Capítulo 0

ELEMENTOS DE MATEMATICAS

0 - 1 : INTRODUCCION

El presente capítulo no es más que un sintético resumen de conceptos y fórmulas útiles para el estudio de la asignatura **Estabilidad IV-a** de la carrera de Ingeniería Civil de la U.N.N.E.

Se referirá a elementos del área de vectores, tensores, transformaciones lineales, operadores y matrices.

Dado el objetivo utilitario que se persigue nos referiremos exclusivamente a coordenadas cartesianas ortogonales del espacio tridimensional que coincide con el espacio físico.

En correspondencia con la tendencia de la bibliografía se introduce la ***Notación Indicial***, que si bien puede dificultar al principio la lectura del estudiante, facilita enormemente los desarrollos y la implementación de los cálculos.

Se ha tratado de unificar una nomenclatura que, siendo fácilmente adaptable a la utilizada por los estudiantes en cursos anteriores, permita (aunque en el curso realicemos los desarrollos en forma clásica) aplicar la notación a quienes así lo prefieran.

Aspiramos con la presente facilitar el cursado de la asignatura sin pretender suplir el dictado de las clases *teórico-prácticas,* ni que sea un texto de la materia.

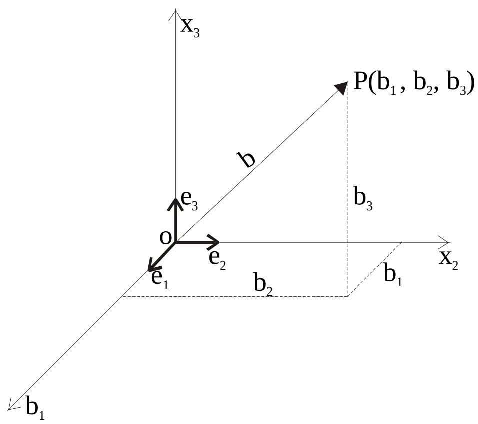
0 - 2 : MAGNITUDES ESCALARES

Existen magnitudes como la longitud, el volumen, la densidad, la energía, la temperatura, etc., que quedan perfectamente determinadas por un número real, y que puede ser representada por un segmento aplicado a partir de un origen sobre una recta. Diremos que estamos ante un *Escalar* y el número que representa a la magnitud es independiente del sistema de coordenadas adoptado.

0 - 3 : VECTORES

Existen otras magnitudes como las fuerzas, la velocidad, la aceleración, etc., que no pueden ser representadas por un número real, ya que tiene como característica una intensidad, una dirección y un sentido. Estamos ante magnitudes vectoriales y deben ser representadas por *vectores.*

Recordaremos aquí algunos elementos de la teoría de vectores que nos serán útiles para definir nomenclaturas y para su posterior utilización en el curso.

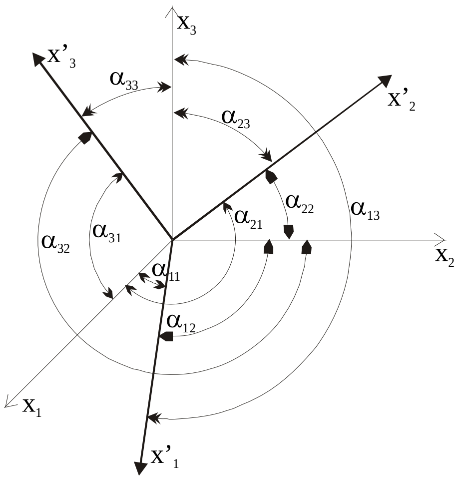


En primer lugar nos referiremos a un sistema de ejes cartesianos ortogonales x_1, x_2, x_3, como el de la figura definido por una base de versores e_1; e_2; e_3.

En este sistema el segmento orientado $\overline{OP}$ que define al vector b tendrá las componentes b_1, b_2, b_3, que no son más que las proyecciones de b sobre los tres ejes coordenados.

$$b = (b_1, b_2, b_3) = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = bi \quad i = 1, 2, 3$$

$$b = b_1 \cdot e_1 + b_2 \cdot e_2 + b_3 \cdot e_3$$



Veamos que pasa con una rotación de ejes (transformación lineal) donde denominamos con $x_i \cdot (x_1 \ x_2 \ x_3)$ a los ejes originales y $x'_i \cdot (x'_1 \ x'_2 \ x'_3)$ a los nuevos ejes rotados.

Denominamos con α_{ij} al ángulo entre los ejes x'_i y x_j y con a_{ij} al coseno de dicho ángulo.

$$\cos(x'_i, x_j) = \cos\alpha_{ij} = a_{ij}$$

Con los 9 elementos se puede formar una Matriz de Rotación (Matriz de Transformación Ortogonal) que denominaremos $A=(a_{ij})$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

tal que:

Ejes	x_1	x_2	x_3
x'_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
x'_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
x'_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

La matriz de rotación se denomina ortogonal pues cumple con las siguientes propiedades:

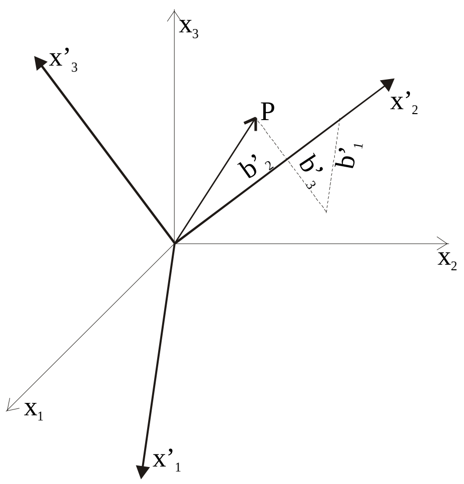
a) $\sum_{j=1}^{3} a_{ij} \cdot a_{kj} = 1$ si $i = k$

b) $\sum_{j=1}^{3} a_{ij} \cdot a_{kj} = 0$ si $i \neq k$

c) Determinante de $A = |A| = 1$

d) $A^{-1} = A^T$ (matriz inversa de A = Matriz transpuesta de A)

Veamos como referirnos y que relación existe entre sus componentes al pasar el vector $b=(b_1; b_2; b_3) = (b_i)$del sistema de referencia x_i al x'_i. Las nuevas coordenadas (b'_i) serán:



$$b'_1 = a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + a_{13}b_3$$
$$b'_2 = a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + a_{23}b_3$$
$$b'_3 = a_{31}b_1 + a_{32}b_2 + a_{33}b_3$$

Según las reglas del cálculo matricial se puede expresar al vector b en las nuevas coordenadas mediante el producto matricial:

$$b' = A \cdot b \qquad \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \qquad \text{donde} \qquad b'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} \cdot b_i$$

Es este el momento indicado para introducir la *Notación indicial o de Einstein*, que básicamente consiste en las siguientes reglas:

a) Un índice puede aparecer una o dos veces en un término dado:

Cuando un índice aparece una vez en un término (no aparece repetido) se entiende que este índice toma los valores de rango (Ej.: 1, 2, 3 en el espacio de tres dimensiones):

$(x_i) = (x_1, x_2, x_3)$

$b = b_i = (b_1, b_2, b_3)$

$f(x_i) = f(x_1, x_2, x_3)$

Cuando un índice aparece dos veces en un término se interpretará que ese índice toma todos los valores de su rango, sumándose los términos que resulten (Convención de sumatoria)

$$b = b_i \cdot e_i = b_1 \cdot e_1 + b_2 \cdot e_2 + b_3 \cdot e_3 = \sum_{i=1}^{3} b_i \cdot e_i$$

$$b \cdot c = (b_i \cdot c_i) = b_1 \cdot c_1 + b_2 \cdot c_2 + b_3 \cdot c_3 = \sum_{i=1}^{3} b_i \cdot c_i = \sum_{j=1}^{3} b_j \cdot c_j = (b_j \cdot c_j)$$

Es evidente que este tipo de notación permite eliminar el símbolo de sumatoria dándolo por sobreentendido y también cambiar los índices sin alterar el resultado.

La repetición de un índice más de dos veces no es aplicable a la convención de sumatoria, no teniendo sentido una expresión del tipo $u_i \cdot v_{ii}$

b) También especificaremos una notación para la diferenciación (Derivación), utilizando una coma (,) y a continuación un subíndice indicando que existe una derivada parcial y el eje respecto del cual se deriva.

Tomemos como ejemplo el operador nabla $\nabla(\ )$.

$$\nabla(\ ) = e_1 \cdot \frac{\partial(\ )}{\partial x_1} + e_2 \cdot \frac{\partial(\ )}{\partial x_2} + e_3 \cdot \frac{\partial(\ )}{\partial x_3}$$

Según convención de suma $\nabla(\ ) = e_i \cdot \dfrac{\partial(\ )}{\partial x_i}$

Según convención de diferenciación $\nabla(\ ) = e_i \cdot (\ )_{,i}$

Otro ejemplo sería:

$$\frac{\partial b_1}{\partial x_1} + \frac{\partial b_2}{\partial x_2} + \frac{\partial b_3}{\partial x_3} = \frac{\partial b_i}{\partial x_i} = b_{i,i} = b_{1,1} + b_{2,2} + b_{3,3}$$

c) El símbolo δ_{ij} (*Delta de Kroenecker*) representa una matriz especial y simétrica (matriz unidad)

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I \qquad \delta_{ij} = \delta_{ji}$$

donde $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$

Retomando el tema Vectores, daremos ahora una "Definición Analítica de Vectores" mediante el siguiente Teorema Fundamental:

"La condición necesaria y suficiente para que tres escalares b_1 b_2 b_3 (b_i) sean componentes de un vector b, es que por un cambio de ejes coordenados ortogonales de origen fijo, ellos se transformen según las mismas fórmulas que las coordenadas del punto"

$$b'_1 = a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + a_{13}b_3$$

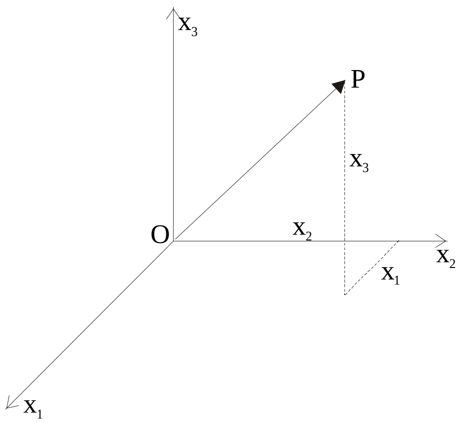
$$b'_2 = a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + a_{23}b_3 \qquad \therefore b'_i = a_{ij} \cdot b_j$$

$$b'_3 = a_{31}b_1 + a_{32}b_2 + a_{33}b_3$$

Es posible, a través de esta definición analítica del vector plantear toda la teoría de vectores, propiedades, operaciones, etc., a las cuales estamos tan habituados los Ingenieros.

0 - 4 : TENSOR CARTESIANO DE 2° ORDEN

Consideremos el espacio ordinario de tres dimensiones referido al triedro de ejes cartesianos ortogonales (x_1; x_2; x_3) y supongamos los dos vectores:



$$u = (u_1, u_2, u_3) = u_i$$

$$v = (v_1, v_2, v_3) = v_i$$

los cuales bajo una rotación de ejes cuya matriz de transformación es:

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Se transformarán según:

$$u'_i = a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + a_{i3}u_3 = a_{ih}u_h$$

$$v'_j = a_{j1}v_1 + a_{j2}v_2 + a_{j3}v_3 = a_{jk}v_k$$

Consideremos ahora los 9 productos ($u_i \cdot v_j$)

$$\left(u_i \cdot v_j\right) = \begin{bmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 \\ u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 \\ u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 \end{bmatrix}$$

Las cuales mediante una rotación de ejes se transforman según la siguiente regla:

$$u'_i \cdot v'_j = \left(a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + a_{i3}u_3\right)\left(a_{j1}v_1 + a_{j2}v_2 + a_{j3}v_3\right)$$

$$u'_i \cdot v'_j = a_{ih} \cdot a_{jk} \cdot u_h \cdot v_k$$

donde como h y k van de 1 a 3 constituyen 9 sumandos (3 x 3). El conjunto de los 9 productos (u_i, v_j) se denomina producto tensorial de los vectores (u_i); (v_j) y cumplen con las propiedades que caracterizan al "Tensor de 2° orden" que en forma similar al caso de los Vectores podemos definir en forma analítica de la siguiente manera:

"dadas las 9 cantidades t_{ij}

$$T = \left(t_{ij}\right) = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}$$

se dice que son componentes de un vector cartesiano de 2° orden cuando por un cambio de coordenadas se transforma según la ley: $t'_{ij} = a_{ih} \cdot a_{jk} \cdot t_{h \cdot k}$ (9 sumandos) "

donde es inmediato que se interpreta:

t_{hk} = componente del tensor en los ejes $x_i \cdot \left(x_1 \, ; x_2 \, ; x_3\right)$
t'_{ij} = componente del tensor en los ejes $x'_i \cdot \left(x'_1 \, ; x'_2 \, ; x'_3\right)$
a_{ih}, a_{jk} = cosenos directores entre los ejes rotados y los ejes originales.

De la misma forma se podrían definir Tensores Cartesianos de 3°, 4°,..., n° orden dando origen a una teoría de tensores en la cual el tensor de enésimo orden se transforma mediante una ley en que el producto es de n. cosenos directores. Bajo esta premisa podemos considerar que el tensor de 2° orden (t_{ij}) tiene 3^2 componentes (9) y que los vectores con 3^1 componentes son tensores de 1er orden y los escalares con 3^0 componentes son tensores de orden cero.

0 - 4 . 1 : PROPIEDADES Y OPERACIONES CON TENSORES DE 2° ORDEN

0 - 4 . 1 . 1 : Igualdad

Dos tensores A = (a_{ij}) y B = (b_{ij}) son iguales cuando sus respectivos componentes son iguales

$a_{ij} = b_{ij}$

0 - 4 . 1 . 2 : Adición

Solo definida para tensores del mismo orden (en este caso 2° orden). El tensor suma (o diferencia) de otros es un nuevo tensor que tiene por componentes la suma (o diferencia) de las componentes respectivas, obteniéndose un tensor del mismo orden.

Sean los tensores T = (t_{ij}) y S = (s_{ij}) será M = (m_{ij}) la suma;

$$M = T \pm S \quad \text{si} \quad m_{ij} = t_{ij} \pm s_{ij}$$

0 - 4 . 1 . 3 : Multiplicación:

a) Multiplicación por un escalar λ

Da como resultado un tensor del mismo orden cuyas componentes son obtenidas como el producto escalar por los componentes respectivos

$$\lambda \cdot T = \lambda \cdot \left(t_{ij}\right) = \left(\lambda \cdot t_{ij}\right)$$

b) Producto de tensores (o Tensorial)

El producto de dos tensores da un Tensor cuyo orden es la suma del orden de ambos tensores y cuyas componentes son los productos de las componentes de los dos tensores.

Consideremos un tensor de primer orden U = (u_i) y uno de segundo orden T = (t_{ij}). El tensor producto de tercer orden será:

$$s_{ijk} = u_i \cdot t_{jk}$$

0 - 4 . 1 . 4 : Contracción

Dado un tensor de orden ≥ 2, igualando dos índices y sumando respecto del índice igualado, se obtiene un tensor en el que han desaparecido estos índices y cuyo orden es 2 grados inferior al original.

Por ejemplo el tensor t_{ijk} da origen a:

$$u_k = t_{ii\,k}$$

Al tensor resultante se lo denomina Tensor Contraído y en este caso tendrá componentes:

$$u_1 = t_{111} + t_{221} + t_{331}$$
$$u_2 = t_{112} + t_{222} + t_{332}$$
$$u_3 = t_{113} + t_{223} + t_{333}$$

0 - 4 . 1 . 5 : Tensores Simétricos de 2° Orden

Diremos que un tensor es simétrico si se cumple que:

$$T = (t_{ij}) \qquad t_{ij} = t_{ji}$$

denominándose antisimétrico si $t_{ij} = -t_{ji}$ y se representan por matrices que son respectivamente simétricas y antisimétricas respecto a su diagonal principal.

Como en el curso utilizaremos tensores simétricos de segundo orden, veamos algunas de sus propiedades sin plantear las demostraciones:

a) Para cada tensor simétrico T = (t_{ij}) hay un vector dado por el Producto Interno que está asociado a cada dirección (definida por un versor n_i ó vector unitario) en ese punto.

$$v_i = t_{ij} \cdot n_j$$

Nótese que el tensor t_{ij} puede considerarse como un operador vectorial lineal que asocia a cada dirección definida por su versor n_j un vector v_i donde no necesariamente n_j y v_i son vectores colineales.

Si por el contrario para una dirección n_j determinada, el vector v_i resultante es colineal con n_j se cumplirá:

$$v_i = t_{ij} \cdot n_j = \lambda \cdot n_i$$

denominándose a n_j "dirección principal de T = (t_{ij})"

Utilizando el Delta de Kroenecker podemos decir:

$$n_i = \delta_{ij} \cdot n_j$$

siendo $t_{ij} \cdot n_j = \lambda \cdot \delta_{ij} \cdot n_j$

o bien $\left(t_{ij} - \lambda \cdot \delta_{ij}\right) \cdot n_j = 0$

que expresada en forma desarrollada equivale a:

$$\left(t_{11}-\lambda\right)\cdot n_1+t_{12}\cdot n_2+t_{13}\cdot n_3=0$$
$$t_{21}\cdot n_1+\left(t_{22}-\lambda\right)\cdot n_2+t_{23}\cdot n_3=0$$
$$t_{31}\cdot n_1+t_{32}\cdot n_2+\left(t_{33}-\lambda\right)\cdot n_3=0$$

Sistema de 3 ecuaciones homogéneas donde, si se conocen las componentes t_{ij} del tensor tendremos 4 incógnitas λ, n_1, n_2, n_3 que definen la dirección principal.

La solución trivial de un sistema es $n_i = 0$ ($n_1 = n_2 = n_3 = 0$), que no se comparece con la condición:

$$n_i\cdot n_i=1 \qquad \therefore \qquad n_1^2+n_2^2+n_3^2=1$$

al ser n_i los cosenos directores del versor $n = n_i$

Para que el sistema de ecuaciones tenga una solución distinta a la trivial el determinante de la matriz de los coeficientes debe ser nulo (Roche-Frobenius):

$$\left|t_{ij}-\lambda\delta_{ij}\right|=0$$

que explicitada se expresa:

$$\begin{vmatrix}\left(t_{11}-\lambda\right) & t_{12} & t_{13}\\ t_{21} & \left(t_{22}-\lambda\right) & t_{23}\\ t_{31} & t_{32} & \left(t_{33}-\lambda\right)\end{vmatrix}=0$$

Desarrollado, el determinante conduce a una ecuación algebraica de tercer grado (Ecuación secular o característica)

$$\lambda^3-I_1\lambda^2+I_2\lambda-I_3=0$$

donde los escalares I_1, I_2, I_3:

$$I_1=t_{11}+t_{22}+t_{33}=t_{ii}\ \text{(traza de T)}$$

$$I_2=\begin{vmatrix}t_{11} & t_{12}\\ t_{21} & t_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}t_{22} & t_{23}\\ t_{32} & t_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}t_{11} & t_{13}\\ t_{31} & t_{33}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left(t_{ii}\cdot t_{jj}-t_{ij}\cdot t_{ji}\right)$$

$$I_2=\begin{vmatrix}t_{11} & t_{12} & t_{13}\\ t_{21} & t_{22} & t_{23}\\ t_{31} & t_{32} & t_{33}\end{vmatrix}=\left|\ t_{ij}\ \right|=\det\left(t_{ij}\right)$$

se denominan Invariantes de 1°, 2° y 3$^{\underline{er}}$ orden del tensor t_{ij}, por no variar al producirse un cambio de ejes de referencia.

Las soluciones (reales) λ_1 λ_2 λ_3 se denominan valores principales o autovalores de t_{ij} y a las tres direcciones n_i correspondientes con los λ_i se las denomina direcciones principales, siendo ortogonales entre si.

Cuando el tensor t_{ij} se refiere a ejes coordenados coincidentes con las direcciones principales la matriz que los representa es diagonal:

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

0 - 5 : MATRICES - TRANFORMACIONES LINEALES

0 - 5 . 1 : TRANSFORMACIÓN LINEAL

Como siempre estamos en el espacio afín R_3 de 3 dimensiones y sean x_i (i = 1, 2, 3) las coordenadas de sus puntos.

Se llama *Transformación Lineal de R_3 en R'_3* a toda transformación de los puntos del primer espacio R_3 en los del segundoR'_3 definida por ecuaciones lineales y homogéneas de la forma:

$$x'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} \cdot x_j = a_{ij} \cdot x_j$$

donde los coeficientes a_{ij} son constantes y forman la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = (a_{ij})$$

que se llama Matriz de Transformación y tiene una correspondencia biunívoca con la transformación lineal definida.

En realidad una transformación lineal general tiene término independiente, pero aquí solo trataremos las transformaciones lineales homogéneas.

0 - 5 . 1 . 1 : Producto de transformaciones lineales

Sea la transformación lineal $A(a_{ij})$ de R_3 a R'_3 y la nueva transformación $B(b_{ij})$ de R'_3 a R''_3 definida por:

$$x''_k = \sum_{j=1}^{3} b_{ki} \cdot x'_i = b_{ki} \cdot x'_i$$

o sea la matriz: $$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = (b_{ki})$$

Se llama Transformación Lineal Producto B.A a la transformación de R_3 en R''_3 resultante de realizar sucesivamente la transformación A y luego la B siendo;

$$x''_k = \sum_{i=1}^{3} b_{ki} \cdot x'_i = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} b_{ki} \cdot a_{ij} \cdot x_j = b_{ki} \cdot a_{ij} \cdot x_j \qquad k = 1, 2, 3$$

lo cual representa una transformación lineal C cuya matriz será:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \qquad \text{con} \qquad c_{ij} = \sum_{h=1}^{3} b_{ih} \cdot a_{hj} = b_{ih} \cdot a_{hj}$$

que responde a la Ley de Producto de Matrices.

Si convenimos en representar con:

$$x = (x_i) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad x' = (x'_i) = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} \qquad x'' = (x''_i) = \begin{bmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{bmatrix}$$

a las matrices columnas x, x' y x", las transformaciones lineales se pueden expresar:

$$x' = A.x \qquad x'' = B.x' \qquad x'' = B.A.x = C.x$$

En general y cumpliendo las condiciones para que se pueda realizar el producto de matrices se cumple:

- Propiedad Asociativa:

$$A.(B.C) = (A.B).C$$

- Propiedad Conmutativa: No es en general válida:

$$A.B \neq B.A \qquad \text{salvo casos particulares.}$$

0 - 5 . 1 . 2 : <u>Adición y sustracción - Producto por un escalar</u>

- La suma y resta está definida por:

$$A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})$$

- La adición es asociativa y conmutativa

$$A + B + C = (A + B) + C = A + (B + C) = A + (C + B)$$

- Cumpliendo con las condiciones para que se pueda realizar el producto, es válida la propiedad distributiva:

$$A \cdot (B \pm C) = A \cdot B \pm A \cdot C \qquad (A \pm B) \cdot C = A \cdot C \pm B \cdot C$$

- El producto de una matriz A por un escalar λ se define;

$$\lambda \cdot A = (\lambda . a_{ij}) = A \cdot \lambda$$

0 - 5 . 1 . 3 : <u>Matriz Transpuesta</u>

Se llama matriz transpuesta A^T de la matriz A, a la que resulta de permutar las filas por columnas:

$$A = (a_{ij}) \qquad A^T = (a_{ij}^T) \qquad a_{ij}^T = a_{ji}$$

cumpliéndose que:

$$(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$$
$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

0 - 5 . 1 . 4 : <u>Transformaciones y Matrices Inversas</u>

Solo definidas para Matrices Cuadradas como las que estamos tratando y sea la transformación lineal;

$$x' = A \cdot x$$

siendo A no singular, o sea: $\det A = |A| = |a_{ij}| \neq 0$. Se podrá definir la matriz inversa A^{-1} y la transformación inversa tales que:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Será:

$$A^{-1} \cdot x' = \left(A^{-1} \cdot A\right) \cdot x = I \cdot x$$
$$x = A^{-1} \cdot x'$$

$$A^{-1} = \left(a^*_{ji}\right) \qquad x_j = \sum a^*_{ji} \cdot x'_i \qquad \text{con} \qquad a^*_{ji} = \frac{\text{adj}^T a_{ji}}{|A|}$$

0 - 5 . 1 . 5 : <u>Otras Propiedades de las Matrices</u>

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$
$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$
$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$$

Matriz simétrica: $a_{ij} = a_{ji}$
Matriz antisimétrica: $a_{ij} = -a_{ji}$

Teniendo en cuenta que:

$A_s = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right)$ es simétrica y

$A_a = \frac{1}{2}\left(A - A^T\right)$ es antisimétrica

$A = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) + \frac{1}{2}\left(A - A^T\right) = As + Aa$. Suma de una matriz simétrica mas una antisimétrica.

0 - 5 . 1 . 6 : Transformaciones y Matrices Ortogonales

Ha sido tratado en el tema (0-3) al definir la Matriz de Rotación $A = (a_{ij})$ como una Matriz Ortogonal.

Una transformación lineal pueda interpretarse de dos maneras:

a) La transformación "afin" que cambia las coordenadas x_i a otras coordenadas x'_i referidas al mismo sistema de coordenadas.
b) La transformación "alias" en la que se supongan que x_i y x'_i son las coordenadas del mismo punto del espacio referido a sistemas coordenados diferentes.

Podemos decir: "Las transformaciones lineales que definen cambios de sistemas de coordenadas cartesianas ortogonales en otros del mismo tipo son transformaciones lineales ortogonales"

Su Matriz $A = (a_{ij})$ cumple con las siguientes propiedades:

a) $\sum_{j=1}^{3} a_{ij} \cdot a_{kj} = \delta_{ik}$

$\sum_{j=1}^{3} a_{ji} \cdot a_{jk} = \delta_{ik}$

b) $A^{-1} = A^T$

c) $\det A = |A| = \pm 1$ (–si se invierten algunos ejes)

d) $\operatorname{adj} a_{ij} = \pm a_{ji}$ (–si se invierten algunos ejes)

0 - 5 . 1 . 7 : Transformación de los Componentes del Tensor de Segundo Orden

Aplicando el álgebra matricial calcularemos las nuevas componentes (t'_{ij}) de un tensor $T = (t_{hk})$ al efectuar una rotación de los ejes originales $(x_1;\ x_2;\ x_3)$ mediante la Matriz de Rotación ortogonal $A= (a_{ij})$ y su inversa y transpuesta $A^T = (a^T_{ij}) = (a_{ji})$.

De (0 - 4): $t'_{ij} = a_{ih}\, a_{jk}\, t_{hk}$

Multipliquemos $A \cdot T = C$ $\quad c_{ij} = a_{ih} \cdot t_{hj}$

Multipliquemos $C \cdot A^T = D$ $\quad d_{ij} = c_{ik} \cdot a^T_{kj} = (a_{ih} \cdot t_{hk}) \cdot a^T_{kj}$

$d_{ij} = a_{ih} \cdot a_{jk} \cdot t_{hk} = t'_{ij}$

Luego será $\quad T' = A\, T \cdot A^T$