



Universidad  
Nacional del  
Nordeste

# MODELADO DEL TRANSPORTE DE POLUENTES EN MEDIOS PARCIALMENTE SATURADOS DEFORMABLES

J.L. Mroginski\*, H.A. Di Rado\*, P.A. Beneyto\*, A.M. Awruch<sup>o</sup>

\* Departamento de Mecánica Aplicada, Universidad Nacional del Nordeste,  
javierm@ing.unne.edu.ar, <http://ing.unne.edu.ar/mecap>

<sup>o</sup> Centro de Mecánica Aplicada y Computacional (CEMACOM),  
Universidad Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre (RS), Brasil.

## Resumen

En el presente trabajo se aborda el problema geomecánico del transporte de poluentes **inmiscibles** en medios porosos parcialmente saturados isotérmicos. Se brinda un marco teórico con el cual es posible modelar estos problemas por medio del **MEF**, asumiendo que el medio poroso es un sistema **multifase**, conformado por tres fases: sólida, líquida y fase gaseosa, mas la presencia de sustancias inmiscibles. El modelo numérico resultante resuelve ecuaciones de **cantidad de movimiento**, de **balance de energía** y de **masa** para el medio multifásico completo.

Introducción

Volumen elemental...

Ec. de balance...

Ec. de balance...

Relaciones...

Ec. generales de...

Modelo...

Ejemplos numéricos

Conclusiones

Anexo



Página 1 de 26

Full Screen

Cerrar



Universidad  
Nacional del  
Nordeste

# 1. Introduccion

La geomecánica ambiental cubre un vasto número de problemas donde se involucran geomateriales usualmente acoplados con el flujo de determinados fluidos y con el transporte de masa.

Dentro de los problemas que trata se encuentra el transporte de poluentes en **acuíferos** y, particularmente, en zonas no saturadas donde la deformación de la fase sólida del suelo puede ser importante debido a la naturaleza del suelo y a los efectos de la **tensión capilar**. Otra área de singular importancia dentro de la geomecánica ambiental es el estudio del confinamiento de **residuos industriales, nucleares**, etc. donde el correcto diseño de los medios de contención son un factor ambientalmente primordial.

*Introduccion*

*Volumen elemental...*

*Ec. de balance...*

*Ec. de balance...*

*Relaciones...*

*Ec. generales de...*

*Modelo...*

*Ejemplos numéricos*

*Conclusiones*

*Anexo*



*Pagina 2 de 26*

*Full Screen*

*Cerrar*



## 2. Volumen elemental representativo

La mecánica clásica asume una **distribución continua** de las partículas (sólidas y líquidas), para las cuales están establecidas las leyes de **balance** y las **relaciones constitutivas**. Los fenómenos aquí estudiados ocurren en dominios ocupados por varias fases.

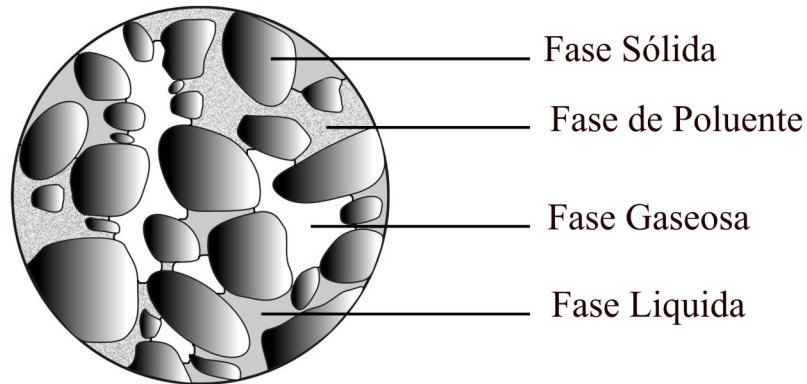


Figure 1: Volumen elemental representativo

Para describir la configuración intergranular del medio multifásico hay básicamente dos niveles posibles, el **microscópico** y el **macroscópico**. A nivel microscópico se considera la estructura real del medio poroso, la cual no es homogénea (ver figura 1). A este nivel, las ecuaciones de gobierno se plantean para cada componente por separado, lo que dificulta en gran medida la solución del problema. Por otro lado, las propiedades microscópicas de los medios porosos son de difícil obtención. Por estos motivos, se adopta una descripción macroscópica del



medio. Como principal característica, esta descripción asume que en cada punto material están presentes simultáneamente todas las fases en sus respectivas proporciones.

En estos procesos una fracción de volumen  $\eta^\gamma$  puede componerse por los siguientes elementos:

- Fase sólida,  $\eta^s = 1 - n$ , donde  $n = (dv^w + dv^g + dv^\pi) / dv$
- Fase líquida:  $\eta^w = nS_w$ , donde  $S_w = dv^w / (dv^w + dv^g + dv^\pi)$
- Fase gaseosa:  $\eta^g = nS_g$ , donde  $S_g = dv^g / (dv^w + dv^g + dv^\pi)$
- Fase de poluente:  $\eta^\pi = nS_\pi$ , donde  $S_\pi = dv^\pi / (dv^w + dv^g + dv^\pi)$

De las ecuaciones anteriores se desprende:

$$S_w + S_g + S_\pi = 1 \quad (1)$$

y la densidad del medio multifásico:

$$\rho = \rho_s + \rho_w + \rho_g + \rho_\pi = (1 - n) \rho^s + nS_w \rho^w + nS_g \rho^g + nS_\pi \rho^\pi \quad (2)$$

Introducción

Volumen elemental...

Ec. de balance...

Ec. de balance...

Relaciones...

Ec. generales de...

Modelo...

Ejemplos numéricos

Conclusiones

Anexo



Página 4 de 26

Full Screen

Cerrar



### 3. Ec. de balance microscópico

Para una propiedad termodinámica cualquiera,  $\psi$ , la ecuación general de conservación dentro de la fase  $\gamma$  puede ser escrita como (Malvern, 1969; Oliver, 2000):

$$\frac{\partial \rho \psi}{\partial t} + \text{div}(\rho \psi \dot{\mathbf{r}}) - \text{div} \mathbf{i} - \rho \mathbf{b} = \rho \mathbf{G} \quad (3)$$

Para establecer ecuaciones de balance de una propiedad termodinámica definida se cambian las variables de estado  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{G}$ . Así, por ejemplo, para la obtención de la ecuación de balance de masa se tiene:

$$\psi = 1 \quad ; \quad \mathbf{i} = 0 \quad ; \quad \mathbf{b} = 0 \quad ; \quad \mathbf{G} = 0 \quad (4)$$

introduciendo estos valores en (3) la ecuación de balance microscópica de masa resulta ser:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \dot{\mathbf{r}}) = 0 \quad (5)$$

Introducción

Volumen elemental...

Ec. de balance...

Ec. de balance...

Relaciones...

Ec. generales de...

Modelo...

Ejemplos numéricos

Conclusiones

Anexo



Página 5 de 26

Full Screen

Cerrar



## 4. Ec. de balance macroscópico

### 4.1. Fase sólida

Partiendo de (5) se obtiene la expresión del balance de masa para la fase sólida

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \rho_s \operatorname{div} v^s = 0 \quad (6)$$

y teniendo en cuenta (2) nos queda:

$$\frac{(1-n)}{\rho^s} \frac{\partial \rho^s}{\partial t} - \frac{\partial n}{\partial t} + (1-n) \operatorname{div} v^s = 0 \quad (7)$$

### 4.2. Fase líquida

La ecuación microscópica de balance de masa para la fase líquida es similar a la correspondiente a la fase sólida (3) siendo la igualdad distinta de cero ( $G \neq 0$ ) dado que el agua puede transformarse en vapor y viceversa.

$$\frac{\partial \rho_w}{\partial t} + \rho_w \operatorname{div} v^w = -\dot{m} \quad (8)$$

Teniendo ahora en cuenta (2) nos queda:

$$\frac{\partial (n S_w \rho^w)}{\partial t} + n S_w \rho^w \operatorname{div} v^w = -\dot{m} \quad (9)$$

Desarrollando esta expresión y trabajando algebraicamente, se llega a una relación que sumada a (7) es:



$$\frac{(1-n)}{\rho^s} \frac{\partial \rho^s}{\partial t} + \operatorname{div} v^s + \frac{n}{\rho^w} \frac{\partial \rho^w}{\partial t} + \frac{n}{S_w} \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{1}{S_w \rho^w} \operatorname{div} (n S_w \rho^w \cdot v^{ws}) = -\frac{\dot{m}}{S_w \rho^w} \quad (10)$$

### 4.3. Fase gaseosa

La fase gaseosa aquí considerada esta compuesta por dos componentes, *aire seco (ga)* y *vapor de agua (gw)*. Dado que ambos componentes son miscibles y se comportan en forma similar pueden ser tratados como una sola fase.

La ecuación de balance microscópico de esta fase esta dada nuevamente por (5) en el caso de despreciar la producción interna de masa de cada especie debido a las reacciones químicas entre ambas (Hassanizadeh, 1986a), con lo cual la ecuación de balance de masa para la mezcla de aire seco y vapor de agua será:

$$\frac{\partial (n S_g \rho^g)}{\partial t} + n S_g \rho^g \operatorname{div} v^g = \dot{m} \quad (11)$$

Nuevamente trabajando algebraicamente con esta expresión se llega a una relación que sumada a (7) es:

$$\frac{(1-n)}{\rho^s} \frac{\partial \rho^s}{\partial t} + \operatorname{div} v^s + \frac{n}{S_g} \frac{\partial S_g}{\partial t} + \frac{n}{\rho^g} \frac{\partial \rho^g}{\partial t} + \frac{1}{S_g \rho^g} \operatorname{div} (n S_g \rho^g \cdot v^{gs}) = \frac{\dot{m}}{S_g \rho^g} \quad (12)$$

Introducción

Volumen elemental...

Ec. de balance...

Ec. de balance...

Relaciones...

Ec. generales de...

Modelo...

Ejemplos numéricos

Conclusiones

Anexo



Página 7 de 26

Full Screen

Cerrar



## 4.4. Poluentes inmiscibles

Cuando en el medio poroso se presenta una sustancia que no tiene la propiedad de mezclarse con alguna de las fases no solidas claramente esta formando parte de una nueva fase,  $\pi$ . Una manera de estudiar este fenómeno es considerar que el comportamiento del poluente será similar a la fase liquida (Schrefler, 2001).

La ecuación de balance de masa para poluentes inmiscibles será por lo tanto similar a (10) pero sin el término de generación interna,  $\dot{m} = 0$ .

$$\frac{(1-n)}{\rho^s} \frac{\partial \rho^s}{\partial t} + \text{div } v^s + \frac{n}{\rho^\pi} \frac{\partial \rho^\pi}{\partial t} + \frac{n}{S_\pi} \frac{\partial S_\pi}{\partial t} + \frac{1}{S_\pi \rho^\pi} \text{div} (n S_\pi \rho^\pi \cdot v^{\pi s}) = 0 \quad (13)$$

Introduccion

Volumen elemental...

Ec. de balance...

Ec. de balance...

Relaciones...

Ec. generales de...

Modelo...

Ejemplos numéricos

Conclusiones

Anexo



Página 8 de 26

Full Screen

Cerrar





## 5. Relaciones constitutivas y de estado

Para completar la descripción del comportamiento mecánico se requiere definir las relaciones constitutivas.

### 5.1. Tensor de tensiones en las fases fluídas

Aplicando de **segunda ley** de la termodinámica el medio poroso multifasico (Hasanizadeh 1979b) el tensor de tensiones en las fases fluídas puede ser escrito como

$$\mathbf{t}^\gamma = -\eta^\gamma p^\gamma \mathbf{I} \quad (14)$$

### 5.2. Tensor de tensiones en la fase sólida

El tensor de tensiones en la fase sólida es

$$\mathbf{t}^s = (1 - n) (\mathbf{t}_e^s - \mathbf{I} p^s) \quad (15)$$

mientras que la presión en la fase sólida es

$$p^s = S_w p^w + S_g p^g + S_\pi p^\pi \quad (16)$$

y el tensor de tensiones efectivo se define como

$$\boldsymbol{\sigma}' = (1 - n) \mathbf{t}_e^s \quad (17)$$

Introduciendo (16) en (15)

$$\mathbf{t}^s = (1 - n) [\mathbf{t}_e^s - \mathbf{I} (S_w p^w + S_g p^g + S_\pi p^\pi)] \quad (18)$$



Con el objeto de obtener la **tensión total**,  $\sigma$ , se suma la expresión (18) con (14) escrita para las fases líquidas, gaseosas y de poluentes.

$$\begin{aligned}\sigma &= t^s + t^w + t^g + t^\pi = \\ &= (1-n) [t_e^s - \mathbf{I} (S_w p^w + S_g p^g + S_\pi p^\pi)] - n S_w p^w \mathbf{I} - n S_g p^g \mathbf{I} - n S_\pi p^\pi \mathbf{I} = \\ &= (1-n) t_e^s - \mathbf{I} (S_w p^w + S_g p^g + S_\pi p^\pi) \quad (19)\end{aligned}$$

o bien,

$$\sigma = \sigma' + \mathbf{I} (p^w S_w + p^g S_g + p^\pi S_\pi) \quad (20)$$

### 5.3. Densidad de la masa solida

Asumiendo que la densidad de la masa solida es una función de  $p^s$ , de la temperatura y del primer invariante del tensor de tensiones efectivo se tiene,

$$\frac{1}{\rho^s} \frac{\partial \rho^s}{\partial t} = - \frac{1}{V_s} \frac{\partial V_s}{\partial t} = \frac{1}{K_s} \frac{\partial p^s}{\partial t} - \beta_s \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{3(n-1)K_s} \frac{\partial (\text{tr} \sigma')}{\partial t} \quad (21)$$

Teniendo en cuenta ahora la ecuación (21), la definición de la constante de **Biot** y la relación constitutiva para el primer invariante del tensor de tensiones efectivo (Malvern, 1969), se obtiene:

$$\frac{1}{\rho^s} \frac{\partial \rho^s}{\partial t} = \frac{1}{1-n} \left[ (\alpha - n) \frac{1}{K_s} \frac{\partial p^s}{\partial t} - \beta_s (\alpha - n) \frac{\partial T}{\partial t} - (1 - \alpha) \text{div } v^s \right] \quad (22)$$

Para granos incompresibles  $1/K_s = 0$ ,  $\alpha = 1$ , lo cual no implica que el esqueleto sólido sea rígido, dado que se acomodan los espacios vacíos.



## 5.4. Ecuación de estado para la fase líquida

La ecuación de estado para el agua ha sido desarrollada por Fernandez, 1972, y viene dado por:

$$\rho^w = \rho^{wo} \exp[-\beta_w T + C_w (p^w - p^{wo})] \quad (23)$$

siendo su variación en el tiempo

$$\frac{1}{\rho^{wo}} \frac{\partial \rho^w}{\partial t} = \frac{1}{K_w} \frac{\partial p^w}{\partial t} - \beta_w \frac{\partial T}{\partial t} \quad (24)$$

## 5.5. Ecuación de estado para la fase gaseosa

La fase gaseosa puede ser considerada como una mezcla perfecta de gases ideales, aire seco y vapor de agua. Así es posible usar las leyes de **gases ideales** al aire seco ( $g_a$ ), vapor de agua ( $g_w$ ) y aire húmedo ( $g$ ) (Fredlund, 1993)

$$p^{g_a} = \rho^{g_a} \theta R / M_a \quad (25)$$

$$p^{g_w} = \rho^{g_w} \theta R / M_w \quad (26)$$

$$p^g = p^{g_a} + p^{g_w} \quad (27)$$

$$M_g = \left( \frac{\rho^{g_w}}{\rho^g} \frac{1}{M_w} + \frac{\rho^{g_a}}{\rho^g} \frac{1}{M_a} \right)^{-1} \quad (28)$$

donde  $M_\gamma$  es la masa molar del componente  $\gamma$  y  $R$  es la constante universal de los gases.



## 6. Ec. generales de campo

Las leyes de balance macroscópicas son ahora transformadas introduciendo las relaciones constitutivas definidas en la sección 5

### 6.1. Fase sólida

El comportamiento de la fase sólida puede ser descrita con suficiente precisión por medio de la ecuación de **balance de momento lineal**, la cual se obtiene a partir de (3) estableciendo correctamente las variables de estado  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{G}$  (Lewis, 1998a).

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} = 0 \quad (29)$$

### 6.2. Fase líquida

Derivando la relación entre los grados de saturación de las diferentes fases (1) con respecto al tiempo y despejando  $\partial S_g / \partial t$  se tiene

$$\frac{\partial S_g}{\partial t} = -\frac{\partial S_w}{\partial t} - \frac{\partial S_\pi}{\partial t} \quad (30)$$

Teniendo en cuenta la ecuación de estado de la fase líquida, la definición de presión en la fase sólida y la densidad de la fase sólida, en la ecuación de balance macroscópico de la fase líquida se tiene.

Introducción

Volumen elemental...

Ec. de balance...

Ec. de balance...

Relaciones...

Ec. generales de...

Modelo...

Ejemplos numéricos

Conclusiones

Anexo



Página 12 de 26

Full Screen

Cerrar



$$\begin{aligned}
 & \left[ S_w^2 \frac{(\alpha - n)}{K_s} + \frac{n S_w}{K_w} \right] \frac{\partial p^w}{\partial t} + \left[ \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_w S_g \right] \frac{\partial p^g}{\partial t} + \left[ \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_w S_\pi \right] \frac{\partial p^\pi}{\partial t} \\
 & + \alpha S_w m^T L \frac{\partial u}{\partial t} + \left[ \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_w p^w - \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_w p^g + n \right] \frac{\partial S_w}{\partial t} + S_w \frac{(\alpha - n)}{K_s} [p^\pi - p^g] \frac{\partial S_\pi}{\partial t} \\
 & + \frac{1}{\rho^w} \nabla^T \left[ \frac{k k^{rw}}{\mu^w} (-\nabla p^w + \rho^w g) \right] = 0 \quad (31)
 \end{aligned}$$

Los términos  $\partial S_w / \partial t$  y  $\partial S_\pi / \partial t$  pueden expresarse como:

$$\begin{aligned}
 n \frac{\partial S_w}{\partial t} &= n \frac{\partial S_w}{\partial p^{gw}} \frac{\partial p^{gw}}{\partial t} = C_w \frac{\partial p^{gw}}{\partial t} = C_w \left( \frac{\partial p^g}{\partial t} - \frac{\partial p^w}{\partial t} \right) \\
 n \frac{\partial S_\pi}{\partial t} &= n \frac{\partial S_\pi}{\partial p^{g\pi}} \frac{\partial p^{g\pi}}{\partial t} = C_\pi \frac{\partial p^{g\pi}}{\partial t} = C_\pi \left( \frac{\partial p^g}{\partial t} - \frac{\partial p^\pi}{\partial t} \right)
 \end{aligned} \quad (32)$$

Donde  $C_w$  es la derivada de la curva característica ( $S_w - p^{gw}$ ) (Beneyto, 2005) del suelo estudiado. Dado que la fase  $\pi$  se comporta como un fluido es factible realizar un análisis similar al caso anterior implementando una nueva curva  $S_\pi - p^{g\pi}$  (Pao, 2002). Una de las formas de variación adoptada es mediante una función hiperbólica (Bolzon, 1996). Ordenando (31)

$$\alpha_{22} \frac{\partial p^w}{\partial t} + \alpha_{23} \frac{\partial p^g}{\partial t} + \alpha_{24} \frac{\partial p^\pi}{\partial t} + \alpha_{21} L \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho^w} \nabla^T \left[ \frac{k k^{rw}}{\mu^w} (-\nabla p^w + \rho^w g) \right] = 0 \quad (33)$$

con

Introducción

Volumen elemental...

Ec. de balance...

Ec. de balance...

Relaciones...

Ec. generales de...

Modelo...

Ejemplos numéricos

Conclusiones

Anexo





$$\begin{aligned}\alpha_{21} &= \alpha S_w m^T \\ \alpha_{22} &= \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_w \left( S_w - p^w \frac{C_w}{n} + p^g \frac{C_w}{n} \right) + \frac{n S_w}{K_w} - C_w \\ \alpha_{23} &= \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_w \left( S_g + p^w \frac{C_w}{n} - p^g \frac{C_w}{n} + (p^\pi - p^g) \frac{C_\pi}{n} \right) + C_w \\ \alpha_{24} &= \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_w \left( S_\pi - (p^\pi - p^g) \frac{C_\pi}{n} \right)\end{aligned}\quad (34)$$

### 6.3. Fase gaseosa

Partiendo de la ecuación de balance de masa de la fase gaseosa, teniendo en cuenta la ecuación de estado de dicha fase y la densidad de la fase sólida, se tiene

$$\begin{aligned}& \left[ \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_g \left( S_w - \frac{C_w}{n} (p^w - p^g) \right) + C_w \right] \frac{\partial p^w}{\partial t} \\ & + \left[ \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_g \left( S_g + \frac{C_w}{n} (p^w - p^g) + \frac{C_\pi}{n} (p^\pi - p^g) \right) - C_w - C_\pi + \frac{n S_g M_g}{\rho^g \theta R} \right] \frac{\partial p^g}{\partial t} \\ & + \left[ \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_g \left( S_\pi - \frac{C_\pi}{n} (p^\pi - p^g) \right) + C_\pi \right] \frac{\partial p^\pi}{\partial t} \\ & + \alpha S_g m^T L \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho^g} \nabla^T \left[ \frac{k k^{rg}}{\mu^g} (-\nabla p^g + \rho^g g) \right] = 0\end{aligned}\quad (35)$$

la cual puede ser expresada de manera similar a (33)



$$\alpha_{32} \frac{\partial p^w}{\partial t} + \alpha_{33} \frac{\partial p^g}{\partial t} + \alpha_{34} \frac{\partial p^\pi}{\partial t} + \alpha_{31} L \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho^g} \nabla^T \left[ \frac{k k^{rg}}{\mu^g} (-\nabla p^g + \rho^g g) \right] = 0 \quad (36)$$

con

$$\begin{aligned} \alpha_{31} &= \alpha S_g m^T \\ \alpha_{32} &= \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_g \left( S_w + \frac{C_w}{n} (p^g - p^w) \right) + C_w \\ \alpha_{33} &= \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_g \left( S_g - \frac{C_w}{n} (p^g - p^w) - \frac{C_\pi}{n} (p^g - p^\pi) \right) - C_w - C_\pi + \frac{n S_g M_g}{\rho^g \theta R} \\ \alpha_{34} &= \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_g \left( S_\pi + \frac{C_\pi}{n} (p^g - p^\pi) \right) + C_\pi \end{aligned} \quad (37)$$

## 6.4. Fase de poluentes inmiscibles

Cuando el poluyente no puede mezclarse con la fase líquida claramente esta formando parte de una nueva fase,  $\pi$ , y el planteo de las ecuaciones de gobierno se lleva a cabo en forma idéntica a caso de la fase líquida.

Partiendo de la ecuación de balance de masa para poluentes inmiscibles para procesos isotérmicos se tiene:

Introducción

Volumen elemental...

Ec. de balance...

Ec. de balance...

Relaciones...

Ec. generales de...

Modelo...

Ejemplos numéricos

Conclusiones

Anexo



Página 15 de 26

Full Screen

Cerrar



$$\begin{aligned} & \left[ \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_\pi \left[ S_w - (p^w - p^g) \frac{C_w}{n} - (p^\pi - p^g) \frac{C_\pi}{n} \right] + C_\pi \right] \frac{\partial p^w}{\partial t} \\ & + \left[ \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_\pi \left[ S_g + (p^w - p^g) \frac{C_w}{n} + (p^\pi - p^g) \frac{C_\pi}{n} \right] + C_\pi \right] \frac{\partial p^g}{\partial t} \\ & + \left[ \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_\pi^2 + \frac{n S_\pi}{K_\pi} \right] \frac{\partial p^\pi}{\partial t} + \alpha S_\pi m^T L \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho^\pi} \nabla^T \left[ \frac{k k^{r\pi}}{\mu^\pi} (-\nabla p^\pi + \rho^\pi g) \right] = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

expresada de manera similar a (33) se tiene

$$\alpha_{42} \frac{\partial p^w}{\partial t} + \alpha_{43} \frac{\partial p^g}{\partial t} + \alpha_{44} \frac{\partial p^\pi}{\partial t} + \alpha_{41} L \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho^\pi} \nabla^T \left[ \frac{k k^{r\pi}}{\mu^\pi} (-\nabla p^\pi + \rho^\pi g) \right] = 0 \quad (39)$$

con

$$\begin{aligned} \alpha_{41} &= \alpha S_\pi m^T \\ \alpha_{42} &= \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_\pi \left[ S_w - (p^w - p^g) \frac{C_w}{n} - (p^\pi - p^g) \frac{C_\pi}{n} \right] + C_\pi \\ \alpha_{43} &= \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_\pi \left[ S_g + (p^w - p^g) \frac{C_w}{n} + (p^\pi - p^g) \frac{C_\pi}{n} \right] + C_\pi \\ \alpha_{44} &= \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_\pi^2 + \frac{n S_\pi}{K_\pi} \end{aligned} \quad (40)$$







## 7. Modelo matemático discreto

Aplicando el método de Galerkin al sistema diferencial de ecuaciones formada por (29), (33), (36) y (39), y empleando el método de los elementos finitos se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales.

$$\mathbf{K}_E \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \mathbf{C}_{sw} \frac{\partial \bar{p}^w}{\partial t} + \mathbf{C}_{sg} \frac{\partial \bar{p}^g}{\partial t} + \mathbf{C}_{s\pi} \frac{\partial \bar{p}^\pi}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{f}^u}{\partial t} \quad (41)$$

$$\mathbf{P}_{ww} \frac{\partial \bar{p}^w}{\partial t} + \mathbf{C}_{wg} \frac{\partial \bar{p}^g}{\partial t} + \mathbf{C}_{w\pi} \frac{\partial \bar{p}^\pi}{\partial t} + \mathbf{C}_{ws} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \mathbf{H}_{ww} \bar{p}^w = \mathbf{f}^w \quad (42)$$

$$\mathbf{C}_{gw} \frac{\partial \bar{p}^w}{\partial t} + \mathbf{P}_{gg} \frac{\partial \bar{p}^g}{\partial t} + \mathbf{C}_{g\pi} \frac{\partial \bar{p}^\pi}{\partial t} + \mathbf{C}_{gs} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \mathbf{H}_{gg} \bar{p}^g = \mathbf{f}^g \quad (43)$$

$$\mathbf{C}_{\pi w} \frac{\partial \bar{p}^w}{\partial t} + \mathbf{C}_{\pi g} \frac{\partial \bar{p}^g}{\partial t} + \mathbf{P}_{\pi\pi} \frac{\partial \bar{p}^\pi}{\partial t} + \mathbf{C}_{\pi s} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \mathbf{H}_{\pi\pi} \bar{p}^\pi = \mathbf{f}^\pi \quad (44)$$

Ordenando términos y expresando en forma matricial se tiene,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_E & \mathbf{C}_{sw} & \mathbf{C}_{sg} & \mathbf{C}_{s\pi} \\ \mathbf{C}_{ws} & \mathbf{P}_{ww} & \mathbf{C}_{wg} & \mathbf{C}_{w\pi} \\ \mathbf{C}_{gs} & \mathbf{C}_{gw} & \mathbf{P}_{gg} & \mathbf{C}_{g\pi} \\ \mathbf{C}_{\pi s} & \mathbf{C}_{\pi w} & \mathbf{C}_{\pi g} & \mathbf{P}_{\pi\pi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{u}}} \\ \dot{\bar{p}}^w \\ \dot{\bar{p}}^g \\ \dot{\bar{p}}^\pi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_{ww} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{H}_{gg} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{H}_{\pi\pi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{p}^w \\ \bar{p}^g \\ \bar{p}^\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^u \\ \mathbf{f}^w \\ \mathbf{f}^g \\ \mathbf{f}^\pi \end{bmatrix} \quad (45)$$

donde las matrices que forman el sistema están expuestas en el Anexo.



## 8. Ejemplos numéricos

### 8.1. Columna de suelo unidimensional

El siguiente ejemplo fue propuesto con el fin de mostrar el comportamiento del modelo matemático ante un caso geométrico muy utilizado en la literatura (figura 2) especializada de mecánica de suelos. El problema consiste en un estrato de suelo unidimensional que se encuentra parcialmente saturado, coexistiendo en los vacíos dejados por la matriz sólida del suelo sustancias líquidas, gaseosas y una sustancia no soluble con ninguna de las anteriores.

Los datos físicos y geométricos del problema son los siguientes:  $H = 1.00m$ ;  $B = 0.10m$ ;  $q = 10.0Kpa$ ;  $E = 1000.0Kpa$ ;  $\mu = 0.3$ ;  $\phi = 30^\circ = 0,5236rad$ ;  $c = 50.0Kpa$ ;  $e_0 = 2.0$ ;  $k_y = 0.00864m/dia$ ;  $S_w = 0.50$ ;  $S_\pi = 0.40$ .

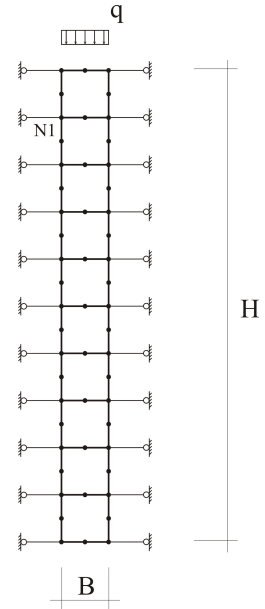


Figure 2: Mallado y condiciones de borde

Introducción

Volumen elemental...

Ec. de balance...

Ec. de balance...

Relaciones...

Ec. generales de...

Modelo...

Ejemplos numéricos

Conclusiones

Anexo



Página 18 de 26

Full Screen

Cerrar



Universidad  
Nacional del  
Nordeste

Introducción

Volumen elemental...

Ec. de balance...

Ec. de balance...

Relaciones...

Ec. generales de...

Modelo...

Ejemplos numéricos

Conclusiones

Anexo



Página 19 de 26

Full Screen

Cerrar

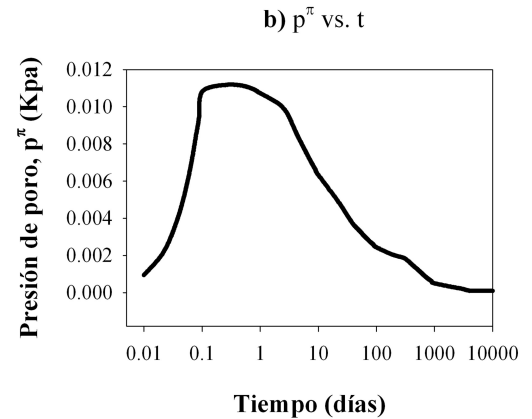
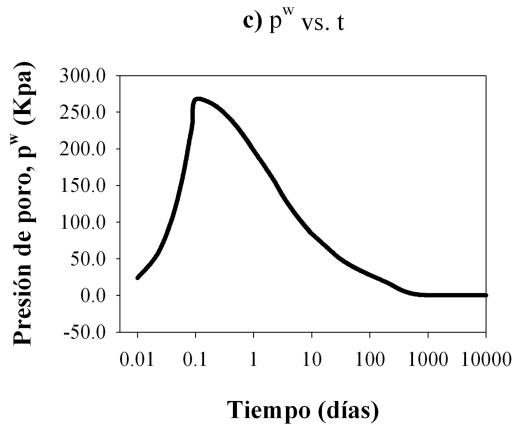
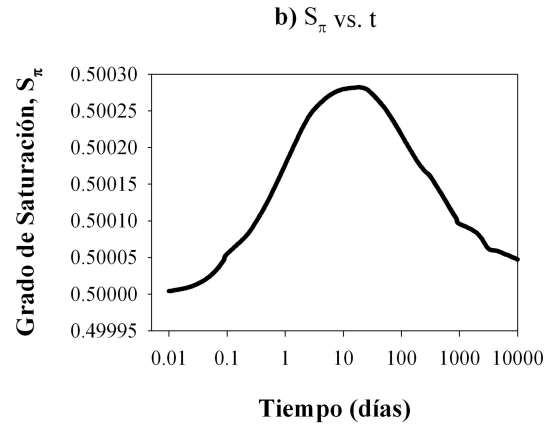
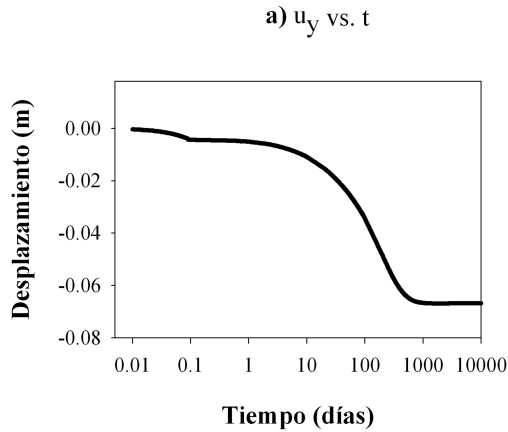


Figure 3: Columna de suelo unidimensional. Resultados numéricos: a) Desplazamiento vs. Tiempo ; b) Grado de Saturación de Poluente vs. Tiempo ; c) Presión de Poro de Agua vs. Tiempo ; d) Presión de Poro de Poluente vs. Tiempo



## 8.2. Pozo de bombeo

El siguiente ejemplo consiste en un pozo de extracción de agua subterránea donde diferentes estratos de suelo fueron considerados, representando un perfil de suelo característico de la región del noreste de la República Argentina (Manzollino, 2003). El estrato superficial (*Estrato 1*) consiste en una arena de baja saturación, el estrato siguiente (*Estrato 2*) se trata de una arcilla saturada con muy baja permeabilidad y el último estrato (*Estrato 3*) consiste en una arena de alto grado de saturación con presencia de un poluente inmiscible.

Los datos geométricos del problema son los siguientes (ver figura 4): altura  $H = 2.00m$ ; ancho  $B = 2.00m$ ; diámetro de la cañería de extracción  $d = 0.20m$ ; en cuanto a las características físicas del perfil de suelo las mismas fueron ordenadas en la tabla 1.

Propiedad de los materiales	<i>Estrato 1</i>	<i>Estrato 2</i>	<i>Estrato 3</i>
Módulo de elasticidad, $E[Kpa]$	3000.0	1500.0	2500.0
Módulo de Poisson, $\mu$	0.3	0.3	0.3
Peso específico, $\gamma[tn/m^3]$	2.0	2.0	2.5
Ángulo de fricción interna, $\phi[rad]$	0,5236	0,5236	0,5236
Cohesión, $c[Kpa]$	0.0	50.0	50.0
Relación inicial de vacíos, $e_0$	1.0	2.0	1.0
Compresibilidad de los granos, $K_s[Kpa]$	1000000.0	1000000.0	1000000.0
Permeabilidad horizontal, $k_x[m/dia]$	1.728	0.001728	0.01728
Permeabilidad vertical, $k_y[m/dia]$	0.864	0.000864	0.00864
Grado de saturación inicial de agua, $S_w$	0.40	0.50	0.40
Grado de saturación inicial de , $S_\pi$	0.00	0.50	0.50

Table 1: Propiedades físicas de un perfil de suelo característico del NEA



Universidad  
Nacional del  
Nordeste

- Introducción
- Volumen elemental...
- Ec. de balance...
- Ec. de balance...
- Relaciones...
- Ec. generales de...
- Modelo...
- Ejemplos numéricos
- Conclusiones
- Anexo

Navigation controls:

- Left arrow
- Right arrow
- Left arrow
- Right arrow
- Página 21 de 26
- Full Screen
- Cerrar

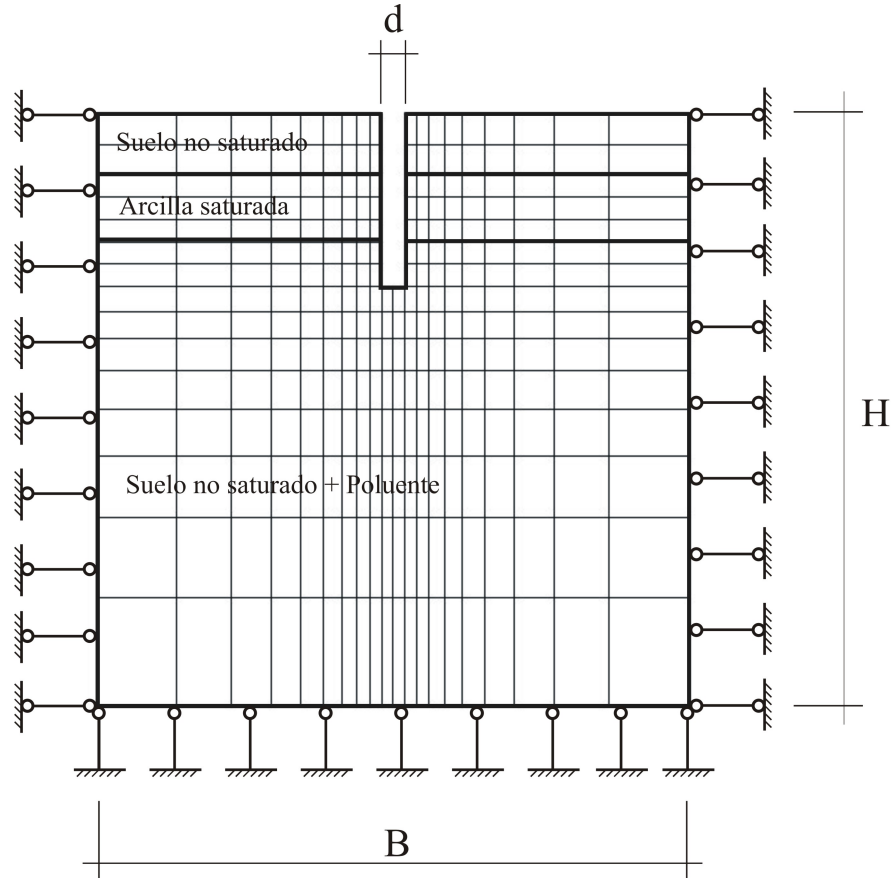


Figure 4: Mallado y condiciones de borde del problema de extracción de agua subterránea en presencia de poluentes (286 elementos)



Universidad  
Nacional del  
Nordeste

Por último, en las figuras 6 y 5 se observan el estado tensional del poro de agua y de poluente respectivamente, mostrando una importante similitud en cuanto a la variación de espacial de las presiones.

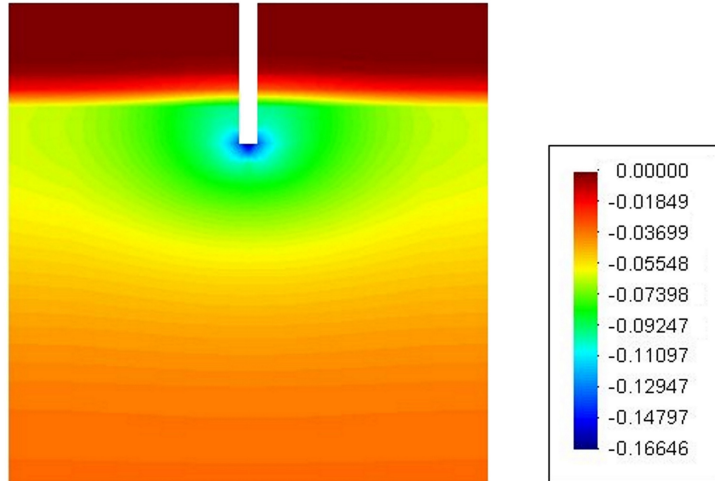


Figure 5: Presión de poro de la agua a las 30 horas

Introducción

Volumen elemental...

Ec. de balance...

Ec. de balance...

Relaciones...

Ec. generales de...

Modelo...

Ejemplos numéricos

Conclusiones

Anexo



Página 22 de 26

Full Screen

Cerrar



Universidad  
Nacional del  
Nordeste

Introducción

Volumen elemental...

Ec. de balance...

Ec. de balance...

Relaciones...

Ec. generales de...

Modelo...

Ejemplos numéricos

Conclusiones

Anexo



Página 23 de 26

Full Screen

Cerrar

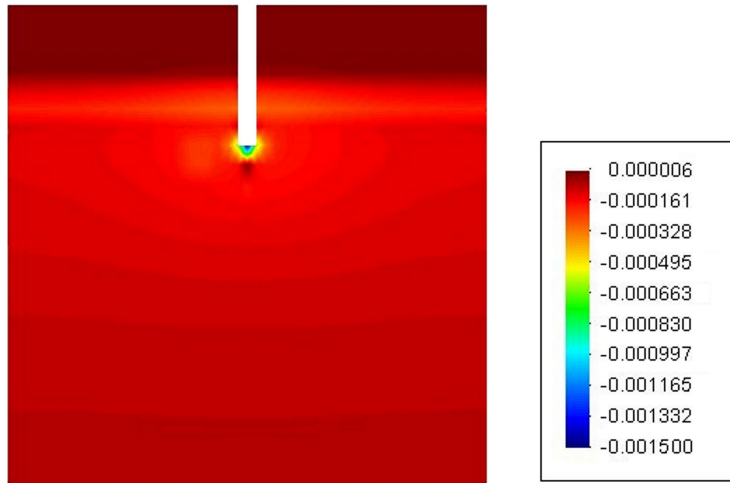


Figure 6: Presión de poro de la fase poluente a las 30 horas



Universidad  
Nacional del  
Nordeste

## 9. Conclusiones

Se ha presentado un modelo matemático discreto por el método de los elementos finitos capaz de simular la distribución de presiones y desplazamientos de un material poroso constituido por una fase sólida y tres fases fluidas comportándose en forma acoplada bajo un estado de temperatura isotérmico. Los resultados numéricos describen la concordancia entre el comportamiento cualitativo de las distintas fases.

*Introduccion*

*Volumen elemental...*

*Ec. de balance...*

*Ec. de balance...*

*Relaciones...*

*Ec. generales de...*

*Modelo...*

*Ejemplos numéricos*

*Conclusiones*

*Anexo*



*Página 24 de 26*

*Full Screen*

*Cerrar*





Universidad  
Nacional del  
Nordeste

## 10. Anexo

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_E &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_E \mathbf{B} \, d\Omega & \mathbf{B} &= \mathbf{L} \mathbf{N}_u \\ \mathbf{C}_{sw} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \alpha_{12} \mathbf{N}_p \, d\Omega & \mathbf{C}_{ws} &= \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \alpha_{21} \mathbf{B} \, d\Omega \\ \mathbf{C}_{sg} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \alpha_{13} \mathbf{N}_p \, d\Omega & \mathbf{C}_{gs} &= \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \alpha_{31} \mathbf{B} \, d\Omega \\ \mathbf{C}_{s\pi} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \alpha_{14} \mathbf{N}_p \, d\Omega & \mathbf{C}_{\pi s} &= \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \alpha_{41} \mathbf{B} \, d\Omega \\ \mathbf{C}_{wg} &= \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \alpha_{23} \mathbf{N}_p \, d\Omega & \mathbf{C}_{gw} &= \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \alpha_{32} \mathbf{N}_p \, d\Omega \\ \mathbf{C}_{w\pi} &= \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \alpha_{24} \mathbf{N}_p \, d\Omega & \mathbf{C}_{\pi w} &= \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \alpha_{42} \mathbf{N}_p \, d\Omega \\ \mathbf{C}_{g\pi} &= \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \alpha_{34} \mathbf{N}_p \, d\Omega & \mathbf{C}_{\pi g} &= \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \alpha_{43} \mathbf{N}_p \, d\Omega \\ \mathbf{P}_{ww} &= \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \alpha_{22} \mathbf{N}_p \, d\Omega & \mathbf{P}_{gg} &= \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \alpha_{33} \mathbf{N}_p \, d\Omega \\ \mathbf{P}_{\pi\pi} &= \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \alpha_{44} \mathbf{N}_p \, d\Omega \end{aligned}$$

Introducción

Volumen elemental...

Ec. de balance...

Ec. de balance...

Relaciones...

Ec. generales de...

Modelo...

Ejemplos numéricos

Conclusiones

Anexo



Página 25 de 26

Full Screen

Cerrar



Universidad  
Nacional del  
Nordeste

$$\mathbf{H}_{ww} = \frac{1}{S_w \rho^w} \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \frac{\mathbf{k}k^{rw}}{\mu^w} \nabla \mathbf{N}_p d\Omega$$
$$\mathbf{H}_{gg} = \frac{1}{S_g \rho^g} \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \frac{\mathbf{k}k^{rg}}{\mu^g} \nabla \mathbf{N}_p d\Omega$$
$$\mathbf{H}_{\pi\pi} = \frac{1}{S_{\pi} \rho^{\pi}} \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \frac{\mathbf{k}k^{r\pi}}{\mu^{\pi}} \nabla \mathbf{N}_p d\Omega$$

$$\mathbf{f}^u = \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T ((1-n)\rho^s + nS_w\rho^w + nS_g\rho^g + nS_{\pi}\rho^{\pi}) \mathbf{g} d\Omega + \int_{\Gamma_u^q} \mathbf{N}_u^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma_u^q$$

$$\mathbf{f}^w = \frac{1}{S_w \rho^w} \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \frac{\mathbf{k}k^{rw}}{\mu^w} \rho^w \mathbf{g} d\Omega - \int_{\Gamma_w^q} \mathbf{N}_p^T \frac{\mathbf{q}^w}{\rho^w} d\Gamma$$

$$\mathbf{f}^g = \frac{1}{S_g \rho^g} \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \frac{\mathbf{k}k^{rg}}{\mu^g} \rho^g \mathbf{g} d\Omega - \int_{\Gamma_g^q} \mathbf{N}_p^T \frac{\mathbf{q}^g}{\rho^g} d\Gamma$$

$$\mathbf{f}^{\pi} = \frac{1}{S_{\pi} \rho^{\pi}} \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \frac{\mathbf{k}k^{r\pi}}{\mu^{\pi}} \rho^{\pi} \mathbf{g} d\Omega - \int_{\Gamma_{\pi}^q} \mathbf{N}_p^T \frac{\mathbf{q}^{\pi}}{\rho^{\pi}} d\Gamma$$

Introducción

Volumen elemental...

Ec. de balance...

Ec. de balance...

Relaciones...

Ec. generales de...

Modelo...

Ejemplos numéricos

Conclusiones

Anexo



Página 26 de 26

Full Screen

Cerrar