomponemos las tensiones según los tres ejes coordenados ($x_1$,$x_2$,$x_3$) se obtendrá el siguiente estado de tensiones cuya representación y significado se indica en las figuras siguientes:




$$t^1 = \begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \end{bmatrix} \quad t^2 = \begin{bmatrix} \tau_{21} \\ \tau_{22} \\ \tau_{23} \end{bmatrix} \quad t^3 = \begin{bmatrix} \tau_{31} \\ \tau_{32} \\ \tau_{33} \end{bmatrix} \quad t^n = \begin{bmatrix} t_1^n \\ t_2^n \\ t_3^n \end{bmatrix}$$

Donde podemos apreciar que la $\tau_{ii}$ es una tensión normal equivalente en otra nomenclatura a $\sigma_i$, y las $\tau_{ij}$ con $i \neq j$ representan tensiones tangenciales.

Con las nueve $\tau_{ij}$ actuando sobre los planos coordenados se forma la Matriz de Tensiones.

$$T = (\tau_{ij}) = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix}$$

que como hemos visto en 1-2.1 por ser $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ una matriz simétrica y por lo tanto $T = T^T$

Denominando con:

$d\Omega$ = superficie ABC

| | | |
|---|---|---|
| $d\Omega_1$ = superficie OBC | $d\Omega_1 = n_1.d\Omega$ | $d\Omega_1 / d\Omega = n_1$ |
| $d\Omega_2$ = superficie OAC | $d\Omega_2 = n_2.d\Omega$ | $d\Omega_2 / d\Omega = n_2$ |
| $d\Omega_3$ = superficie OAB | $d\Omega_3 = n_3.d\Omega$ | $d\Omega_3 / d\Omega = n_3$ |

Planteando equilibrio de fuerzas según los 3 ejes coordenados:

$$\sum Fx_1 = 0 \Rightarrow t_1^n.d\Omega = \tau_{11}.d\Omega_1 + \tau_{21}.d\Omega_2 + \tau_{31}.d\Omega_3$$

$$\sum Fx_2 = 0 \Rightarrow t_2^n.d\Omega = \tau_{12}.d\Omega_1 + \tau_{22}.d\Omega_2 + \tau_{32}.d\Omega_3$$

$$\sum Fx_3 = 0 \Rightarrow t_3^n.d\Omega = \tau_{13}.d\Omega_1 + \tau_{23}.d\Omega_2 + \tau_{33}.d\Omega_3$$

De donde reemplazando $d\Omega_i / d\Omega$ por $n_i$ :

$$t_1^n = \tau_{11}.n_1 + \tau_{21}.n_2 + \tau_{31}.n_3$$

$$t_2^n = \tau_{12}.n_1 + \tau_{22}.n_2 + \tau_{32}.n_3$$

$$t_3^n = \tau_{13}.n_1 + \tau_{23}.n_2 + \tau_{33}.n_3$$

en Notación Indicial:

$$t_i^n = \tau_{ji}.n_j = \tau_{ij}.n_j$$

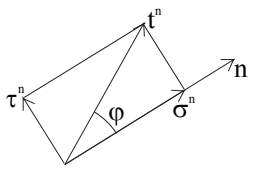
en Notación Matricial:

$$t^n = T^T.n = T.n$$

También podemos señalar:

$$\sigma^n = t^n.n = t^n.\cos\varphi$$

$$\tau^n = t^n - \sigma^n = t^n.\operatorname{sen}\varphi$$




Lo cual nos indica que dadas las nueve componentes $\tau_{ij}$ de la matriz T (Tensiones normales y tangenciales sobre los 3 planos coordenados) queda perfectamente definido el vector tensión en un punto $t^n$ para cualquier dirección genérica n del plano $d\Omega$ (que no es mas que la tercera ley de Newton o segundo postulado de Cauchy).

La matriz T que define el estado de tensiones en el punto estudiado, también representa al denominado "tensor de Tensiones" ya que sus componentes cumplen con las condiciones que definen al tensor cartesiano de 2do. orden.

A modo de utilizar algunas ventajas operativas del cálculo matricial y como ejemplo de su aplicación demostremos que las componentes de T cumplen con las condiciones de ser un tensor de 2do orden, por lo cual bajo una rotación definida por la matriz A se deberá cumplir que:

$$T' = A.T.A^T \qquad t'_{ij} = a_{ih}.a_{jk}.t_{hk}$$

Veamoslo:

$t^n = T.n$ $\quad t^{n\prime} = T'.n'$ $\quad n' = A.n$ $\quad n = A^T.n'$ $\quad$ pues: $A^T = A^{-1}$

$t^{n\prime} = A.t^n = A.T.n = A.T.A^T.n' = T'.n'$

$\therefore\ T' = A.T.A^T$

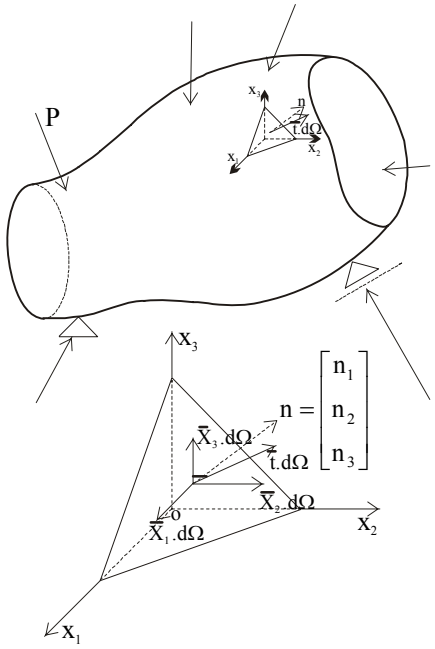
que es lo que debíamos demostrar, con lo cual podemos afirmar que el Estado de Tensiones tiene carácter Tensorial (Ver 0-5.1.7).

## 1 - 3 . 1 : CONDICIONES DE BORDE EN TENSIONES:

Hemos mencionado que el estado de tensiones debe cumplir con las condiciones o Ecuaciones de Equilibrio pero que en los bordes deben también cumplir con ciertas condiciones (nuevamente, la tercer ley de Newton, o sea, acción y reacción).

Una de las cuales es que las partículas de la superficie también deben estar en equilibrio.

Como en la superficie exterior actúan cargas por unidad de superficie, actuará $\overline{t} = \begin{bmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \\ \overline{X}_3 \end{bmatrix}$ sobre la superficie diferencial dΩ de la figura, pues pertenece a la superficie exterior o borde del cuerpo.



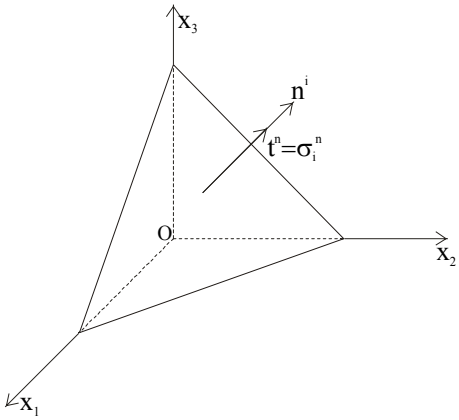

Sobre los planos coordenados están actuando las $\tau_{ij}$, componentes del Tensor de Tensiones T.

Del equilibrio planteado en forma similar a (1-2.2), donde en lugar de la tensión interna $t^n$ actúa la carga externa $\overline{t}$, obtenemos:

$$\overline{X}_1 = \tau_{11}.n_1 + \tau_{21}.n_2 + \tau_{31}.n_3$$
$$\overline{X}_2 = \tau_{21}.n_1 + \tau_{22}.n_2 + \tau_{32}.n_3$$
$$\overline{X}_3 = \tau_{31}.n_1 + \tau_{32}.n_2 + \tau_{33}.n_3$$

Estas son las Condiciones de Borde y deben ser cumplidas necesariamente por las $\tau_{ij}$ en los bordes de aquellas soluciones que se obtengan de las Ecuaciones Diferenciales del Equilibrio.

## 1 - 4 : DIRECCIONES Y TENSIONES PRINCIPALES:




Definiremos como Direcciones Principales a las direcciones tales que la tensión $t^n$ coincide con el versor $n^i$, y por lo tanto con la tensión normal $\sigma_i^n$, y por lo tanto $\tau_i^n = 0$.

Es posible demostrar que para las direcciones principales las tensiones normales $\sigma^n$ pasan por los valores máximos o mínimos, denominándose a dichas tensiones con el nombre de Tensiones Principales.

Sea un estado de tensiones representado por

$$T = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} = T^T$$

Donde tenemos una dirección principal $n^i$ para la cual $t^n = \sigma_i^n$.

Será entonces $t^n = \sigma_i^n.n^i$ $\sigma_i^n$ = escalar

Y además $t^n = T.n^i$ $t^n = T^T.n^i$

De donde $T.n^i = \sigma_i^n .n^i$

Donde recordando la Matriz Unidad

$$\left[\delta_{ij}\right] = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

se puede escribir: $(T - \sigma_i^n .I).n^i = 0$

que desarrollada es:

$$(\tau_{11} - \sigma_i^n).n_1^i + \tau_{21}.n_2^i + \tau_{31}.n_3^i = 0$$
$$\tau_{12}.n_1^i + (\tau_{22} - \sigma_i^n).n_2^i + \tau_{32}.n_3^i = 0$$
$$\tau_{13}.n_1^i + \tau_{23}.n_2^i + (\tau_{33} - \sigma_i^n).n_3^i = 0$$

Si tomamos como incógnita la dirección principal $n^i = \begin{bmatrix} n_1^i \\ n_2^i \\ n_3^i \end{bmatrix}$, este es un sistema de 3 ecuaciones homogéneas donde la solución trivial es $n_1^i = n_2^i = n_3^i = 0$ que es una solución extraña ya que por ser cosenos directores $(n_1^i)^2 + (n_2^i)^2 + (n_3^i)^2 = 1$.

Para que exista otra solución se debe cumplir con la condición de que el determinante de los coeficientes sea nulo (Roche-Frobenius).

$$\begin{vmatrix} (\tau_{11} - \sigma_i^n) & \tau_{21} & \tau_{31} \\ \tau_{12} & (\tau_{22} - \sigma_i^n) & \tau_{32} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & (\tau_{33} - \sigma_i^n) \end{vmatrix} = 0$$

Determinante que desarrollado es una ecuación de tercer grado en la tensión principal $\sigma_i^n$ que se denomina "Ecuación Característica o Secular" con $\sigma_i^n$ las raíces de dicha ecuación:

$$(\sigma_i^n)^3 - I_1.(\sigma_i^n)^2 + I_2.(\sigma_i^n) - I_3 = 0$$

Donde al ser constante el coeficiente que multiplica a $(\sigma_i^n)^3$ y siendo el valor de las tensiones principales $\sigma_i^n$ independientes del sistema de ejes adoptados, serán también constantes los coeficientes $I_1$, $I_2$, $I_3$ denominándose "Invariantes".

$I_1 = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} = \tau_{ii}$ invariante lineal o de 1er. Grado

$$I_2 = \tau_{11}.\tau_{22} + \tau_{22}.\tau_{33} + \tau_{33}.\tau_{11} - \tau_{12}^2 - \tau_{23}^2 - \tau_{31}^2 = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{21} \\ \tau_{12} & \tau_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_{22} & \tau_{32} \\ \tau_{23} & \tau_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_{33} & \tau_{13} \\ \tau_{31} & \tau_{11} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}.(\tau_{ii}.\tau_{jj} - \tau_{ij}.\tau_{ji})$$ invariante cuadrático de 2do. grado

$$I_3 = |T| = \begin{vmatrix} \tau_{11} & \tau_{21} & \tau_{31} \\ \tau_{12} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \tau_{33} \end{vmatrix} = \det(\tau_{ij})$$ invariante de 3er, grado

La ecuación secular tiene 3 raíces en general $\sigma_i^n$ (i=1, 2, 3) que se puede demostrar que son reales y que representan los valores de las tensiones principales (Tensiones normales en planos con tensiones tangenciales nulas).

A dichas tensiones principales las denominaremos con: $\sigma_1^n$, $\sigma_2^n$, $\sigma_3^n$, o $t_{(1)}$, $t_{(2)}$, $t_{(3)}$.

Reemplazada $\sigma_i^n$ en el sistema $(T-\sigma_i^n.I).n^i = 0$ al cual si se le adiciona $(n_1^i)^2 + (n_2^i)^2 + (n_3^i)^2 = 1$ obtendremos la dirección principal

$$n^1 = \begin{bmatrix} n_1^1 \\ n_2^1 \\ n_3^1 \end{bmatrix} = (n_1^1, n_2^1, n_3^1)$$

Lo mismo para $\sigma_2^n$ => $n^2$, y para $\sigma_3^n$ => $n^3$

Es posible demostrar que las tres direcciones $n^i$ son normales entre sí, y por lo tanto se cumplirá:

$$n_1^i.n_1^j + n_2^i.n_2^j + n_3^i.n_3^j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

En general, y a fin de dar un orden a las tensiones principales, las mismas se ordenarán:

$$\sigma_1^n \geq \sigma_2^n \geq \sigma_3^n$$

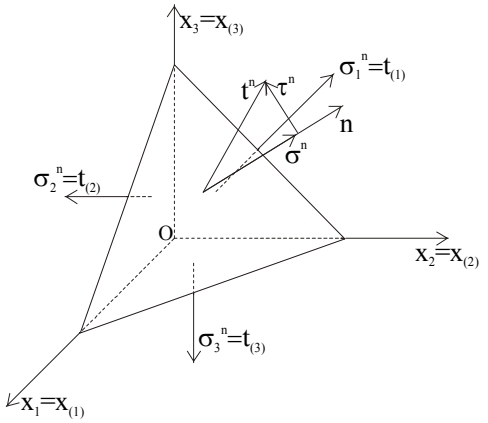
cumpliéndose, salvo casos especiales, que:

$$\sigma_1^n > \sigma_2^n > \sigma_3^n$$

## 1 - 4 . 1 : EL TENSOR DE TENSIONES REFERIDO A EJES PRINCIPALES:

Referenciemos la Matriz de Tensiones respecto de ejes $x_1$; $x_2$; $x_3$ coincidentes con las direcciones principales. Denominaremos también a estos ejes con $x_{(1)}$; $x_{(2)}$; $x_{(3)}$

La matriz de Tensiones referida a los ejes principales será:




$$T = \begin{bmatrix} \sigma_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & t_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & t_{(3)} \end{bmatrix}$$

$$t^n = T.n = \begin{bmatrix} t_1^n \\ t_2^n \\ t_3^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^n.n_1 \\ \sigma_2^n.n_2 \\ \sigma_3^n.n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{(1)}.n_1 \\ t_{(2)}.n_2 \\ t_{(3)}.n_3 \end{bmatrix}$$

$$\sigma^n = t^n.n$$

y $$\sigma^n = \sigma_1^n.n_1^2 + \sigma_2^n.n_2^2 + \sigma_3^n.n_3^2 = t_{(1)}.n_1^2 + t_{(2)}.n_2^2 + t_{(3)}.n_3^2$$

$$t_n^2 = \sigma_1^{n\,2}.n_1^2 + \sigma_2^{n\,2}.n_2^2 + \sigma_3^{n\,2}.n_3^2 = t_{(1)}^2.n_1^2 + t_{(2)}^2.n_2^2 + t_{(3)}^2.n_3^2$$

Mientras los invariantes valdrán:

$$I_1 = \sigma_1^n + \sigma_2^n + \sigma_3^n = t_{(1)} + t_{(2)} + t_{(3)}$$

$$I_2 = \sigma_{(1)}^n.\sigma_{(2)}^n + \sigma_{(2)}^n.\sigma_{(3)}^n + \sigma_{(3)}^n.\sigma_{(1)}^n = t_{(1)}.t_{(2)} + t_{(2)}.t_{(3)} + t_{(3)}.t_{(1)}$$

$$I_3 = \sigma_1^n.\sigma_2^n.\sigma_3^n$$

Por último calcularemos el valor de $\tau^n$, o $(\tau^n)^2$, referido a ejes principales $x_{(i)}$

$$\tau^n = \sqrt{t_n^2 - \sigma^{n\,2}} = \sqrt{(t_{(1)}^2.n_1^2 + t_{(2)}^2.n_2^2 + t_{(3)}^2.n_3^2) - (t_{(1)}.n_1^2 + t_{(2)}.n_2^2 + t_{(3)}.n_3^2)^2}$$

Donde:

$$\left(\tau^n\right)^2 = (t_{(1)}^2.n_1^2 + t_{(2)}^2.n_2^2 + t_{(3)}^2.n_3^2) - (t_{(1)}^2.n_1^4 + t_{(2)}^2.n_2^4 + t_{(3)}^2.n_3^4 +$$

$$+ 2.t_{(1)}.t_{(2)}.n_1^2 n_2^2 + 2.t_{(2)}.t_{(3)}.n_2^2 n_3^2 + 2.t_{(3)}.t_{(1)}.n_3^2 n_1^2)$$

$$\left(\tau^n\right)^2 = (t_{(1)}^2 - t_{(1)}^2.n_1^2 - 2.t_{(1)}.t_{(2)}.n_2^2).n_1^2 + (t_{(2)}^2 - t_{(2)}^2.n_2^2 - 2.t_{(2)}.t_{(3)}.n_3^2).n_2^2 +$$

$$+ (t_{(3)}^2 - t_{(3)}^2.n_3^2 - 2.t_{(3)}.t_{(1)}.n_1^2).n_3^2$$

Como: $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$

Será $(1 - n_1^2) = n_2^2 + n_3^2$ ; $(1 - n_2^2) = n_3^2 + n_1^2$ ; $(1 - n_3^2) = n_1^2 + n_2^2$

$$\left(\tau^n\right)^2 = [t_{(1)}^2.(n_2^2 + n_3^2) - 2.t_{(1)}.t_{(2)}.n_2^2].n_1^2 + [t_{(2)}^2.(n_3^2 + n_1^2) - 2.t_{(2)}.t_{(3)}.n_3^2].n_2^2 +$$

$$+ [t_{(3)}^2.(n_1^2 + n_2^2) - 2.t_{(3)}.t_{(1)}.n_1^2].n_3^2$$

$$\left(\tau^n\right)^2 = (t_{(1)} - t_{(2)})^2.n_1^2.n_2^2 + (t_{(2)} - t_{(3)})^2.n_2^2.n_3^2 + (t_{(3)} - t_{(1)})^2.n_3^2.n_1^2$$

$$\tau^n = \sqrt{(t_{(1)} - t_{(2)})^2.n_1^2.n_2^2 + (t_{(2)} - t_{(3)})^2.n_2^2.n_3^2 + (t_{(3)} - t_{(1)})^2.n_3^2.n_1^2}$$

que nos dá la tensión tangencial para un plano de dirección ($n_1$, $n_2$, $n_3$) cuando los ejes de referencia son principales.

## 1 - 4 . 2 : <u>TENSIONES TANGENCIALES MÁXIMAS Y MÍNIMAS:</u>

En las tensiones tangenciales en general el signo no tiene un significado físico especial, sino que surge de una convención, por lo cual nos interesarán los valores absolutos Máximos y Mínimos. Sabiendo entonces que serán Máximos y/o Mínimos los valores absolutos de $\tau^n$ cuando también lo sea $(\tau^n)^2$. Estudiaremos esta última partiendo de

$$(\tau^n)^2 = t_{(1)}^2.n_1^2 + t_{(2)}^2.n_2^2 + t_{(3)}^2.n_3^2 - (t_{(1)}.n_1^2 + t_{(2)}.n_2^2 + t_{(3)}.n_3^2)^2$$

donde teniendo en cuenta que: $n_3^2 = 1 - n_1^2 - n_2^2$

será:

$$(\tau^n)^2 = t_{(1)}.n_1^2 + t_{(2)}.n_2^2 + t_{(3)}.(1 - n_1^2 - n_2^2) - [t_{(1)}.n_1^2 + t_{(2)}.n_2^2 + t_{(3)}.(1 - n_1^2 - n_2^2)]^2$$

$$(\tau^n)^2 = n_1^2.(t_{(1)}^2 - t_{(3)}^2) + n_2^2.(t_{(2)}^2 - t_{(3)}^2) + t_{(3)}^2 - [(t_{(1)} - t_{(3)}).n_1^2 + (t_{(2)} - t_{(3)}).n_2^2 + t_{(3)}]^2$$

Donde para que sea Máximo o Mínimo $(\tau^n)^2$ se debe cumplir:

$$\frac{\partial(\tau^n)^2}{\partial n_1} = 0 \qquad \frac{\partial(\tau^n)^2}{\partial n_2} = 0$$

y asumiendo que $t_{(1)} > t_{(2)} > t_{(3)}$, con $t_{(1)} \neq t_{(3)}$ y $t_{(2)} \neq t_{(3)}$, será:

$$\frac{\partial(\tau^n)^2}{\partial n_1} = 2.n_1.(t_{(1)}^2 - t_{(3)}^2) - 2.[(t_{(1)} - t_{(3)}).n_1^2 + (t_{(2)} - t_{(3)}).n_2^2 + t_{(3)}].2.n_1.(t_{(1)} - t_{(3)}) = 0$$

$$n_1.[(t_{(1)} + t_{(3)}) - 2.(t_{(1)} - t_{(3)}).n_1^2 - 2.(t_{(2)} - t_{(3)}).n_2^2 - 2.t_{(3)}] = 0$$

(a) $$n_1.[(t_{(1)} - t_{(3)}).n_1^2 + (t_{(2)} - t_{(3)}).n_2^2 - \frac{1}{2}.(t_{(1)} - t_{(3)})] = 0$$

Análogamente para $\frac{\partial(\tau^n)^2}{\partial n_2} = 0$:

(b) $$n_2.[(t_{(1)} - t_{(3)}).n_1^2 + (t_{(2)} - t_{(3)}).n_2^2 - \frac{1}{2}.(t_{(2)} - t_{(3)})] = 0$$

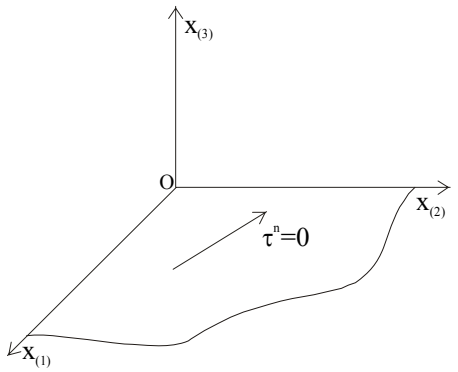
Par de ecuaciones en $n_1$ y $n_2$ que al adicionarle:

(c) $n_3^2 = 1 - n_1^2 - n_2^2$

nos permite calcular la dirección del plano ($n_1$, $n_2$, $n_3$) sobre el cual actúan los ($\tau^n$) Máximos o Mínimos en valor absoluto.

Analicemos las distintas soluciones:

1ra Solución:




De (a) y (b) $n_1 = 0$ $n_2 = 0$

de (c) $n_3 = \pm 1$

=> $\alpha_1 = 90°$ $\alpha_2 = 90°$ $\alpha_3 = 0°$

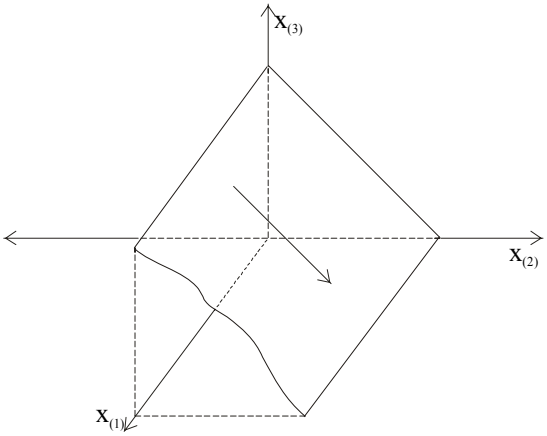
Dirección coincidente con el eje $x_{(3)}$ coordenado (o con $-x_{(3)}$) y por lo tanto en el plano coordenado "$x_{(1)}$ $x_{(2)}$" principal y por lo tanto ($\tau^n$) = 0 (Mínimo).

Esto puede verificarse en la expresión:

$$\tau^n = \pm\sqrt{(t_{(1)} - t_{(2)})^2.n_1^2.n_2^2 + (t_{(2)} - t_{(3)})^2.n_2^2.n_3^2 + (t_{(3)} - t_{(1)})^2.n_3^2.n_1^2}$$

al reemplazar: $n_1 = 0$, $n_2 = 0$, $n_3 = 1$

2da Solución:




En (a) $n_1 = 0$ $\alpha_1 = 90°$

En (b) $n_2 \neq 0$

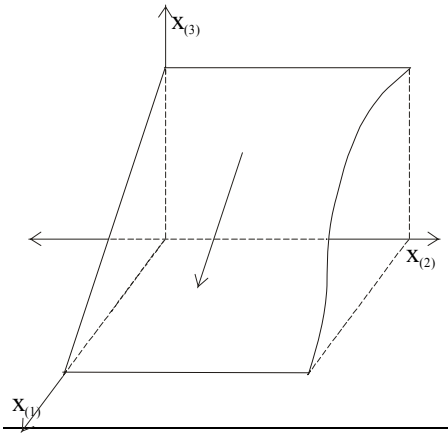
$$\therefore (t_{(2)} - t_{(3)}).n_2^2 - \frac{1}{2}.(t_{(2)} - t_{(3)}) = 0$$

$n_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ => $\alpha_2 = \pm 45°$; $\alpha_2 = \pm 135°$

De (c) $n_3 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ =>$\alpha_3 = \pm 45°$; $\alpha_3 = \pm 135°$

$(\tau^n) = \pm\frac{(t_{(2)} - t_{(3)})}{2}$ (Máximo)

3ra Solución:




En (b) $n_2 = 0$ $\alpha_2 = 90°$

En (a) $n_1 \neq 0$

$$\therefore (t_{(1)} - t_{(3)}).n_1^2 - \frac{1}{2}.(t_{(1)} - t_{(3)}) = 0$$

$n_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ => $\alpha_1 = \pm 45°$; $\alpha_1 = \pm 135°$

De (c) $n_3 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ =>$\alpha_3 = \pm 45°$; $\alpha_3 = \pm 135°$

$(\tau^n) = \pm\frac{(t_{(3)} - t_{(1)})}{2}$ (Máximo)

Variando las soluciones con + o – se van dando los otros planos normales.

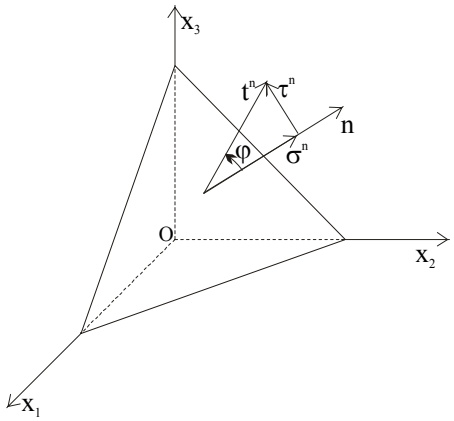
Con planteos similares pero partiendo de : $n_2^2 = 1 - n_1^2 - n_3^2$ o de: $n_1^2 = 1 - n_2^2 - n_3^2$ obtendríamos otras soluciones que se podrían analizar como ejercitación y donde en definitiva aparecerán: $(\tau^n) = 0$ Mínimo sobre los planos principales, y a 45° de los ejes $(\tau^n)$ Máximos.

$$(\tau^n) = \pm \frac{(\mathbf{t}_{(3)} - \mathbf{t}_{(1)})}{2}$$

$$(\tau^n) = \pm \frac{(t_{(2)} - t_{(3)})}{2}$$

$$(\tau^n) = \pm \frac{(t_{(1)} - t_{(2)})}{2}$$

## 1 - 5 : FORMA BILINEAL DEL TENSOR DE TENSIONES Y CUÁDRICA INDICATRIZ (DE CAUCHY).




Con anterioridad sobre la superficie dΩ habíamos hallado $t^n = T.n$

Donde será: $\sigma^n = t^n.\cos\varphi$

$$\tau^n = t^n.\text{sen}\,\varphi = \sqrt{(t^n)^2 - (\sigma^n)^2}$$

Si trabajamos en forma vectorial:

$$\sigma^n = t^n.n = t_1^n.n_1 + t_2^n.n_2 + t_3^n.n_3$$

que desarrollada nos da:

$$\sigma^n = \tau_{11}.n_1^2 + \tau_{22}.n_2^2 + \tau_{33}.n_3^2 + 2.\tau_{12}.n_1.n_2 + 2.\tau_{23}.n_2.n_3 + 2.\tau_{31}.n_3.n_1$$

expresión denominada “forma bilineal del Tensor de Tensiones”. Es inmediato que el valor de la tensión normal $\sigma^n$ de esta expresión puede ser expresada matricialmente por:

$$\sigma^n = t^{n^T}.n = n^T.T^T.n = n^T.T.n$$

Debemos hacer notar que tanto $\sigma^n$, $\tau^n$ y $t^n$ varían al variar n que define la dirección del plano dΩ, pero que una vez fijada en el espacio la dirección del plano n, los referidos valores no varían al variar los ejes coordenados que se toman como base.

Volviendo a la expresión:

$$\sigma^n = \tau_{11}.n_1^2 + \tau_{22}.n_2^2 + \tau_{33}.n_3^2 + 2.\tau_{12}.n_1.n_2 + 2.\tau_{23}.n_2.n_3 + 2.\tau_{31}.n_3.n_1$$

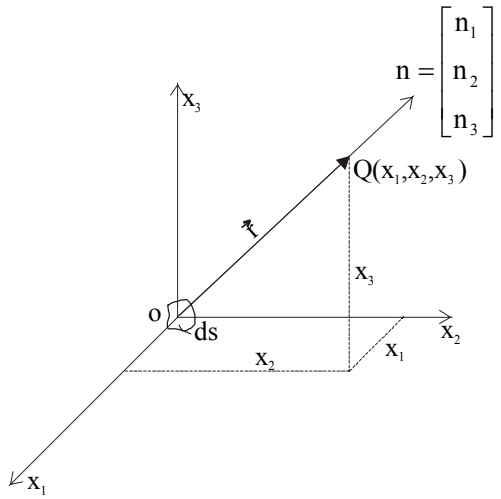
que en notación indicial se escribe:

$$\sigma^n = \tau_{ij}.n_i.n_j$$

Trataremos de representar de alguna manera la variación del valor de $\sigma^n$ al variar la dirección del plano n.

Fijemos los ejes coordenados $x_1$ $x_2$ $x_3$ y definamos sobre la dirección n un punto Q tal que se cumpla:

$$OQ = r = \frac{k}{\sqrt{|\sigma^n|}} \qquad k = \text{constante positiva}$$




Las coordenadas de Q, extremo de r, serán:

$$x_1 = r.n_1 \qquad x_2 = r.n_2 \qquad x_3 = r.n_3$$

$$n_1 = \frac{x_1}{r} \qquad n_2 = \frac{x_2}{r} \qquad n_3 = \frac{x_3}{r}$$

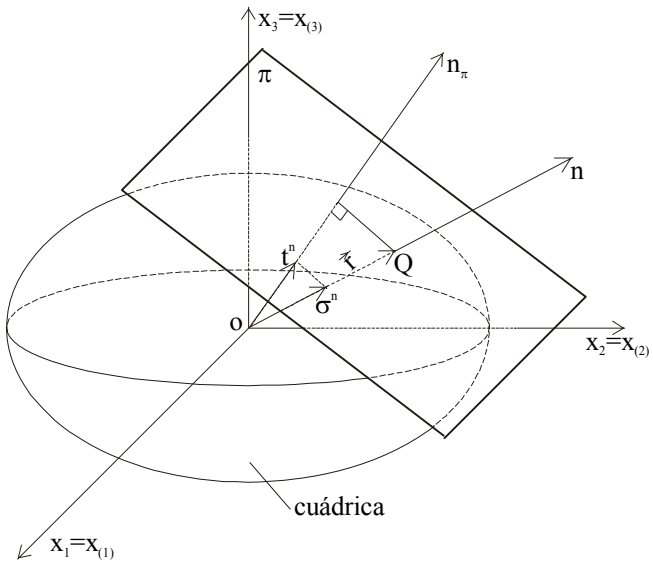
y como $\quad r^2 = \dfrac{k^2}{|\sigma^n|} \qquad |\sigma^n|.r^2 = k^2$

$$\therefore \sigma^n.r^2 = \pm k^2$$

Reemplazando $n_1$, $n_2$, $n_3$ en la forma bilineal y simplificando:

$$\tau_{11}.x_1^2 + \tau_{22}.x_2^2 + \tau_{33}.x_3^2 + 2.\tau_{12}.x_1.x_2 + 2.\tau_{23}.x_2.x_3 + 2.\tau_{31}.x_3.x_1 = \pm k^2$$

Expresión cuadrática, lugar geométrico de los extremos $Q(x_1,x_2,x_3)$ que representa una "Cuádrica" en el espacio referido a los ejes $x_1$ $x_2$ $x_3$ que no es mas que una superficie de 2° grado, así como en el espacio de dos dimensiones ($x_1$ $x_2$) o sea en el plano, la expresión cuadrática representa una cónica.




Si referimos esto a las direcciones principales la ecuación de la cuádrica estaría dada por:

$$t_{(1)}.x_1^2 + t_{(2)}.x_2^2 + t_{(3)}.x_3^2 = \pm k^2$$

donde $t_{(i)}$ son las tensiones principales.

Se cumplirá que: $\overline{OQ} = r = \dfrac{k}{\sqrt{|\sigma^n|}}$

es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del valor absoluto de $\sigma^n$ y además como r es normal al plano $d\Omega$, la dirección de $\sigma^n$ coincide con la de r.

Es también posible demostrar que el $t^n$ coincide con la dirección que define al plano tangente en Q (plano π) y por lo tanto será:

$$t^n \perp \pi$$

Aclaremos que el plano π ($n_\pi$) define la dirección conjugada de n para la cuádrica característica y que la misma tendrá direcciones principales que coincidirán con las direcciones principales de tensiones.

La bibliografía de la especialidad muestra el tipo de cuádrica que se dá para los distintos casos de tensiones, señalando aquí que pueden ser elipsoides e hiperboloides de revolución o no, esferas, etc.

## 1 - 6 : ELIPSOIDE DE TENSIONES (O DE LAMÉ)

Referimos a ejes ordinarios:

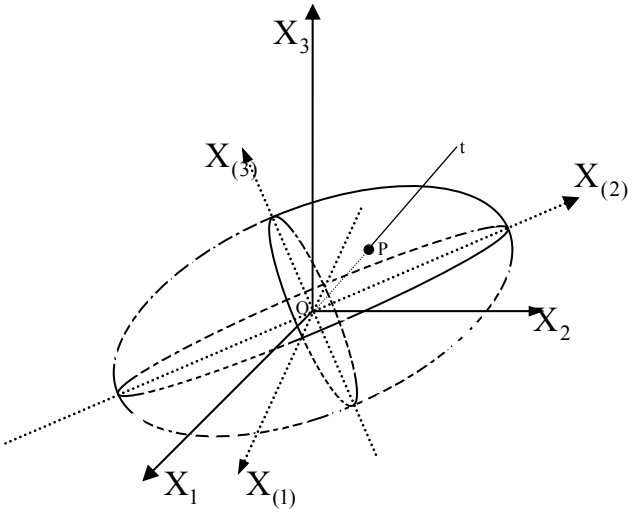
$$t^n = T.n = \begin{cases} t_1^n = \tau_{11}.n_1 + \tau_{21}.n_2 + \tau_{31}.n_3 \\ t_2^n = \tau_{12}.n_1 + \tau_{22}.n_2 + \tau_{32}.n_3 \\ t_3^n = \tau_{13}.n_1 + \tau_{23}.n_2 + \tau_{33}.n_3 \end{cases} \quad \text{y con} \quad n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

Se puede construir una gráfica que, luego de bastante álgebra será:

Será: $$\begin{aligned} &A_{(1)}(t_1^n)^2 + A_{(2)}(t_2^n)^2 + A_{(3)}(t_3^n)^2 + A_{(4)}t_1^n + A_{(5)}t_2^n + \\ &+ A_{(6)}t_3^n + A_{(7)}t_3^n t_1^n + A_{(8)}t_2^n t_1^n + A_{(9)}t_3^n t_2^n + A_{(0)} = 0 \end{aligned}$$

Que en el espacio de tensiones: $x_1 = t_1^n \quad x_2 = t_2^n \qquad x_3 = t_3^n$

$$\begin{aligned} &A_{(1)}x_1^{\,2} + A_{(2)}x_2^{\,2} + A_{(3)}x_3^{\,2} + A_{(4)}x_1. + A_{(5)}x_2 + \\ &+ A_{(6)}x_3 + A_{(7)}x_3.x_1 + A_{(8)}x_2.x_1 + A_{(9)}x_3.x_2 + A_{(0)} = 0 \end{aligned} \quad \text{donde, } A_{(i)} = A_{(i)}(T)$$




Propiedades:

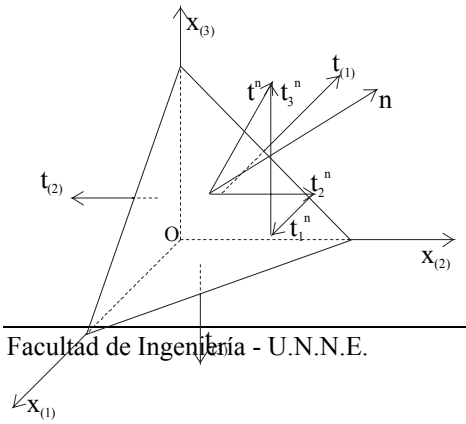
$\overline{OP} = |t_n|$

Los ejes principales del elipsoide son las direcciones principales.

Referido a los ejes principales:

Las constantes antes vistas se transforman: $$A_{(i)} = \begin{cases} 1/t_{(i)}^2 \text{ si } i = 1,2,3 \\ 0 \text{ si } i = 4,..,9 \\ -1 \text{ si } i = 0 \end{cases}$$

Pero, podemos deducir todo de cero:




$$t^n = T.n = \begin{cases} t_1^n = t_{(1)}.n_1 \\ t_2^n = t_{(2)}.n_2 \\ t_3^n = t_{(3)}.n_3 \end{cases}$$

$$n_1 = \frac{t_1^n}{t_{(1)}} \qquad n_2 = \frac{t_2^n}{t_{(2)}} \qquad n_3 = \frac{t_3^n}{t_{(3)}} \qquad \text{y con}$$

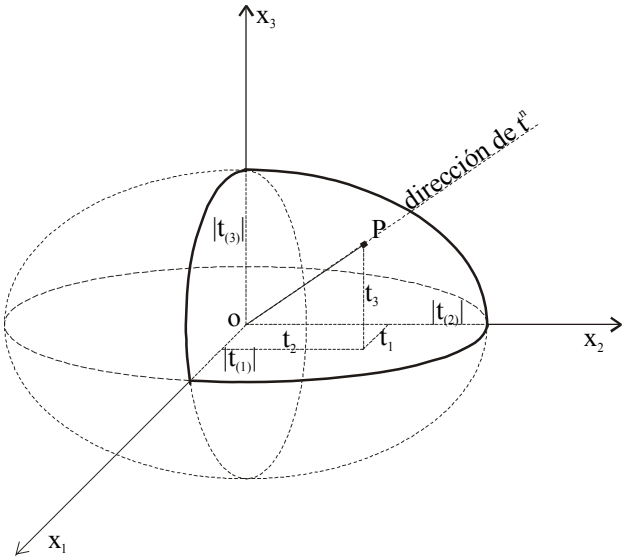
$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

Será: $\dfrac{(t_1^n)^2}{(t_{(1)})^2} + \dfrac{(t_2^n)^2}{(t_{(2)})^2} + \dfrac{(t_3^n)^2}{(t_{(3)})^2} = 1$

Que en el espacio de tensiones: $x_1 = t_1^n \quad x_2 = t_2^n \qquad x_3 = t_3^n$

$$\frac{x_1^2}{t_{(1)}^2} + \frac{x_2^2}{t_{(2)}^2} + \frac{x_3^2}{t_{(3)}^2} = 1$$

Representa un Elipsoide de Tensiones o de Lame cuyos ejes principales son




$|t_{(1)}| \quad |t_{(2)}| \quad |t_{(3)}|$

Siendo:

$$\overline{OP} = |t_n|$$
$$= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{(t_1^n)^2 + (t_2^n)^2 + (t_3^n)^2}$$

El Elipsoide de Tensiones nos dá el valor absoluto de $|t^n|$ y su dirección.

## 1 - 7 : TENSOR ESFÉRICO Y DESVIADOR

Analicemos un estado de tensiones definido por:

$$T = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix}$$

Y el valor de

$$\tau_0 = \frac{1}{3}.(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}) = \frac{1}{3}.(t_{(1)} + t_{(2)} + t_{(3)}) = \frac{I_1}{3} = \frac{1}{3}.\tau_{ii}$$

Dadas las propiedades de los tensores y de las matrices que los representan, es posible pensar a T como la suma de dos tensores que denominaremos:

a) Tensor esférico o hidrostático de tensiones:

$$T_0 = \tau_0.I = \tau_0.\delta_{ij} = \begin{bmatrix} \tau_0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_0 \end{bmatrix}$$

b) Tensor desviador de tensiones:

$$T_d = [S_{ij}] = [\tau_{ij} - \delta_{ij}.\tau_0] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\tau_{11} - \tau_0) & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & (\tau_{22} - \tau_0) & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & (\tau_{33} - \tau_0) \end{bmatrix}$$

Es inmediato que se cumple:

$T = T_0 + T_d$

El tensor esférico tiene una tensión constante sobre las direcciones principales y representa a un estado con una tensión normal uniforme en todas sus direcciones no existiendo tensiones tangenciales en ninguna dirección.

La cuádrica de Cauchy asociada es una esfera donde cualquier dirección es principal. Sus invariantes son:

$$I_{01} = 3.\tau_0 = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}$$

$$I_{02} = 3.\tau_0{}^2 = \frac{1}{3}(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33})^2$$

$$I_{03} = \tau_0{}^3 = \frac{1}{27}(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33})^3$$

El tensor desviador $[S_{ij}]$ tiene sus direcciones principales coinciden con las de $T = [\tau_{ij}]$.

Para las direcciones principales se cumplirá que las tensiones principales serán:

$$S_{(i)} = t_{(i)} - \tau_0$$

siendo sus invariantes:

$$I_{d1} = (\tau_{11} - \tau_0) + (\tau_{22} - \tau_0) + (\tau_{33} - \tau_0) = 0 = (t_{(1)} - \tau_0) + (t_{(2)} - \tau_0) + (t_{(3)} - \tau_0)$$

quedando definida sus tensiones y direcciones principales por:

$$S_{(i)}^3 + I_{d2}.S_{(i)} - I_{d3} = 0$$

$$I_{d2} = S_{11}.S_{22} + S_{22}.S_{33} + S_{33}.S_{11} - (S_{12}{}^2 + S_{23}{}^2 + S_{31}{}^2) =$$

$$= (\tau_{11} - \tau_0).(\tau_{22} - \tau_0) + (\tau_{22} - \tau_0).(\tau_{33} - \tau_0) + (\tau_{33} - \tau_0).(\tau_{11} - \tau_0) - (\tau_{12}{}^2 + \tau_{23}{}^2 + \tau_{31}{}^2) =$$

$$= \frac{1}{9}[(2\tau_{11} - \tau_{22} - \tau_{33}).(2\tau_{22} - \tau_{33} - \tau_{11}) + (2\tau_{22} - \tau_{33} - \tau_{11}).(2\tau_{33} - \tau_{11} - \tau_{22}) +$$

$$+ (2\tau_{33} - \tau_{11} - \tau_{22}).(2\tau_{11} - \tau_{22} - \tau_{33}) - (\tau_{12}{}^2 + \tau_{23}{}^2 + \tau_{31}{}^2)] =$$

$$= \frac{1}{9}[-3\tau_{11}^2 - 3\tau_{22}^2 - 3\tau_{33}^2 + 3\tau_{11}.\tau_{22} + 3\tau_{22}.\tau_{33} + 3\tau_{33}.\tau_{11}] - (\tau_{12}{}^2 + \tau_{23}{}^2 + \tau_{31}{}^2) =$$

$$= -\frac{2}{6}[\tau_{11}^2 + \tau_{22}^2 + \tau_{33}^2 - \tau_{11}.\tau_{22} - \tau_{22}.\tau_{33} - \tau_{33}.\tau_{11}] - (\tau_{12}{}^2 + \tau_{23}{}^2 + \tau_{31}{}^2) =$$

$$= -\frac{1}{6}[\tau_{11}^2 + \tau_{22}^2 - 2\tau_{11}.\tau_{22} + \tau_{22}^2 + \tau_{33}^2 - 2\tau_{22}.\tau_{33} + \tau_{33}^2 + \tau_{11}^2 - 2\tau_{33}.\tau_{11}] - (\tau_{12}{}^2 + \tau_{23}{}^2 + \tau_{31}{}^2)$$

$$I_{d2} = -\frac{1}{6}[(\tau_{11} - \tau_{22})^2 + (\tau_{22} - \tau_{33})^2 + (\tau_{33} - \tau_{11})^2] - (\tau_{12}{}^2 + \tau_{23}{}^2 + \tau_{31}{}^2)$$

$$I_{d3} = (\tau_{11} - \tau_0).(\tau_{22} - \tau_0).(\tau_{33} - \tau_0) + 2.\tau_{12}.\tau_{23}.\tau_{31} -$$

$$- (\tau_{11} - \tau_0).\tau_{23}{}^2 - (\tau_{22} - \tau_0).\tau_{31}{}^2 - (\tau_{33} - \tau_0).\tau_{12}{}^2$$

Referido a direcciones principales:

$$I_{d1} = 0$$

$$I_{d2} = -\frac{1}{6}[(t_{(1)} - t_{(2)})^2 + (t_{(2)} - t_{(3)})^2 + (t_{(3)} - t_{(1)})^2]$$

$$I_{d3} = (\tau_{11} - \tau_0).(\tau_{22} - \tau_0).(\tau_{33} - \tau_0)$$

Respecto de las Cuádricas de Cauchy que analizamos referida a los ejes principales podemos decir:

a) Tensor esférico:

$\tau_0(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = \pm k^2$ que representa una esfera.

b) Tensor desviador:
Siendo

$$I_{d1} = (t_{(1)} - \tau_0) + (t_{(2)} - \tau_0) + (t_{(3)} - \tau_0) = S_{(1)} + S_{(2)} + S_{(3)} = 0$$

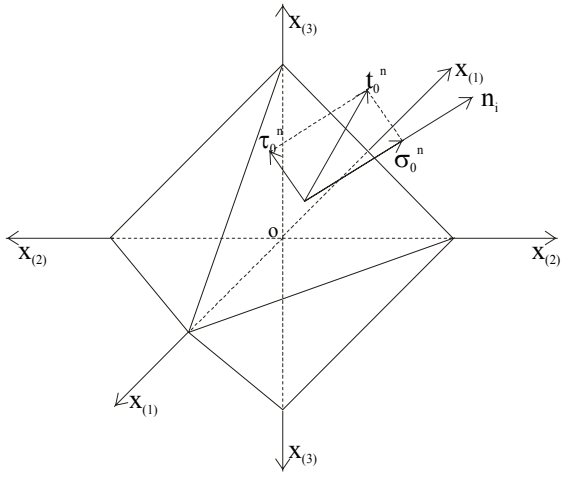
Los 3 $S_{(i)}$ no son del mismo signo pues su suma es igual a cero, lo cual nos indica una cuádrica

$$S_{(1)}.x_1^2 + S_{(2)}.x_2^2 + S_{(3)}.x_3^2 = \pm k^2$$

en la cual se cumple que al no ser los tres $S_{(i)}$ del mismo signo representa un hiperboloide cuyos ejes principales coinciden con los del tensor original T.

## 1 - 8 : TENSOR OCTAÉDRICO:

Analicemos un plano $n_i$ referido a sus ejes principales con:




$$|n_1| = |n_2| = |n_3|$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

$$n_1 = n_2 = n_3 = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sigma_0^n = t_{(1)}.n_1^2 + t_{(2)}.n_2^2 + t_{(3)}.n_3^2 = \frac{1}{3}(t_{(1)} + t_{(2)} + t_{(3)}) = \tau_0$$

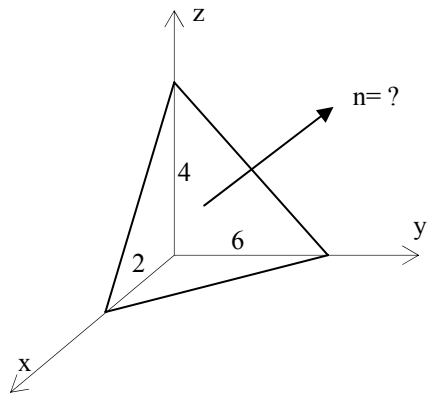
$$\tau_0^n = \sqrt{(t_{(1)} - t_{(2)}).n_1^2.n_2^2 + (t_{(2)} - t_{(3)}).n_2^2.n_3^2 + (t_{(3)} - t_{(1)}).n_3^2.n_1^2}$$

$$\tau_0^n = \pm\frac{1}{3}\sqrt{(t_{(1)} - t_{(2)})^2 + (t_{(2)} - t_{(3)})^2 + (t_{(3)} - t_{(1)})^2}$$

Las ocho caras del octaedro tienen iguales valores absolutos de las tensiones octaédricas.

# Práctico TENSIONES:
## Problemas resueltos

**Problema 1:**




Dado el tensor de tensiones en el punto P.

$$T = \begin{vmatrix} 14 & 7 & -7 \\ 7 & 21 & 0 \\ -7 & 0 & 35 \end{vmatrix}$$

Calcular la tension sobre el plano de la figura:

**Resolución:**

La ecuación del plano es $C_1\ x_1 + C_2\ x_2 + C_3\ x_3 = 1$ , usando los puntos por los que pasa el plano sale que para el plano de la figura:

$$6\ x_1 + 2\ x_2 + 3\ x_3 = 12$$

Para el cálculo de $\vec{n}$, usando 2 vectores cualesquiera del plano

$$\text{Vector } \overrightarrow{EB} = \vec{u} = 0\vec{e_1} - 6\vec{e_2} + 4\vec{e_3}$$

$$\text{Vector } \overrightarrow{GB} = \vec{v} = -2\vec{e_1} + 0\vec{e_2} + 4\vec{e_3}$$

Aplicando producto vectorial, obtendremos un vector normal al plano formado por ambos vectores pertenecientes al plano en estudio.

$$\vec{u}\ x\ \vec{v} = \vec{n'} \quad \Rightarrow \quad \vec{n'} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & -6 & 4 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -24\,\vec{e_1} - 8\vec{e_2} - 12\vec{e_3} \qquad \left|\vec{n'}\right| = 28$$

$$\text{Haciéndolo versor: } n = \frac{\vec{n'}}{\left|\vec{n'}\right|} = -\frac{6}{7}\vec{e_1} - \frac{2}{7}\vec{e_2} - \frac{3}{7}\vec{e_3}$$

Obteniendo de esta manera el versor que representa al plano EGB, pudiendo ahora obtener el vector tensión actuante sobre dicho plano:

$$t^n = T.n = \begin{vmatrix} 14 & 7 & -7 \\ 7 & 21 & 0 \\ -7 & 0 & 35 \end{vmatrix} x \begin{vmatrix} -6/7 \\ -2/7 \\ -3/7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -11 \\ -12 \\ -9 \end{vmatrix} \qquad \vec{t^n} = -11\vec{e_1} - 12\vec{e_2} - 9\vec{e_3}$$

**Problema 2:**

Determinar las componentes de la tensión tangencial sobre el plano del ejercicio anterior.

a) Tensión normal $\sigma^n = \vec{n}^T * \underline{T} * \vec{n} = \dfrac{117}{7}$

b) $$\tau^n = \sqrt{t^{n^2} - \sigma^{n^2}} = \sqrt{346 - \left(117/7\right)^2} = 8.16$$

**Problema 3:**

Dado el tensor de tensiones: $$T = \begin{vmatrix} 3 & -10 & 0 \\ -10 & 0 & 30 \\ 0 & 30 & -27 \end{vmatrix}$$

Calcular:

a) Tensor esférico y desviador.
b) Tensiones principales del tensor desviador.
c) Direcciones principales del tensor desviador, sabiendo que para este sistema de ecuaciones no lineales, las incógnitas $n_1$, $n_2$ y $n_3$ se obtienen:

$$n_1^i = \pm\sqrt{\frac{A_i}{D_i}}; \qquad n_2^i = \pm\sqrt{\frac{B_i}{D_i}}; \qquad n_3^i = \pm\sqrt{\frac{C_i}{D_i}}, \text{ con}$$

$$\left.\begin{aligned} A_i &= \left(\tau_{22} - \sigma_i^n\right) * \left(\tau_{33} - \sigma_i^n\right) - \tau_{23}^2 \\ B_i &= \left(\tau_{11} - \sigma_i^n\right) * \left(\tau_{33} - \sigma_i^n\right) - \tau_{13}^2 \\ C_i &= \left(\tau_{11} - \sigma_i^n\right) * \left(\tau_{22} - \sigma_i^n\right) - \tau_{12}^2 \end{aligned}\right\} \sigma_i^n : \text{Tensión principal}$$

$$D_i = A_i + B_i + C_i$$

**Resolución de a):** $\tau_{ij} = \tau_o\ \delta_{ij} + S_{ij}$ $\qquad \tau_0 = \dfrac{\tau_{kk}}{3} = \dfrac{3 + 0 - 27}{3} = -8$

$$T = \begin{vmatrix} -8 & & \\ & -8 & \\ & & -8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 11 & -10 & 0 \\ -10 & 8 & 30 \\ 0 & 30 & -19 \end{vmatrix}$$

**Resolución de b):** aplicamos sistemas de Laplace: $Id_1 = 0$; $Id_2 = -1273$; $Id_3 = -9672$

Rta: $S1 = 31$ ; $S_2 = 8$ ; $S_3 = -39$

**Resolución de c):** $n^1 = \begin{vmatrix} -0{,}394 \\ 0{,}788 \\ 0{,}473 \end{vmatrix}$ **;** $n^2 = \begin{vmatrix} 0{,}912 \\ 0{,}274 \\ 0{,}304 \end{vmatrix}$ **;** $n^3 = \begin{vmatrix} -0{,}11 \\ -0{,}551 \\ 0{,}827 \end{vmatrix}$

**Problema 4:**

En un medio de continuo, el campo de tensiones está dado por el tensor:

$$T \begin{vmatrix} x_1^2 x_2 & \left(1 - x_2^2\right) x_1 & 0 \\ \left(1 - x_2^2\right) x_1 & \left(x_2^3 - 3x_2\right)/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2x_3^2 \end{vmatrix}$$

Determinar:

a) La distribución de fuerzas másicas si a través de todo el campo se satisfacen las ecuaciones de equilibrio.
b) Las tensiones principales en el punto $P\left(a, 0, 2\sqrt{a}\right)$
c) El corte máximo en P.
d) Las tensiones desviadoras principales en P.

a) Las ecuaciones del equilibrio: $\dfrac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho . b_i = 0$

siendo: $\rho$ : densidad

$b_i$ : fuerza por unidad de masa

$$2x_1x_2 \quad + (-2x_2.x_1) + 0 \quad + \rho\, b_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho\, b_1 = 0$$

$$(1 - x_2^{\,2}) + (x_2^{\,2} - 1) \; + 0 \quad + \rho\, b_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho\, b_2 = 0$$

$$0 \qquad + 0 \qquad + 4x_3 + \rho\, b_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho\, b_3 = -\frac{4}{\rho} x_3$$

b) $$T = \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8a \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \sigma_1 = a \\ \sigma_2 = -a \\ \sigma_3 = 8a \end{matrix}$$

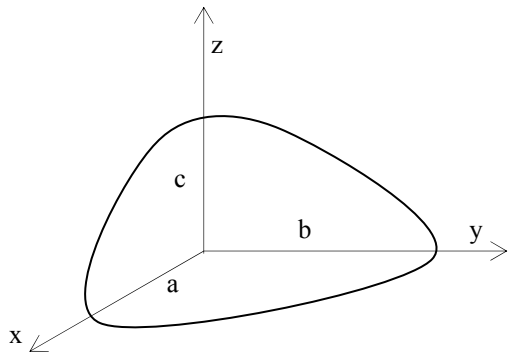
c) Corte máximo: $\tau_{max} = \dfrac{8a - (-a)}{2} = 4{,}5a$

d) A partir de las tensiones ya obtenidas: $\tau_o = \dfrac{8}{3} a$

$$S_1 = a - {}^{8}\!/_{3}\, a = -{}^{5}\!/_{3}\, a$$
$$S_2 = -a - {}^{8}\!/_{3}\, a = -{}^{11}\!/_{3}\, a$$
$$S_3 = 8a - {}^{8}\!/_{3}\, a = -{}^{16}\!/_{3}\, a$$

**Problema 5:**

Dada la cuádrica en ejes principales (de tracción)




a = 3,0
b = 4,.5
c = 5,0

con $\vec{n} = \begin{vmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{vmatrix}$

En un punto P cualquiera, $\sigma = 15$ , r = 4,0

a) Determinar el tensor de tensiones del punto en el que está definido la cuádrica.

b) Si $n_1 = 0{,}5$ ; calcular $n_2$ y $n_3$;( $t_1^n$ , $t_2^n$ , $t_3^n$ componentes del vector tensión total sobre el plano definido por $\vec{n}$ .)

**Resolución punto a)**

como $r^2 = \dfrac{k^2}{|\sigma^n|}$ y conociendo los valores de $|\sigma^n|$ y $r^2$ para el punto P, obtenemos

$$\left|\sigma^n\right|.r^2 = k^2$$

$15.16 = 240 \quad => \quad k = 15.49$

La ecuación de la cuádrica será, por estar en ejes principales:

$$\sigma_1.x_1^2 + \sigma_2.x_2^2 + \sigma_3.x_3^2 = \pm k^2$$

$$\sigma_1.x_1^2 + \sigma_2.x_2^2 + \sigma_3.x_3^2 = \pm 240$$

para obtener los valores de las componentes del tensor de tensiones, estudiamos los valores de la cuádrica sobre los ejes coordenados.

sobre el eje $x_1$

$$\sigma_1.a^2 = \pm 240 \qquad => \qquad \sigma_1 = \frac{240}{a^2} = \frac{240}{9} = 26.66$$

sobre el eje $x_2$

$$\sigma_2.b^2 = \pm 240 \qquad => \qquad \sigma_2 = \frac{240}{b^2} = \frac{240}{20.25} = 11.85$$

sobre el eje $x_3$

$$\sigma_3.c^2 = \pm 240 \qquad => \qquad \sigma_3 = \frac{240}{c^2} = \frac{240}{25} = 9.6$$

quedando por lo tanto el tensor de tensiones:

$$T = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 26.66 & 0 & 0 \\ 0 & 11.85 & 0 \\ 0 & 0 & 9.6 \end{vmatrix}$$

**Resolución punto b)**

Para conocer los valores de los cosenos directores faltantes (teniendo en cuenta que conocemos uno de ellos, los valores de la matriz de tensiones y el valor de la tensión normal en la dirección estudiada) podemos aplicar el siguiente sistema de ecuaciones

$$\sigma^n = \sigma_1.n_1^2 + \sigma_2.n_2^2 + \sigma_3.n_3^2$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

$$15 = 26.66 * 0.5^2 + 11.85 * n_2^2 + 9.6 * n_3^2$$

$$0.5^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

Resolviendo este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas obtenemos:

$$n_2 = 0.497 \quad ; \quad n_3 = 0.709$$

**Problema 6:**

Usando la ecuación de balance, deducir la ecuación diferencial del equilibrio.

**Resolución**

La ecuación general de balance en su forma integral, establece que para una propiedad $\varphi$ cualquiera por unidad de masa:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\varphi dV}_{\substack{\textit{Cantidad}\text{ de la propiedad }\varphi \\ \text{en un volumen de control}}} = \underbrace{\int_V \rho k_A dV}_{\substack{\textit{Generación}\text{ de esa} \\ \text{propiedad en V.}}} - \underbrace{\int_{\partial V} \rho\varphi v.nd\Omega}_{\substack{\textit{Flujo convectivo saliente}(+) \\ \text{de la propiedad a traves de la} \\ \text{superficie que rodea V.}}} - \underbrace{\int_{\partial V} j_A.nd\Omega}_{\substack{\textit{Flujo no convectivo saliente}(+) \\ \text{de la propiedad a traves de la} \\ \text{superficie que rodea V.}}}$$

Donde el flujo convectivo involucra a la velocidad v (hay transporte de masa) y el no convectivo no la involucra. "n" es normal a la superficie cuyo sentido positivo (+) es hacia fuera. Para deducir lo que buscamos recordemos que la masa se mueve con velocidad "v", que el "flujo" no convectivo es constituido por las tensiones (por acción y reacción), (debemos tomar:

$\varphi = v$ (velocidad)

$k_A = b$ (cargas por unidad de masa)

$J_A = -T$ (Tensor de tensiones)

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho v dV = \int_V \rho b dV - \int_{\partial V} \rho \underbrace{v\otimes v}_{\text{Tensor!!!!}}.nd\Omega - \int_{\partial V}(-T).nd\Omega$$

Aplicando el teorema de Gauss; $\int_{\partial V} v * nd\Omega = \int_V \nabla * vdV$, queda:

$$\int_V \frac{\partial \rho v}{\partial t} dV = \int_V \rho b dV - \int_V \text{div}\,(\rho v \otimes v)\, dV + \int_V \text{div}(T)\, dV$$

Además $\text{div}\,(\rho v \otimes v) = v\,(v\,\text{grad}(\rho) + \rho\,\text{div}(v)) + \rho\, v\,\text{grad}(v) = v\,\text{div}(\rho v) + \rho\, v\,\text{grad}(v)$ y sumado a la ecuación de conservación de masa (ecuación 40 de Balloffet, M., G.) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\,(\rho v) = 0$, aplicando esto a la ecuación de arriba:

$$\rho\int_V \frac{\partial v}{\partial t} dV = -v(\int_V (\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\,(\rho v))dV) - \int_V \rho\, v\,\text{grad}(v)\, dV + \int_V \rho\, b\, dV + \int_V \text{div}\,(T)\, dV =$$

$$\rho\int_V (b - \frac{\partial v}{\partial t})dV = \rho\int_V v\,\text{grad}(v)\, dV - \int_V \text{div}\,(T)\, dV \quad \text{(Ecuación 57 de B., M., G.)}$$

que es la conservación de momento, Momentum o Momenta, que en definitiva encierra el concepto de que la cantidad de movimiento es igual al impulso o, de otra forma, la derivada con relación al tiempo de la cantidad de movimiento es igual a la suma de fuerzas del sistema (segunda ley de Newton).

$$C.M. = \int_V V.dm = \int_V \rho V.dV \quad ; \quad \frac{d}{dt}\int_V \rho V.dV = \sum F = \int_V \rho\, b\, dV + \int_{\partial V} T.n\, d\Omega$$

Como la ecuación obtenida tiene en todos sus términos integrales en relación al volumen, se puede eliminar la integral (localizar) y queda, teniendo en cuenta que $\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v.\text{grad}(v)$ (ecuación de la derivada material, hidráulica) se tiene:

$\text{div}\,(T) + \rho b = \rho\frac{dv}{dt} = \rho a$ si a=0 (cuasiestático) y $\rho b = \overline{X}$ , queda la ecuación de equilibrio deducida en el curso:

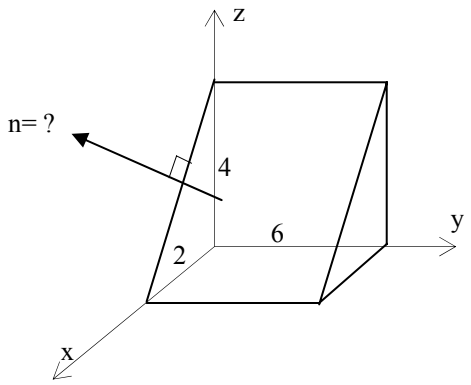
$$\text{div}\,(T) + \rho b = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial Xj} + \overline{X}_i = 0$$

## Problemas propuestos:

**Problema 1:**
Dado el tensor de tensiones en el punto P.

$$T = \begin{vmatrix} 14 & 7 & -7 \\ 7 & 21 & 0 \\ -7 & 0 & 35 \end{vmatrix}$$

Calcular la tension sobre el plano de la figura




**Problema 2:**
Si los planos coordenados usados para el siguiente tensor de tensiones son además principales, la matriz adopta la forma:

$$T = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}$$

a) Determine la componente normal $\sigma_n$ y la tangencial $\tau_n$ del vector tensión total $\rho$ sobre un plano definido por el vector normal :

$$n = n_1.e_1 + n_2.e_2 + n_3.e_3$$

b) Determine las componentes del vector unitario perteneciente a la tensión tangencial del plano analizado, e, tal que: $\rho = \sigma_n.n \hat{+} \tau_n.e$

**Problema 3:**
Muestre que la componente tangencial $\tau_0$ del vector tensión sobre el plano octaédrico es igual a

$$\tau_0 = [2/3\,.(-I_{d2})]^{1/2}$$

donde $I_{d2}$ segundo invariante del tensor desviador.

**Problema 4:**
Si dos raíces de la ecuación cúbica de Laplace son iguales, por ejemplo, $(\lambda - \sigma_1)(\lambda - \sigma_2)^2 = 0$ con $n^{(1)}$ y $n^{(2)}$ son las correspondientes direcciones principales para las que $\lambda = \sigma_1$ y $\lambda = \sigma_2$
Calcular:

a) Muestre que $n^{(1)} \times n^{(2)}$ es una dirección principal con tensión principal igual a $\sigma_2$
b) Muestre, basado en (a), que cualquier dirección perpendicular a $n^{(1)}$ es una dirección principal con tensión principal igual a $\sigma_2$

**Problema 5:**
Muestre que :

$$\partial I_{d2} / \partial \tau_{ij} = -S_{ij}$$

donde $I_{d2}$ segundo invariante del tensor desviador, $S_{ij}$ tensor desviador y $\tau_{ij}$ tensor de tensiones.