Centro de Métodos Numéricos y Computacionales en Ingeniería
Facultad de Ciencias Exactas & Tecnológicas
Universidad Nacional de Tucumán

MODELACIÓN NUMÉRICO-COMPUTACIONAL DEL COMPORTAMIENTO NO LOCAL DE MEDIOS POROSOS PARCIALMENTE SATURADOS A ESCALAS MÚLTIPLES

por

Javier Luis Mroginski

Director: Prof. Dr. Ing. Guillermo Etse

Tesis presentada como requerimiento parcial
para acceder al grado de
Doctor en Ciencias Exactas e Ingeniería

Febrero, 2013

Editado en LaTeX

16 de agosto de 2013

Resumen

En el presente trabajo, se propone una teoría no local basada en gradientes termodinámicamente consistente para simular numéricamente el complejo proceso de degradación de la resistencia mecánica en medios porosos cohesivos-friccionales parcialmente saturados. El modelo constitutivo incluye una ley de endurecimiento clásica o local y una formulación de ablandamiento con parámetros de estado no locales basado en la teoría de gradiente. La longitud interna característica en régimen de ablandamiento determina la sensibilidad del ancho de banda de localización en los medios porosos parcialmente saturados con respecto en función del estado tensional y de las condiciones hidráulicas gobernantes. De esta manera, la ubicación del punto de transición entre el modo de falla frágil y el dúctil puede ser identificado en forma realista dependiendo de la presión de confinamiento y nivel de saturación del medio.

Por otra parte, el problema de localización de deformaciones plásticas es estudiado mediante el análisis espectral de la condición de bifurcación discontinua en medios poroplásticos no locales basados en gradientes. Para evaluar la dependencia del punto de transición entre las formas de falla dúctil y frágil en término de las condiciones hidráulicas y el estado tensional, se deduce el tensor acústico de localización para ambas condiciones de borde hidráulicas, drenada y no drenada, basado en la teoría de propagación de la ondas en medios continuos. Por otra parte, se deduce la expresión analítica para el módulo de endurecimiento crítico mediante el estudio de las propiedades espectrales de la tensor acústico de localización en condiciones drenadas y no drenadas.

En el presente trabajo se emplean dos modelos materiales para describir el comportamiento mecánico inelástico del suelo arcilloso y del hormigón jóven, en el marco de la teoría de medios porosos. En primer lugar el modelo material empleado para describir la evolución plástica de medios porosos es el Cam Clay modificado, que ha sido ampliamente utilizado en la mecánica de suelos saturados y parcialmente saturados. Por otro

lado, se emplea criterio parabólico de Drucker-Prager comúnmente utilizado en formulaciones constitutivas de materiales porosos cuasi-frágiles como el hormigón. En este sentido, se presenta el análisis de localización de cada uno de los modelos materiales adoptados mostrando la influencia de la presión de poros y el grado de no asociatividad del modelo de material en la determinación del punto de transición entre las formas de falla frágil y dúctil.

Al estudiar los medios porosos, el efecto no local restringido a las variables internas introduce un nuevo concepto de la longitud interna característica, además se debe considerar la influencia de la fase porosa en el comportamiento constitutivo no local a través de una longitud interna característica nueva con respecto a la fase porosa, l_p, es decir, se presentan múltiples longitudes internas.

A continuación, con el fin de resolver el problema de valores de borde se propone una nueva formulación de elemento finito para simular numéricamente en forma objetiva el comportamiento de falla difusa y localizada en medios poroplásticos no locales basados en gradientes para, condiciones de saturación total o parcial. El elemento finito propuesto incluye funciones de interpolación con continuidad de primer orden (C_1) para el campo de las variables internas, mientras que para los campos cinemáticos y de presión de poro se emplean las funciones de interpolación clásica de continuidad C_0. Esta formulación de elemento finito es compatible con la teoría de gradiente termodinámicamente consistente para medios porosos propuesto por Mroginski, et al. (2011).

Para estudiar la eficiencia numérica de esta formulación de elemento finito, se combina la teoría constitutiva poroplastica no-local de gradiente propuesta con el modelo material Cam Clay modificado para medios continuos parcialmente saturado. De este modo, la deformación volumétrica del esqueleto sólido y la porosidad plástica son las variables internas que intervienen en la formulación constitutiva. Los resultados numéricos de este trabajo permiten demostrar la capacidad de esta formulación de elemento finito para capturar los modos de falla difusos y localizados, en función de la presión de confinamiento y en el grado de saturación del medio poroso.

Keyword Medios porosos; Consistencia termodinámica; Teoría de gradientes; Elemento finito de continuidad C_1; Bifurcación discontinua; Ablandamiento.

Índice general

Índice de cuadros

Índice de figuras

CAPÍTULO 1

Introducción

La mecánica de medios porosos constituye una disciplina de gran relevancia en diversas áreas del conocimiento como ser la Geofísica, Biomecánica y Ciencias de los Materiales. Su principal objetivo es la descripción de la cinemática y la presión de poro del medio continuo poroso cuando es sometido a acciones mecánicas y/o física arbitrarias. Probablemente la principal ventaja del empleo de la Mecánica de Medios Continuos en medios porosos para describir o predecir la compleja respuesta del comportamiento macroscópico de materiales cohesivos-friccionales basados en los aspectos fundamentales de su microestructura, ademas de tener en cuenta las propiedades hidráulicas y su influencia en el mecanismo de falla resultante fueron reconocidos por varios autores en la [10, 14, 109, 56]. Como consecuencia, la tendencia a sustituir el marco teórico de la mecánica de medios continuos clásicos con la mecánica no-lineales porosos es bastante observada. En primer lugar, este proceso se llevó a cabo en el caso de la mecánica de suelos, [31, 21], pero posteriormente fue aplicado a medios cohesivos-friccionales como el hormigón [125, 94, 71] y también para el caso de biomateriales [80, 96].

1.1 Inestabilidad material

Los materiales cuasi-frágiles como el hormigón o el suelo tienen un comportamiento mecánico muy complejo cuando las deformaciones inelásticas acumuladas son grandes. Además, la predicción de la forma falla y el punto de transición entre los modos de falla frágil y dúctil se vuelve muy compleja de determinar debido a la diversidad de variables que gobiernan el proceso de degradación mecánica en estos materiales estructurales.

En el contexto de mecánica clásica de medios continuos no porosos el concepto de bifurcación discontinua por medio del llamado indicador o condición de localización [38, 57] establece las bases matemáticas para distinguir entre modos de falla difusa y localizada o frágil. Existen numerosos modelos constitutivos basados en medios continuos no porosos con fisuras distribuidas (smeared crack-based) que emplean el concepto de bifurcación discontinua para evaluar en forma consistente los modos de falla bajo diferentes estados tensionales, [92]. La situación crítica se presenta eventualmente cuando la condición de bifurcación discontinua se cumple en régimen de endurecimiento previo al pico. Esta

situación puede ocurrir en materiales cohesivos-friccionales cuando son sometidos a estados de carga monotónicas de compresión con bajos niveles de confinamiento debido al procesos micromecánicos de dilatación excesiva, lo cual puede conducir a la falla global del material [39].

En cuanto a continuos no porosos, muchos autores realizaron estudios sobre el comportamiento de post pico y las condiciones bifurcación discontinua a través de la determinación analítica del módulo de endurecimiento crítico [140, 84, 104, 105, 93], considerando en algunos casos comportamiento constitutivo anisotrópico [140], materiales reforzados con fibra [34, 93] y formulaciones constitutivas enriquecidas mediante teorías no locales [134].

La extensión del concepto de fisuras distribuidas (smeared-crack) a medios porosos permite analizar la influencia del grado de saturación (o la presión de poro) y la presión de confinamiento en la determinación del punto de transición entre las formas de falla frágil y dúctil. Este análisis puede hacerse tanto en el espacio de la tensión principales como en el espacio de los invariantes, según sea mas conveniente para el estudio. Sin embargo, la extensión de la teoría de la bifurcación discontinua a medios porosos no es sencilla debido a las dificultades relacionadas con los campos adicionales, básicamente gas y líquido, y sus eventuales saltos o discontinuidades. En este trabajo se siguieron las contribuciones al respecto realizadas en [30, 109, 14, 31, 127, 107, 49, 25, 83]. En algunas de estas contribuciones [127, 107] la teoría de bifurcación discontinua se uso para diferenciar los modos de falla frágil y dúctil en medios porosos, siguiendo trabajos similares relacionados con formulaciones materiales basadas en el concepto de fisura distribuida en medios no porosos.

Por lo tanto, en relación a los medios porosos, debido a la diversidad de variables envueltas el proceso de degradación plástica, la condición de bifurcación discontinua fue estudiada desde diferentes puntos de vista, considerando diferentes factores como la influencia del ángulo de Lode [142], el contenido de humedad o presión de fluido [69, 107], la porosidad [141], la permeabilidad [138], las condiciones de borde hidráulicas [76], la temperatura [118], etc.

Como es bien sabido, cuando la condición de bifurcación discontinua se cumple acontece un inconveniente adicional en la solución del problema de valores de borde clásico. Dado que la singularidad del tensor acústico de localización conduce a la pérdida de elipticidad de la solución de elementos finitos numérico. En estos casos se requieren de formulaciones constitutivas enriquesidas con el fin de evitar la dependencia patológica de la solución numérica con la discretización de los elementos finitos. En este sentido, se deben incorporar en las formulaciones constitutivas campos cinemáticos de segundo orden [22, 23, 40, 2], o bien formulaciones de gradiente simplificadas donde las variables internas son las únicas con características no locales [120, 133, 35]. Sin embargo, al considerar medios porosos, el efecto no local restringido a las variables internas introduce un nuevo concepto sobre la longitud interna característica [77, 75] y la influencia de la fase porosa en el comportamiento constitutivo no local debe ser considerado a través de una nueva longitud interna característica relacionada a la fase porosa, l_p, es decir que se deben considerar longitudes internas múltiples [110].

Además, en el análisis de localización de medios porosos las condiciones de contorno

hidráulicas desempeñan un papel fundamental y deben ser considerados apropiadamente. De ese modo, muchos autores estudiaron la condición de bifurcación discontinua considerando condiciones de borde drenadas y no drenadas [138, 46, 141, 139, 105].

1.2 Formulaciones no locales basadas en gradientes

Otros desarrollos de gran importancia en la mecánica de medios continuos clásicos fue la ampliación del marco teórico termodinámicamente consistente a los medios continuos no locales. El objetivo principal fue la regularización de comportamiento post pico de la respuesta en cuanto al tamaño y orientación de la discretización espacial empleada (malla) en caso de análisis por elementos finitos, basado en los aspectos fundamentales de la microestructura del material [120, 40, 36, 2, 133].

Como es bien sabido, las formulaciones constitutivas basadas en gradientes de deformación superior son muy usadas en el modelado mecánico de materiales que presentan comportamiento post pico con ablandamiento. Desde uno de los trabajos pioneros de Vardoulakis y Aifantis (1991) [126], la teoría material de gradientes de deformación ha tenido gran relevancia e interés en la comunidad científica internacional.

Entre otras propuestas, los trabajos realizados en [90, 17, 87, 115, 131, 42] demuestran tanto el amplio uso de la teoría de gradiente en los materiales sólidos como su eficacia para limitar la dependencia de la solución numérica con la malla de elementos finitos.

En los últimos años se realizaron avances y contribuciones significativas en las formulaciones de gradiente no locales para materiales no porosos. Marcos termodinámicos fueron considerados en las propuestas de [2, 3, 97, 98, 128, 47, 54, 133]. Algunos aspectos fenomenológicos fueron considerados a nivel microscópico en formulaciones no locales de gradientes por [99, 9, 64]. Descripciones objetivas de la longitud interna de gradientes basada en conceptos sobre plasticidad de cristal fueron estudiados por [8, 62, 63, 33], por su parte, la influencia de la presión actual de confinamiento en caso de materiales cuasi-frágiles como el hormigón fue estudiado por [133]. Finalmente, la influencia de la presión de poro en la longitud interna característica de los medios porosos fue analizada por [75]. La anisotropía material fue considerada en la formulación de las leyes de evolución de las variables internas en caso de plasticidad gradiente por [4, 129]. Análisis geométrico de la condición de bifurcación en el caso de las formulaciones de gradiente no locales fue estudiado por [130, 37]. La formulación de modelos de gradientes acoplados con daño y considerando la implementación numérica del método de elementos finitos fue estudia por [120, 68, 27].

Desde el punto de vista de las capacidades predictivas, los modelos constitutivos basados en gradiente de deformación conducen a modos de falla difusas, en general. Esto es debido a las ecuaciones de gobierno que surgen de la teoría de gradientes están bien condicionadas intrínsecamente y son capaces de suprimir la pérdida de elipticidad que se produce al cumplirse la condición de bifurcación discontinua en los modelos constitutivos locales. Sin embargo, la propiedad de difusión que poseen las formulaciones de gradientes en los modos de falla constituye una desventaja importante de esta teoría material no local cuando se estudia el comportamiento de falla de materiales cohesivo-friccionales

como piedras, hormigones y suelos parcialmente saturados, cuando son sometidos a estados de carga de tracción o compresión con bajos niveles de confinamiento [106, 61]. En estos casos las deficiencias de los modelos constitutivos de gradiente para reproducir los modos de falla localizadas de materiales cuasi-frágiles afecta fuertemente la precisión de la predicción numérica a pesar de que dichas soluciones sean independientes de malla empleada.

Recientemente, los conceptos de no localidad fueron ampliados para la formulación de modelos de materiales porosos [77, 65, 58, 78]. Análogamente, la consideración de aspectos microscópicos en la formulación de las teorías constitutivas no-locales para materiales porosos se deben a [143, 82, 137].

1.3 Problema de valores de borde

Desde el punto de vista de la solución numérica por el método de elementos finitos, las formulaciones constitutivas de gradientes de deformación requieren cuidados especiales comparados con los modelos de plasticidad clásica. En los modelos de elementos finitos de gradientes se requiere la aproximación del Laplaciano del multiplicador plástico en el dominio y en el contorno del elemento. Las primeras contribuciones sobre tecnología de elementos finitos relacionada con formulaciones de gradientes en medios no porosos se deben a de Borst Mühlhaus (1992) [22] quienes propusieron un elemento finito de continuidad C_1 para aproximar los campos de gradientes de deformación no local, mientras que Xikui y Cescotto (1996) [136] quienes propusieron un elemento finito de cuatro nodos con un punto de integración para deformaciones finitas y gradientes de deformación. Algunas formulaciones de elementos finitos basadas en funciones de continuidad C_0 para plasticidad de gradientes en continuos sólidos fueron propuestos en [24, 100, 112, 135, 122]. El trabajo de de Borst y Pamin (1996) [24] considera funciones de penalidad para evitar iteraciones adicionales en el procedimiento de solución para los campor de deformación no locales de gradientes. Este elemento finito incluye rotaciones como variables nodales adicionales al campo cinemático clásico. Cabe señalar que el rendimiento numérico de esta formulación de elementos finitos no es muy eficiente, según se detalla en [85]. En otras formulaciones de elementos finitos basados en gradientes que emplean funciones de forma de continuidad C_0 propuestos en [121, 131], se consideran los efectos no locales restringido a las variables internas, estas formulaciones conducen a soluciones numéricas para las variables de campos que implica un esfuerzo numérico adicional al introducir un algoritmo iterativo global para obtener el laplaciano multiplicador plástico. Otras propuestas relacionadas con elementos finitos de continuidad C_0 para sólidos no locales fueron presentados en [135, 122]. Por último, la propuesta de [100] está relacionado con metales porosos y requiere también un procedimiento iterativo adicional para resolver el sistema de ecuaciones de gobierno.

En cuanto al problema de localización de deformaciones en suelos saturados Stankiewicz y Pamin desarrollaron una formulación de elementos finitos particularizado para el modelo material Cam Clay modificado basado en la teoría de gradientes de deformación de orden superior propuesto en [22]. Considera, por un lado, un modelo de una fase en condiciones hidráulicas totalmente drenadas y no drenadas [117, 86] mientras

que, por otro lado, proponen una formulación bifásica que tiene en cuento la permeabilidad y, consecuentemente, el rol estabilizador de la fase fluida [116]. A pesar de los buenos resultados mostrados por este modelo, presenta una desventaja desde el punto de vista numérico, dado que en esta formulación de gradientes el campo cinemático completo posee características no locales se requiere de disposiciones especiales en el algoritmo de solución para tener el mismo nivel de precisión y eficiencia que otros modelos de materiales no locales.

Por lo tanto, a pesar de los considerables avances realizados en las formulaciones de elementos finitos basados en gradientes para materiales cuasi-frágiles, todavía persiste la necesidad de nuevas tecnologías eficientes de elementos finitos para medios porosos parcialmente saturados, donde los campos cinemáticos del esqueleto sólido interactúan con los campos hidráulico y la presión de la fase porosa en forma acoplada.

1.4 Organización del trabajo

Este trabajo de tesis está estructurado de la siguiente manera:

Capítulo 2 En este Capítulo, se introduce el marco teórico general del trabajo de tesis, considerando además elasticidad lineal y plasticidad clásica en medios porosos. Por otro lado, se presentan dos puntos de vista diferentes para modelar el comportamiento constitutivo elástico de los medios porosos. La primera, está basada en la *Teoría de Mezclas*, es muy usada en formulaciones multifásica de medios porosos [95, 67, 74] a pesar de que su tratamiento elastoplástico no sea termodinamicamente consistente. Por otra parte, el segundo marco teórico presentado se basa en la *Teoría Generalizada de Medios Porosos* [18, 30]. Se presentan las hipótesis y postulados de la Termodinámica relativas a los medios porosos. Así mismo, se establecen también las reglas básicas de la teoría del flujo de poroplasticida así como también el Principio del Máximo Trabajo Plástico para continuos porosos.

Capítulo 3 En el Capítulo 3 se propone una nueva teoría constitutiva no local basada en gradientes termodinámicamente consistente para medios porosos parcialmente saturados [77]. El objetivo principal de este estudio teórico es presentar un marco general para las formulaciones de la plasticidad de gradiente basado en la Teoría Generalizada de Medios Porosos [18]. A través de un mecanismo selectivo del nivel de no localidad de gradiente esta teoría material es capaz de reproducir los modos de falla difusa y localizada en medios porosos parcialmente saturados. En esta formulación constitutiva enriquecida el efecto no local se limita a las variables internas, basándose en trabajos anteriores sobre medios continuos sólidos (no porosos) [119, 132]. Esta hipótesis fundamental introduce un nuevo concepto de la longitud interna característica [77, 75] dado que la contribución no local de la fase porosa en el comportamiento constitutivo del material debe ser considerado a través de una longitud interna adicional correspondiente a la fase porosa, l_p.

Capítulo 4 Después de la introducción del marco teórico en el capítulos anteriores, en el Capítulo 4 se presenta la particularización de la teoría general a un modelo de

material específico. A tal efecto, dos modelos de materiales muy conocidos para medios porosos serán considerados, el modelo de plasticidad Cam Clay modificado empleado en la predicción mecánica de medios porosos saturados y parcialmente saturados, así como también el modelo material de Drucker-Prager parabólico usado comúnmente en las formulaciones constitutivas de hormigón. Además, la definición matemática de las longitudes características internas para esqueleto sólido y la fase porosa son presenta, así como las funciones potenciales plásticas termodinámicamente consistente.

Capítulo 5 En este Capítulo, la condición de bifurcación discontinua para medios porosos parcialmente saturados, considerando ambas condiciones de contorno hidráulicos drenadas y no drenadas, basados en la teoría de la propagación de ondas es presentada. Además, el módulo de endurecimiento crítico se deduce también para ambas condiciones de contorno hidráulicas drenadas y no drenadas. Los resultados del análisis de localización son presentados en el espacio de tensiones principales con el fin de predecir el estado tensional que conduce a modos de falla localizada en régimen de endurecimiento. La influencia del grado de saturación o la presión de los poros y el grado de no-asociatividad son estudiados a través del análisis de la tensor acústico en los espacios (σ',det(A),p) y (σ',det(A),η), respectivamente [76].

Capítulo 6 En este Capítulo, se plantea la solución del problema de valores de borde. En este sentido se propone una nueva formulación de elemento finito de continuidad C_1 para plasticidad de gradiente en medios porosos saturados y parcialmente saturados con la capacidad de reproducir los modos de falla tanto localizadas como difusas, que caracterizan a los materiales cuasi-frágiles como el hormigón y el suelo [75]. Un aspecto distinguido de esta formulación de elemento finito es la inclusión de funciones de interpolación de continuidad de primer orden (C_1) solamente para el campo de las variables internas mientras que los campos cinemáticos permanecen las funciones de interpolación clásicas de continuidad C_0. Similar a trabajos anteriores [121, 131], la presente formulación de elementos finitos considera que el efecto no local esta restringido a las variables internas únicamente. Esto reduce la complejidad del algoritmo de solución de la formulación de elemento finito. Esta tecnología de elemento finito es particularmente apropiado para ser utilizado con la teoría gradiente termodinámicamente consistente propuesta en el Capítulo 3.

Capítulo 7 En este capítulo se presentan simulaciones numéricas de la formulación de elemento finito propuesto en el Capítulo 6 con el fin de probar el algoritmo de solución numérica y las capacidades predicción de falla en medios porosos, considerando la teoría constitutiva de gradiente presentado en el Capítulo 3 y el modelo material no asociado Cam Clay modificado del Capítulo 4. La influencia de la longitud característica de interna de gradiente en la ductilidad en régimen de post-pico también es evaluado.

Capítulo 8 En este Capítulo, las principales conclusiones y los desarrollos futuros de este trabajo de tesis son presentados.

Apéndices Finalmente, seis diferentes apéndices se incluyen con el fin de describir algunos detalles fuera del cuerpo principal de la tesis.

CAPÍTULO 2

Marco teórico

El principal objetivo de este Capítulo es presentar dos formas diferentes de modelar el comportamiento elástico de medios porosos.

La primera esta basada en la conocida Teoría de Mezclas, la cual es muy usada en el modelado de sistemas multifásicos y aplica las teorías generales de la mecánica del continuo particularizada a medios con diferentes fases inmiscibles. La principal hipótesis de esta teoría es que considera, en todo instante de tiempo, que todas las fases que componen el sistema están simultáneamente presentes, según su respectiva proporción, en cada punto material. De esta forma se postulan las leyes básicas de cantidad de momento, continuidad, energía, etc. Al igual que en otras formulaciones, la Teoría de Mezclas requiere que sean definidas algunas relaciones constitutivas con el fin de disminuir el numero de incógnitas primarias y resolver el problema de valores de borde. Sin embargo, probablemente la mayor desventaja de este tipo de modelos basadas en la Teoría de Mezclas es la falta de consistencia termodinámica de las formulaciones constitutivas elastoplásticas.

La siguiente teoría que se presenta en este Capítulo es la que será adoptada en la mayor parte del resto de la tesis. Esta teoría es la Teoría de Medios Porosos. La hipótesis principal de la misma es considerar al sistema multifásico como un sistema termodinámico abierto compuesto por diferentes fases continuas. En este concepto se asume que el medio porosos esta formado por una superposición de varios continuos cuya cinemática es desconocida, al mismo tiempo se produce un intercambio masa y energía entre los diferentes componentes del sistema termodinámico. Dado que las formulaciones constitutivas de cualquier componente requiere que su deformación sea referida a la configuración inicial, en segundo lugar se asume que el comportamiento de las fases fluidas puede ser referenciado a del esqueleto sólido.

2.1 Teoría de mezclas aplicada al modelado de medios porosos

La mecánica clásica asume una distribución continua de las partículas (sólidas y fluidas), para las cuales están establecidas las leyes de balance y las relaciones constitutivas.

Los fenómenos aquí estudiados ocurren en dominios ocupados por varias fases. La fase que siempre esta presente es la fase sólida, o esqueleto sólido, cuyos espacios vacíos se consideran llenos de fluidos (líquidos y gaseosos) los cuales se separan entre sí por una superficie llamada interfase. Aquí debe enfatizarse la diferencia que existe entre fases y componentes. Las fases son porciones químicamente homogéneas del sistema multifásico cuyo comportamiento mecánico se considera uniforme. Por su parte, los componentes son las partes individuales que conforman las fases y se comportan también en forma independiente, un ejemplo de ésto es lo que ocurre en la fase gaseosa, la cual puede estar compuesta por una mezcla de gases que son los componentes.

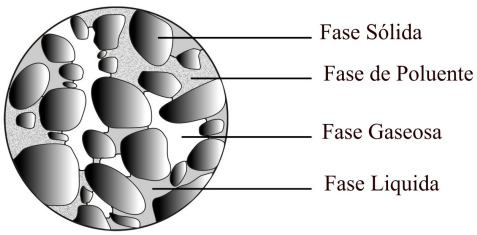

Figura 2.1: Medio poroso multifásico: elemento de volumen representativo

Para describir la configuración intergranular del medio multifásico al menos se identifican tres posibles niveles de observación de los medios multifásicos: el macroscópico, mesoscópico y el microscópico. A nivel microscópico (y mesoscópico) se considera la estructura real del medio poroso, la cual no es homogénea (ver Fig. 2.1). A este nivel, las ecuaciones de gobierno se plantean para cada componente por separado, lo que dificulta en gran medida la solución del problema [73, 74]. Por otro lado, las propiedades microscópicas de los medios porosos son de difícil obtención. Por estos motivos, y atendiendo a que los detalles microscópicos por lo general escapan a los intereses de la ingeniería, se considera suficientemente preciso hacer una descripción macroscópica del medio. Como principal característica, esta descripción asume que en cada punto material están presentes simultáneamente todas las fases en sus respectivas proporciones [67].

En estos procesos una fracción de volumen $\eta^\gamma = dv^\gamma/dv$ puede componerse por los siguientes elementos:

- Fase sólida, $\eta^s = 1 - n$, donde $n = \left(dv^w + dv^g + dv^\pi\right)/dv$ es la porosidad y dv^i es el diferencial de volumen del elemento i dentro del volumen representativo
- Fase líquida: $\eta^w = nS_w$, donde $S_w = dv^w/\left(dv^w + dv^g + dv^\pi\right)$ es el grado de saturación de agua.
- Fase gaseosa: $\eta^g = nS_g$, donde $S_g = dv^g/\left(dv^w + dv^g + dv^\pi\right)$ es el grado de saturación del aire.
- Fase de poluente inmiscible: $\eta^\pi = nS_\pi$, donde $S_g = dv^\pi/\left(dv^w + dv^g + dv^\pi\right)$ es el grado de saturación del poluente.

De las ecuaciones anteriores se desprende que:

$$S_w + S_g + S_\pi = 1 \tag{2.1}$$

y la densidad del medio multifásico:

$$\rho = \rho_s + \rho_w + \rho_g + \rho_\pi = (1-n)\,\rho^s + nS_w\rho^w + nS_g\rho^g + nS_\pi\rho^\pi \tag{2.2}$$

Dentro de esta condición, y dado que el medio está constituido por diferentes fases, el comportamiento mecánico de cualquiera de ellas puede ser referida al de otra fase previamente definida, por ejemplo la fase sólida. De esta manera, las velocidades relativas de los líquidos, gases y contaminantes pueden ser escritas de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{v}^{ws} = \boldsymbol{v}^w - \boldsymbol{v}^s \quad , \quad \boldsymbol{v}^{gs} = \boldsymbol{v}^g - \boldsymbol{v}^s \quad , \quad \boldsymbol{v}^{\pi s} = \boldsymbol{v}^\pi - \boldsymbol{v}^s \tag{2.3}$$

2.1.1 Ecuaciones de gobierno

En esta sección se tendrán en cuenta ahora las ecuaciones de balance clásicas de la Mecánica del Medio Continuo usadas para describir el comportamiento microscópico de una fase π. Para una propiedad termodinámica cualquiera, ψ, la ecuación general de conservación dentro de la fase π puede ser escrita como [70]:

$$\frac{\partial \rho\psi}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\psi\dot{\boldsymbol{r}}) - \operatorname{div}\boldsymbol{i} - \rho\,\boldsymbol{b} = \rho\,\boldsymbol{G} \tag{2.4}$$

donde $\dot{\boldsymbol{r}}$ es el valor de la velocidad de la fase π en un punto fijo del espacio, ρ es la densidad y $\boldsymbol{b}$ es el suministro externo de ψ, $\boldsymbol{i}$ es el vector de flujo asociado a ψ y $\boldsymbol{G}$ es la producción interna neta de ψ.

Ecuaciones de balance macroscópico

Las ecuaciones de balance macroscópico se obtienen a partir de la aplicación sistemática del método de residuos ponderados [50, 51, 52] a la ecuación de balance microscópico Ec. (2.4), en donde para cada componente se reemplaza la variable termodinámica y por la correspondiente propiedad microscópica [67].

El comportamiento de los contaminantes, o fluidos inmiscibles, puede ser representado en dos formas diferentes, dependiendo de su capacidad de mezclase con el resto de los fluidos o no. En el caso más general, es decir, cuando los contaminantes son inmiscibles, el comportamiento puede ser descrito como una fase fluida, mientras que si se trata de un contaminante soluble o miscible, tres procesos de transporte posibles deben ser considerados: advección, difusión y dispersión.

Fase sólida

Partiendo de Ec. (2.4) y recordando la expresión de la derivada material respecto del tiempo de cualquier función diferenciable, f^{α}, expresada en coordenadas espaciales y referida a una partícula en movimiento de la fase α, esta dado por [67]

$$\frac{\partial^{v} f^{\alpha}}{\partial t} = \frac{\partial^{\alpha} f^{\alpha}}{\partial t} + \mathrm{grad} f^{\alpha} \cdot \boldsymbol{v}^{v\alpha} \tag{2.5}$$

la expresión del balance de masa para la fase sólida se obtiene de:

$$\frac{\partial^{s} \rho_s}{\partial t} + \rho_s \mathrm{div}\ \boldsymbol{v}^{s} = 0 \tag{2.6}$$

donde $\boldsymbol{v}^{s}$ es la velocidad del esqueleto sólido.

$$\mathrm{div}\,(\rho_s \boldsymbol{v}^{s}) = \rho_s \mathrm{div}\ \boldsymbol{v}^{s} + grad\ \rho_s \cdot \boldsymbol{v}^{s} \tag{2.7}$$

Teniendo en cuenta Ec. (2.2) y Ec. (2.7), se obtiene:

$$\frac{(1-n)}{\rho^{s}} \frac{\partial^{s} \rho^{s}}{\partial t} - \frac{\partial^{s} n}{\partial t} + (1-n)\,\mathrm{div}\ \boldsymbol{v}^{s} = 0 \tag{2.8}$$

Fase liquida La ecuación microscópica de balance de masa para la fase líquida es similar a la correspondiente a la fase sólida, siendo la igualdad distinta de cero $\boldsymbol{G} \neq 0$ dado que el agua puede transformase en vapor y viceversa.

Luego, teniendo en cuenta Ec. (2.4), con $\rho \boldsymbol{G} = -\dot{\boldsymbol{m}}$ la siguiente expresión es obtenida

$$\frac{\partial^{w} \rho_w}{\partial t} + \rho_w \mathrm{div}\ \boldsymbol{v}^{w} = -\dot{\boldsymbol{m}} \tag{2.9}$$

donde $\boldsymbol{v}^{w}$ es la velocidad de masa de la fase líquida y $-\dot{\boldsymbol{m}}$ es la cantidad de agua transformada en vapor por unidad de volumen. Considerando Ec. (2.2) se llega a:

$$\frac{(1-n)}{\rho^{s}} \frac{\partial^{s} \rho^{s}}{\partial t} + \mathrm{div}\ \boldsymbol{v}^{s} + \frac{n}{\rho^{w}} \frac{\partial^{s} \rho^{w}}{\partial t} + \frac{n}{S_w} \frac{\partial^{s} S_w}{\partial t} + \frac{1}{S_w \rho^{w}} \mathrm{div}\,(n S_w \rho^{w} \cdot \boldsymbol{v}^{ws}) = -\frac{\dot{\boldsymbol{m}}}{S_w \rho^{w}} \tag{2.10}$$

Fase gaseosa La fase gaseosa se considera compuesta por dos componentes, aire seco (ga) y vapor de agua (gw). Dado que ambos componentes son miscibles y se comportan en forma similar pueden ser tratados como una sola fase, pero ocuparán el mismo diferencial de volumen, nS_g.

La ecuación de balance microscópico de esta fase esta dada nuevamente por Ec. (2.4) en el caso de despreciar la producción interna de masa de cada especie debido a las reacciones químicas entre ambas [52]. Así, la ecuación de balance para aire seco es:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(nS_g\rho^g\right) + \operatorname{div}\left(nS_g\rho^g\boldsymbol{v}^g\right) = \dot{\boldsymbol{m}} \tag{2.11}$$

con $\rho^g = \rho^{ga} + \rho^{gw}$ y $\boldsymbol{v}^g = 1/\rho^g\left(\rho^{ga}\boldsymbol{v}^{ga} + \rho^{gw}\boldsymbol{v}^{gw}\right)$

Una vez mas, luego de algunos pasos algebraicos, considerando Ecs. (2.3), (2.5) y (2.8) la siguiente relación es obtenida:

$$\frac{(1-n)}{\rho^s}\frac{\partial^s\rho^s}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{v}^s + \frac{n}{S_g}\frac{\partial^s S_g}{\partial t} + \frac{n}{\rho^g}\frac{\partial^s\rho^g}{\partial t} + \frac{1}{S_g\rho^g}\operatorname{div}\left(nS_g\rho^g\cdot\boldsymbol{v}^{gs}\right) = \frac{\dot{\boldsymbol{m}}}{S_g\rho^g} \tag{2.12}$$

Ecuaciones constitutivas y relaciones de estado

Para completar la descripción del comportamiento mecánico se requiere definir las relaciones constitutivas.

Tensor de tensiones de la fase fluida Aplicando de Segunda Ley de la Termodinámica al medio poroso multifásico (ver [73]) el tensor de tensiones en las fases fluidas puede ser escrito como

$$\boldsymbol{t}^\gamma = -\eta^\gamma p^\gamma\mathbf{I} \tag{2.13}$$

siendo $\mathbf{I}$ el tensor unitario de segundo orden, p^γ es la presión en la fase γ y η^γ es la fracción de volumen de la fase γ. Como se observa claramente el tensor de tensiones en fases fluidas no posee componentes desviadoras.

Tensor de tensiones de Cauchy para la fase sólida El tensor de tensiones para la fase sólida esta dado por

$$\boldsymbol{t}^s = (1-n)\left(\boldsymbol{t}_e^s - \boldsymbol{I}p^s\right) \tag{2.14}$$

siendo la presión de la fase solida

$$p^s = S_w p^w + S_g p^g \tag{2.15}$$

la fracción de volumen $(1-n)$ establece que $\boldsymbol{t}^s$ es la tensión ejercida sobre la fase sólida. Para obtener el tensor de tensiones de Cauchy total, $\boldsymbol{\sigma}$, se deben considerar en Ec. (2.14) las expresiones de tensiones para las fases líquidas y gaseosas Ec. (2.13). Luego,

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{t}^s + \boldsymbol{t}^w + \boldsymbol{t}^g = \boldsymbol{\sigma}' + \mathbf{I}\left(p^w S_w + p^g S_g\right) \tag{2.16}$$

Densidad de la masa sólida Al considerar que la fase sólida es compresible se puede obtener una relación de la variación temporal de la densidad de la masa sólida a partir de la ecuación diferencial de conservación de masa, asumiendo que la densidad de la fase solida en una función de p^s y $\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}'$

$$\frac{1}{\rho^s}\frac{\partial^s \rho^s}{\partial t} = \frac{1}{K_s}\frac{\partial^s p^s}{\partial t} - \frac{1}{3\left(n-1\right)K_s}\frac{\partial^s \left(\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}'\right)}{\partial t} \tag{2.17}$$

donde se tuvo en cuenta

$$\frac{1}{\rho^s}\frac{\partial^s \rho^s}{\partial p^s} = \frac{1}{K_s} \qquad , \qquad \frac{1}{\rho^s}\frac{\partial^s \rho^s}{\partial \left(\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}'\right)} = -\frac{1}{3\left(n-1\right)K_s} \tag{2.18}$$

donde K_s es coeficiente de compresibilidad del grano y $\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}'$ es el primer invariante del tensor de tensiones efectivo. Teniendo en cuenta ahora la relación constitutiva para el primer invariante del tensor de tensiones efectivo [70].

$$\frac{\partial^s \mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}'}{\partial t} = 3K_T\left(\mathrm{div}\boldsymbol{v}^s + \frac{1}{K_s}\frac{\partial^s p^s}{\partial t} - \beta_s\frac{\partial^s T}{\partial t}\right) \tag{2.19}$$

donde K_T es el módulo de deformación volumétrico. Combinando Ec. (2.17) y Ec. (2.19), se obtiene

$$\frac{1}{\rho^s}\frac{\partial^s \rho^s}{\partial t} = \frac{1}{1-n}\left[\left(\alpha-n\right)\frac{1}{K_s}\frac{\partial^s p^s}{\partial t} - \beta_s\left(\alpha-n\right)\frac{\partial^s T}{\partial t} - \left(1-\alpha\right)\mathrm{div}\ \boldsymbol{v}^s\right] \tag{2.20}$$

Para granos incompresibles se debe verificar que $1/K_s = 0$ y $\alpha = 1$, lo cual no implica que el esqueleto sólido sea rígido, dado que se reacomodan los espacios vacíos.

Ecuación de estado para la fase líquida Bajo la hipótesis de flujo isotérmico la ecuación de estado para la fase líquida, estudiada por Murty, et al (1994) [79], esta dada por

$$\rho^w = \rho^{wo}\exp\left[C_w\left(p^w - p^{wo}\right)\right] \tag{2.21}$$

donde el superíndice o indica que se trata del estado inicial, β_w es el coeficiente de expansión térmica y C_w es el coeficiente de compresibilidad. siendo su derivada respecto del tiempo:

$$\frac{1}{\rho^{wo}}\frac{\partial^w \rho^w}{\partial t} = \frac{1}{K_w}\frac{\partial^w p^w}{\partial t} \tag{2.22}$$

donde $K_w = 1/C_w$ es módulo de masa del agua. La Ec. (2.22) puede ser obtenida también a partir de la expresión diferencial de la ecuación de balance de masa [67].

Ecuación de estado para la fase gaseosa La fase gaseosa puede ser considerada como una mezcla perfecta de gases ideales, aire seco y vapor de agua. Así es posible usar las leyes de gases ideales relacionando la presión parcial, $p^{g\gamma}$, del componente γ, la concentración de masa, $\rho^{g\gamma}$, del componente γ en la fase gaseosa y la temperatura absoluta θ. Las ecuaciones de estado de un gas perfecto, aplicado a aire seco(ga), vapor de agua (qw) y aire húmedo (g) son [67]

$$p^g = p^{ga} + p^{gw} = \rho^{ga}\theta \mathrm{R}/M_a + \rho^{gw}\theta \mathrm{R}/M_w \tag{2.23}$$

donde R es la constante universal de los gases y M_w y M_g son las masas molares del vapor de agua y del aire seco, respectivamente, siendo para la mezcla de gases

$$\rho^g = \rho^{ga} + \rho^{gw} \qquad , \qquad M_g = \left(\frac{\rho^{gw}}{\rho^g}\frac{1}{M_w} + \frac{\rho^{ga}}{\rho^g}\frac{1}{M_a} \right)^{-1} \tag{2.24}$$

2.1.2 Ecuaciones generales de campo para modelado elastico de medios porosos

Las leyes de balance macroscópicos son ahora transformadas introduciendo las relaciones constitutivas definidas previamente.

Fase sólida El comportamiento de la fase sólida puede ser descripta con suficiente precisión por medio de la ecuación de balance de momento lineal, la cual se obtiene a partir de Ec. (2.4) estableciendo correctamente las variables de estado $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{G}$.

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \rho \boldsymbol{g} = 0 \tag{2.25}$$

donde $\boldsymbol{g}$ es el vector aceleración de la gravedad y el operador diferencial esta dado por

$$\mathbf{L}^T = \begin{vmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial x & \partial/\partial z & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{vmatrix} \tag{2.26}$$

Fase líquida Considerando la tasa del grado de saturación de la fase gaseosa a partir de Ec. (2.2), sin presencia de poluentes inmiscibles,

$$\frac{\partial S_g}{\partial t} = -\frac{\partial S_w}{\partial t} \tag{2.27}$$

Teniendo en cuenta la ecuación de estado de la fase líquida Ec. (2.22), la definición de presión en la fase sólida Ec. (2.15) y la densidad de la fase sólida Ec. (2.20), en la ecuación de balance macroscópico de la fase líquida Ec. (2.10), se tiene

$$\left[\frac{(\alpha-n)}{K_s}S_w\left(S_w+\frac{C_w}{n}\left(p^g-p^w\right)\right)+\frac{nS_w}{K_w}-C_w\right]\frac{\partial p^w}{\partial t}$$
$$\left[\frac{(\alpha-n)}{K_s}S_w\left(S_g-\frac{C_w}{n}\left(p^g-p^w\right)\right)+C_w\right]\frac{\partial p^w}{\partial t}$$
$$+\alpha\, S_w m^T\mathbf{L}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{\rho^w}\nabla^T\left[\frac{kk^{rw}}{\mu^w}\left(-\nabla p^w+\rho^w g\right)\right]=0 \quad (2.28)$$

donde $C_w = n\partial S_w/\partial p^{gw}$ es la derivada del grado de saturación respecto de la succión, la cual puede ser obtenida a partir de la ecuación característica del suelo $(S_w - p^{gw})$ [73, 25, 41].

Fase gaseosa Partiendo de la ecuación de balance de masa para la fase gaseosa para procesos isotérmicos Ec. (2.12), introduciendo la ecuación de estado para la mezcla gaseosa Ec. (2.23) y teniendo en cuenta la definición de la velocidad relativa de la fase sólida Ec. (2.3) y la densidad de la fase sólida Ec. (2.20), se tiene

$$\left[\frac{(\alpha-n)}{K_s}S_g\left(S_w-\frac{C_w}{n}\left(p^w-p^g\right)\right)+C_w\right]\frac{\partial p^w}{\partial t}$$
$$+\left[\frac{(\alpha-n)}{K_s}S_g\left(S_g+\frac{C_w}{n}\left(p^w-p^g\right)\right)-C_w+\frac{nS_gM_g}{\rho^g\theta\mathrm{R}}\right]\frac{\partial p^g}{\partial t}$$
$$+\alpha S_g\, m^T\mathbf{L}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{\rho^g}\nabla^T\left[\frac{kk^{rg}}{\mu^g}\left(-\nabla p^g+\rho^g g\right)\right]=0 \quad (2.29)$$

Finalmente, el problema de valores de borde puede ser resuelto por el sistema de ecuaciones diferenciales dado por las Ecs. (2.25), (2.28) y (2.29).

2.2 Teoría de Medios Porosos

El objetivo principal de esta sección es describir la proceso de deformación y la cinemática de un medio poroso, el cual está formado por un esqueleto sólido deformable y fluidos que saturan los espacios vacíos (porosidad) .

La idea fundamental consiste en asumir que el medio poroso es una superposición de dos (o mas) continuos, el esqueleto sólidos y el fluido. La descripción de la deformación y de la cinemática de cada continuo considerado en forma independiente lleva un tratamiento similar al de un medio continuo monofásico.

Las leyes de la física que rigen la evolución de un proceso en un medio poroso continuo emplean la derivada temporal de las propiedades físicas referidas, ya sea al esqueleto sólido o al fluido cualquiera que sea la naturaleza de su movimiento.

2.2.1 Descripción del medio poroso

El argumento clave para que convivan la Mecánica de Medios Continuos con las discontinuidades microscópicas intrínsecas de materiales porosos heterogéneos consiste en idealizar al medio poroso como un sistema continuo termodinámicamente abierto.

Por lo tanto, la definición de su cinemática y deformaciones puede hacerse tomando como referencia a las del esqueleto sólido. Contrariamente a las formulaciones basadas en la Teoría de Mezclas, empleando propiedades medias (u homogeneizadas) [67, 20, 55, 74], la representación de los medios porosos se hace por una superposición, en tiempo y espacio, de dos o más fases de medios continuos.

En caso medios porosos parcialmente saturados continuos se deben reconocer tres fases, el esqueleto, el líquido y las fases gaseosas [25].

Por lo tanto, los medios porosos son sistemas multifásicos con huecos intersticiales en la matriz de granos llenas de agua (fase líquida), vapor de agua y aire seco (fase gaseosa) a nivel microscópico, ver Fig. 2.2a. El espacio poroso conectado, simplemente la porosidad conectada, es el espacio a través del cual el fluido en fluye realidad y dos puntos cuales quiera dentro del mismo pueden ser unidos por una trayectoria situada totalmente dentro de ella de modo que la fase líquida permanece continua. La matriz se compone tanto de una parte sólida y una posible porosidad ocluida, o atrapada, que se forma por fluidos saturados o no, pero donde no se produce filtración, ver Fig. 2.2b. La porosidad conectada es la relación entre el volumen del espacio poroso conectado respecto del volumen total. En lo que sigue el término *porosidad* será empleado para designar a la porosidad conectada.

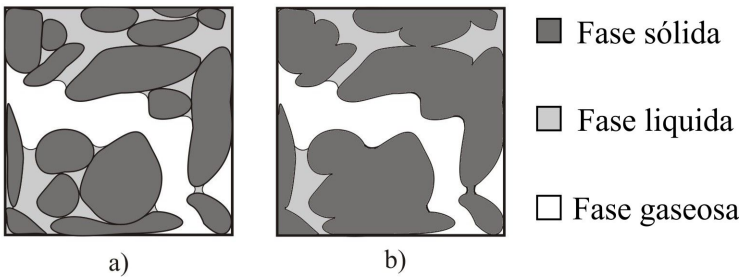

Figura 2.2: Descripción del medio poroso: a) nivel Microscópico; b) nivel de estudio

Esta hipótesis de continuidad supone la existencia de un volumen elemental representativo que es relevante en la escala macroscópica de todos los fenómenos físicos que intervienen en la aplicación prevista.

2.2.2 Balance de masa

Ecuación de continuidad

Sean ρ^f y ρ^s las densidades de masa intrínsecas del fluido y de la matriz sólida, respectivamente, por lo tanto $\rho^f n \mathrm{d}\Omega$ y $\rho^s (1-n)\,\mathrm{d}\Omega$ son las cantidades de masa fluido

y esqueleto sólido contenidos actualemente en el volumen material $\mathrm{d}\Omega$, respectivamente. En consecuencia, las densidades aparentes de fluido y del esqueleto son $\rho^f n$ y $\rho^s (1-n)$, respectivamente. Cuando no se produce el intercambio de masa con el exterior, ni del esqueleto ni del fluido, contenido en el volumen $\mathrm{d}\Omega$, el balance de masa puede ser expresado de la siguiente forma:

$$\frac{\mathrm{d}^s}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \rho^s (1-n)\ \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{2.30}$$

$$\frac{\mathrm{d}^f}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \rho^f n\ \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{2.31}$$

La derivada del volumen integral $\mathrm{d}^\pi \mathcal{F}/\mathrm{d}t$ con respecto a la fase π del campo $\mathcal{F}$ se define por

$$\frac{\mathrm{d}^\pi}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \mathcal{F}\ \mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \left(\mathcal{F} V_i^\pi\right)_{,i}\right) \mathrm{d}\Omega \tag{2.32}$$

Luego, aplicando la Ec. (2.32) a Ec. (2.30) y Ec. (2.31)

$$\frac{\partial\left(\rho^s (1-n)\right)}{\partial t} + \left(\rho^s (1-n) V_i^s\right)_{,i} = 0 \tag{2.33}$$

$$\frac{\partial\left(\rho^f n\right)}{\partial t} + \left(\rho^f n V_i^f\right)_{,i} = 0 \tag{2.34}$$

Contenido de masa de fluido. Vector de flujo relativo.

La formulación apropiada de las ecuaciones constitutivas considerando el comportamiento acoplado esqueleto-fluido debe ser definido refiriéndose el movimiento del fluido a la configuración inicial del esqueleto. Con ese fin, sea $J^f \mathrm{d}a$ la cantidad de masa fluida que es transportada entre el tiempo t y $t + \mathrm{d}\ t$ a través de la superficie infinitesimal del esqueleto $\mathrm{d}a$ orientada por el versor unitario normal $\boldsymbol{n}$

$$J^f \mathrm{d}a = \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n}\ \mathrm{d}a \tag{2.35}$$

donde $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, t)$ es el vector Euleriano de flujo relativo de masa de fluido.

Dado que $n\left(\boldsymbol{V}^f - \boldsymbol{V}^s\right) \cdot n \mathrm{d}a \mathrm{d}t$ es el volumen de fluido infinitesimal que es transportado a traves de la superficie $\mathrm{d}a$ durante el infinitésimo de tiempo $\mathrm{d}t$, el vector de flujo relativo de masa de fluido $\boldsymbol{w}$ se define como:

$$\boldsymbol{w} = \rho^f n\left(\boldsymbol{V}^f - \boldsymbol{V}^s\right) \tag{2.36}$$

Luego, empleando la definición Ec. (2.36) se puede referir el balance de masa de fluido al movimiento del esqueleto sólido reescribiendo la ecuación de continuidad del fluido Ec. (2.34) de la siguiente forma:

$$\frac{\mathrm{d}^s\left(\rho^f n\right)}{\mathrm{d}t} + \rho^f n V^f_{i,i} + w_{i,i} = 0 \tag{2.37}$$

La configuración Lagrangiana del balance de masa de fluido se obtiene introduciendo el contenido de masa de fluido lagrangiano m por unidad de volumen inicial, $\mathrm{d}\Omega_0$. La cantidad m esta relacionada con el contenido de masa de fluido euleriano $n\rho^f$ por unidad de volumen según:

$$\rho^f n \,\mathrm{d}\Omega = m \,\mathrm{d}\Omega_0 \tag{2.38}$$

De la relación Lagrangiana entre $\mathrm{d}\Omega$ y el volumen inicial $\mathrm{d}\Omega_0$

$$\phi \,\mathrm{d}\Omega_0 = n \,\mathrm{d}\Omega \quad ; \quad \phi = nJ \tag{2.39}$$

se deduce:

$$m = \rho^f \phi \tag{2.40}$$

donde ϕ es la porosidad Lagrangiana. Ademas, considerando el vector Lagrangiano $\boldsymbol{M}\left(\boldsymbol{X}, t\right)$ relacionado con $\boldsymbol{w}$ a través de

$$\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}a = \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{N} \mathrm{d}A \tag{2.41}$$

$$\nabla \boldsymbol{w} \,\mathrm{d}\Omega = \nabla \boldsymbol{M} \mathrm{d}\Omega_0 \tag{2.42}$$

Finalmente, reemplazando Ec. (2.40), Ec. (2.41) y Ec. (2.42) en Ec. (2.37) la ecuación de continuidad de masa de fluido en coordenadas lagrangianas es obtenida

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} + M_{i,i} = 0 \tag{2.43}$$

2.2.3 Termodinámica de Continuos Porosos

Postulado de Estados Locales

El postulado de Estado Local estipula que el estado actual de la energía interna de un sistema termodinámico durante toda la evolución es independientemente de la tasa de evolución y puede ser caracterizado por sus variables de estado dado que estas son las que caracterizan los estados de equilibrio.

Asimismo, en el estudio de medios continuos, el postulado de estado local establece que los estados termodinámicos de un determinado volumen material Ω resulta de la termodinámica de los volúmenes materiales elementales $\mathrm{d}\Omega$ que forman Ω, y el intercambio de calor y trabajo mecánico entre ellos. Como consecuencia, las leyes de la Termodinámica se puede aplicar en forma integral a las cantidades de aditivas tales como la energía y la entropía.

El postulado de estado local puede ser extendido a continuos porosos al considerar que la termodinámica de tal continuo resulta de la combinación entre las diferentes fases (continuas) que forman el medio y de su interacción.

Primera Ley de la Termodinámica

La Primera Ley de la Termodinámica expresa la conservación de la energía en todas sus formas.

En cualquier momento, la derivada material de la energía $\dot{\mathbb{E}}$ contenida en el subdominio Ω es la suma de la tasa de trabajo de las fuerzas externas $\mathcal{P}_{ext}$ y la tasa del suministro de calor externo $\mathcal{Q}$.

Por otro lado, la energía de un sistema $\dot{\mathbb{E}}$ puede expresarse como la suma de su energía cinética $\dot{\mathcal{K}}$ y la energía interna $\dot{\mathcal{E}}$. Considerando un cuerpo que ocupa el volumen Ω, siendo su contorno $\partial\Omega$, la Primera Ley de la Termodinámica se puede expresar como

$$\dot{\mathbb{E}} = \dot{\mathcal{K}} + \dot{\mathcal{E}} = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{Q} \tag{2.44}$$

con

$$\dot{\mathcal{E}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega} e \,\mathrm{d}\Omega \tag{2.45}$$

$$\dot{\mathcal{K}} = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \rho^s (1-\phi)\left|\dot{u}_i\dot{u}_i\right| + \rho^f \phi \left|w_i w_i\right| \,\mathrm{d}\Omega \tag{2.46}$$

$$\mathcal{P}_{ext} = \int_{\Omega} \rho b_i \dot{u}_i \,\mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} n_i \dot{u}_j - \frac{p}{\rho^f} w_i n_i \,\mathrm{d}\partial\Omega \tag{2.47}$$

$$\mathcal{Q} = \int_{\Omega} r \,\mathrm{d}\Omega - \int_{\partial\Omega} h_i n_i \,\mathrm{d}\partial\Omega \tag{2.48}$$

Donde, e es la densidad de energía interna por unidad de masa, b_i son las fuerzas gravitatorias, σ_{ij} es el tensor de tensiones de Cauchy, r es la densidad de fuente de calor y h_i es el flujo de calor. El desplazamiento u_i, el versor unitario n_i normal al contorno $\partial\Omega$ y la densidad de la masa ρ, también fueron introducidos en la expresión anterior.

Considerando la ecuación de equilibrio y el postulado Ec. (2.44) la forma explícita de la densidad de energía interna para materiales porosos disipativos locales esta dado por

$$\dot{e} = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - h_f M_{i,i} - h_{i,i} + r \tag{2.49}$$

Segunda Ley de la Termodinámica

La Segunda Ley de la Termodinámica se diferencia bastante de la Primera. En efecto, como se dijo anteriormente, la Primera ley establece la conservación de la energía en todas sus formas, mientras que la Segunda Ley establece que la energía sólo puede deteriorarse. La energía que se puede transformar en trabajo mecánico eficiente sólo puede disminuir en forma irreversible. La Segunda Ley introduce una nueva cantidad física, la *entropía*, la cual, si se trata de un aislado sistema, sólo puede aumentar.

Por lo tanto, la Segunda Ley de la Termodinámica establece: *Hay una función termodinámica de carácter aditiva, llamada entropía $\mathcal{S}$, de manera que su derivada material respecto de cualquier sistema material Ω es al menos igual a la tasa de entropía externa suministrada.*

Sea s la densidad de entropía por unidad de masa, la entropía total dentro del sistema Ω es por lo tanto

$$\mathcal{S} = \int_{\Omega} s \, \mathrm{d}\Omega \tag{2.50}$$

Según la Segunda Ley de la Termodinámica la entropía de un sistema termodinámico $\mathcal{S}$ no puede disminuir. Esto se puede expresar como

$$\dot{\mathcal{S}} + \mathcal{Q}_{\theta} \geq 0 \tag{2.51}$$

con

$$\dot{\mathcal{S}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega} s \, \mathrm{d}\Omega \quad ; \quad \mathcal{Q}_{\theta} = \int_{\Omega} \frac{r}{\theta} \, \mathrm{d}\Omega - \int_{\partial\Omega} \frac{n_i h_i}{\theta} \, d\partial\Omega \tag{2.52}$$

siendo Q_{θ} el flujo de entropía. Transformando la integral de superficie de la Ec. (2.52) en una integral de volumen, se deduce que la integral de volumen en Ec. (2.51) debe ser mayor que cero para cualquier sistema termodinámico Ω, lo cual conduce a

$$\dot{s} + \left(s_f M_i\right)_{,i} + \left(\frac{h_i}{\theta}\right)_{,i} - \frac{r}{\theta} \geq 0 \tag{2.53}$$

Luego, recordando la Primera Ley, Ec. (2.49), se obtiene la forma global de la desigualdad de Clausius-Duhem según

$$\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + \theta\dot{s} - \dot{e} - M_{i,i}\left(h_f - \theta s_f\right) + M_i\left(\theta s_{f,i} - h_{f,i}\right) - \frac{h_i}{\theta}\theta_{,i} \geq 0 \tag{2.54}$$

Introduciendo la energía libre de Helmholtz $\Psi = e - s\theta$ así como también la entalpía libre del fluído por unidad de masa (potencial de Gibbs) $g_f = h_f - s_f\theta$, la siguiente expresión es obtenida

$$\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - g_f M_{i,i} - s\dot{\theta} - \dot{\Psi} - M_i\left(s_f\theta_{,i} + g_{f,i}\right) - \frac{h_i}{\theta}\theta_{,i} \geq 0 \tag{2.55}$$

Por último, considerando la ecuación de balance de masa Ec. (2.43) la expresión anterior puede ser reescrita de la siguiente manera:

$$\Phi_s + \Phi_f + \Phi_\theta \geq 0 \tag{2.56}$$

con

$$\Phi_s = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + g_f\dot{m} - s\dot{\theta} - \dot{\Psi} \tag{2.57}$$
$$\Phi_f = -M_i\left(s_f\theta_{,i} + g_{f,i}\right) \tag{2.58}$$
$$\Phi_\theta = -\frac{h_i}{\theta}\theta_{,i} \tag{2.59}$$

Energía disipativa del esqueleto sólido : El primer componente de Ec. (2.56) se corresponde a la disipación del esqueleto sólido, Φ_s. Debido al carácter aditivo de energía libre de Helmholtz y de la entropía, la siguiente expresión se puede suponer

$$\Psi = \Psi_s + m\Psi_f \tag{2.60}$$
$$s = s_s + m\, s_f \tag{2.61}$$

donde Ψ_s y Ψ_f son las densidades de energía del esqueleto y del fluido, mientras que s_s y s_f se refieren a las densidades de entropía del fluido y del esqueleto sólido, respectivamente.

La ecuación de estado del fluido, presentado en la Sección 2.2.2, combinada con las definiciones anterior, y teniendo en cuenta la relación Ec. (2.40) permite expresar Φ_s de la siguiente forma:

$$\Phi_s = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + p\dot{\phi} - s_s\dot{\theta} - \dot{\Psi}_s \tag{2.62}$$

Esta expresión de la disipación del esqueleto sólido Φ_s coincide con la expresión estándar de la disipación de una fase sólida. De hecho, la tasa del trabajo de deformación para un sólido ordinario es $\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}$. En el caso de un continuo poroso, la tasa del trabajo de deformación relacionado con el esqueleto se obtiene mediante la adición de $p\dot{\phi}$ con el fin de tener en cuenta la acción de la presión de poros en el esqueleto a través de las paredes internas de la red porosa.

Energía de disipación del Poro : La segunda fuente de disipación, Φ_f en Ec. (2.56), representa la disipación viscosa debido al movimiento relativo del fluido con respecto al esqueleto sólido.

Energía de disipación del Térmica : La tercer fuente de disipación, Φ_θ en Ec. (2.56), incluye el gradiente de la temperatura $\theta_{,i}$ y por lo tanto el estado térmico del sistema elemental contiguo. Esta relacionado con la disipación debida al fenómeno de conducción del calor.

Debido a que las disipaciones identificadas anteriormente son de naturaleza muy diferente, se assume la hipótesis de desacoplamiento la cual consiste en sustituir la desigualdad Ec. (2.56) por las tres desigualdades separadas:

$$\Phi_s = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + p\dot{\phi} - s_s\dot{\theta} - \dot{\Psi}_s \geq 0 \tag{2.63}$$

$$\Phi_f = -M_i\left(s_f\theta_{,i} + g_{f,i}\right) \geq 0 \tag{2.64}$$

$$\Phi_\theta = -\frac{h_i}{\theta}\theta_{,i} \geq 0 \tag{2.65}$$

La desigualdad (2.63) establece que solo la parte Φ_s del suministro de trabajo de deformación infinitesimal del esqueleto sólido, formado por $\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + p\dot{\phi}$ menos el término corrector debido a la temperatura $s_s\dot{\theta}$, puede ser almacenado por el esqueleto sólido como energía libre, la cual puede eventualmente se transformada en trabajo mecánico. La ecuación (2.64) establece lo mismo para el caso de la fase porosa. Además, la Ec. (2.65) estipula que el flujo espontáneo de calor debe ir de una zona de mayor temperatura a otra de menor temperatura.

2.2.4 Ecuaciones de estado del esqueleto sólido

Variables de estado y ecuaciones de estado del esqueleto

La energía libre del esqueleto sólido Ψ_s admite los siguientes argumentos ε_{ij}, ϕ y θ, dado que sus derivadas respecto del tiempo aparecen en la expresión de disipación Ec. (2.63). Además, recordando el postulado de estados locales, la energía libre del esqueleto es independiente de la tasa y puede ser expresado de la siguiente manera:

$$\Psi_s = \Psi_s\left(\varepsilon_{ij}, \phi, \theta, q_\alpha\right) \tag{2.66}$$

siendo q_α las variables internas, con $\alpha = s, p$ para el esqueleto sólido y la fase porosa, los cuales por simplicidad son considerados como variables escalares.

En esta Sección, el estudio se limita a un comportamiento elástico lineal, entonces la evolución de las variables internas no serán considerada,

$$\frac{\mathrm{d}q_\alpha}{\mathrm{d}t} = \dot{q}_\alpha = 0 \tag{2.67}$$

Las variables ε_{ij}, ϕ, θ y q_α constituyen un conjunto de variables de estado para el esqueleto sólido. De hecho, para un valor dado de este conjunto de variables de estado la energía libre del esqueleto queda determinada independientemente de su estado anterior. Sin embargo, las variables ε_{ij}, ϕ y θ forman un subconjunto de variables de estado externas dado que sus variaciones pueden ser controladas desde el exterior del sistema.

considerando la tasa de Ec. (2.66) y reemplazando en Ec. (2.63)

$$\left(\sigma_{ij} - \frac{\partial \Psi_s}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)\dot{\varepsilon}_{ij} + \left(p - \frac{\partial \Psi_s}{\partial \phi}\right)\dot{\phi} - \left(s_s + \frac{\partial \Psi_s}{\partial \theta}\right)\dot{\theta} \geq 0 \tag{2.68}$$

La desigualdad (2.68) debe verificarse independientemente del signo que posean las variables $\dot{\varepsilon}_{ij}$, $\dot{\phi}$ y $\dot{\theta}$. Por lo tanto, las variaciones de cualquier variables independiente son justamente independientes de las restantes. Considerando también que ε_{ij}, ϕ y θ son independientes del tiempo, se concluye que:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi_s}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad ; \quad p = \frac{\partial \Psi_s}{\partial \phi} \quad ; \quad s_s = -\frac{\partial \Psi_s}{\partial \theta} \tag{2.69}$$

Las ecuaciones (2.69) son las ecuaciones de estado relativas al esqueleto y asocian las variables de estado ε_{ij}, ϕ y θ con sus correspondientes variables de estado termodinámicamente conjugadas σ_{ij}, p y $-s_s$.

Obteniendo la inversa de las ecuaciones (2.69) se tiene,

$$\Pi_s = \Psi_s - p\,\phi \tag{2.70}$$

y las correspondientes ecuaciones de estado son:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Pi_s}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad ; \quad \phi = -\frac{\partial \Pi_s}{\partial p} \quad ; \quad s_s = -\frac{\partial \Pi_s}{\partial \theta} \tag{2.71}$$

Variables de estado y ecuaciones de estado para materiales porosos

Considerando la expresión Ec. (2.57) correspondiente a la disipación del esqueleto sólido en lugar de Ec. (2.63) la energía libre ser reescrita de la siguiente manera

$$\Psi = \Psi\left(\varepsilon_{ij}, m, \theta, q_\alpha\right) \tag{2.72}$$

así, se obtienen las siguientes ecuaciones de estado para materiales porosos

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad ; \quad g_f = \frac{\partial \Psi}{\partial m} \quad ; \quad s = -\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \tag{2.73}$$

2.2.5 Ecuaciones de estado de la Termoporoelasticidad

En el caso de asumir comportamiento termoporoelástico la energía disipada relacionada con el esqueleto sólido, del mismo modo que las variables internas, no intervienen en el proceso termodinámico y deben anularse, $\Phi_s = 0$. Por lo tanto, las ecuaciones constitutivas pueden convertirse en las ecuaciones de estado (ver Sección 2.2.4). No obstante, para obtener estas ecuaciones de estado se requiere de una expresión explícita para la energía libre Ψ_s.

Por lo tanto, asumiendo transformaciones infinitesimales, la disipación relacionada con el esqueleto está dado por

$$\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + p\dot{\phi} - s_s\dot{\theta} - \dot{\Psi}_s = 0 \tag{2.74}$$

Otra alternativa surge de considerar la energía Π_s definida en Ec. (2.70),

$$\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - \phi\dot{p} - s_s\dot{\theta} - \dot{\Pi}_s = 0 \tag{2.75}$$

Debido a Ec. (2.71) resulta conveniente considerar las relaciones de simetría de Maxwell:

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\varepsilon_{kl}} = \frac{\partial\sigma_{kl}}{\partial\varepsilon_{ij}} \quad ; \quad \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial p} = -\frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon_{ij}} \quad ; \quad \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\theta} = -\frac{\partial s_s}{\partial\varepsilon_{ij}} \quad ; \quad \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{\partial s_s}{\partial p} \tag{2.76}$$

A partir de Ec. (2.75) se tiene $\dot{\Pi}_s = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - \phi\dot{p} - s_s\dot{\theta}$, que luego de diferenciar las ecuaciones de estado (2.71)

$$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{\partial\dot{\Pi}_s}{\partial\varepsilon_{ij}} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon_{ij}}\left(\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - \phi\dot{p} - s_s\dot{\theta}\right) \tag{2.77}$$

$$\dot{\phi} = -\frac{\partial\dot{\Pi}_s}{\partial p} = -\frac{\partial}{\partial p}\left(\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - \phi\dot{p} - s_s\dot{\theta}\right) \tag{2.78}$$

$$\dot{s}_s = -\frac{\partial\dot{\Pi}_s}{\partial\theta} = -\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - \phi\dot{p} - s_s\dot{\theta}\right) \tag{2.79}$$

y considerando Ec. (2.76) se tiene:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C^s_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{ij} - B_{ij}\dot{p} - \alpha^s_{ij}\dot{\theta} \tag{2.80}$$

$$\dot{\phi} = B_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\dot{p}}{\mathrm{M}} - 3\alpha_\phi\dot{\theta} \tag{2.81}$$

$$\dot{s}_s = \alpha^s_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - 3\alpha_\phi\dot{p} + C_v\dot{\theta} \tag{2.82}$$

En las Ecs. (2.80)-(2.82) los coeficientes C^s_{ijkl}, B_{ij}, α^s_{ij}, $1/\mathrm{M}$, $3\alpha_\phi$ y C_v son propiedades termoporoelásticas. Se trata de funciones de las variables de estado ε_{ij}, p y θ las cuales

deben satisfacer las tales relaciones expresando la integrabilidad de las Ecs. (2.80)-(2.82). Por ejemplo, la relación que expresa la integrabilidad de Ec. (2.80) es:

$$\frac{\partial C^s_{ijkl}}{\partial \varepsilon_{mn}} = \frac{\partial C^s_{ijmn}}{\partial \varepsilon_{kl}} \quad ; \quad \frac{\partial C^s_{ijkl}}{\partial p} = -\frac{\partial B_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \quad ; \quad \frac{\partial C^s_{ijkl}}{\partial \theta} = -\frac{\partial \alpha^s_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \tag{2.83}$$

Las ecuaciones clásicas de la termoelasticidad incremental en medios continuos sólidos (no porosos) pueden ser obtenidas haciendo $\dot{p} = 0$ en Ec. (2.80) y Ec. (2.82):

- $C^s_{ijkl} = \partial^2 \Pi_s / \partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}$ es el módulo tangente de rigidez elástico. Debido a las relaciones de Maxwell y a las condiciones de simetría $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ y $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, las siguientes relaciones de simetrías adicionales pueden ser asumidas

$$C^s_{ijkl} = C^s_{klij} \quad ; \quad C^s_{ijkl} = C^s_{ijlk} \quad ; \quad C^s_{ijkl} = C^s_{jikl} \tag{2.84}$$

- α^s_{ij} es el tensor tangente de dilatación térmica, el cual presenta también simetría $\alpha^s_{ij} = \alpha^s_{ji}$. Nuevamente, debido a las relaciones de Maxwell, el término $\alpha^s_{ij} = -\partial^2 \Pi_s / \partial \theta \partial \varepsilon_{ij}$ también representa el calor latente de deformación del esqueleto sólido, definido como el calor por unidad de deformación que el esqueleto intercambia con el exterior bajo condiciones isotérmicas e isobáricas ($\dot{\theta} = \dot{p} = 0$)

- $C_v = -\partial^2 \Pi_s / \partial \theta^2$ es la capacidad de calor volumétrica del esqueleto sólido, cuando las deformaciones ε_{ij} y las presiones p son constantes ($\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{p} = 0$)

Al considerar la termoporoelasticidad, la ecuación de estado incremental (2.81) que está relacionada con el cambio en la porosidad introduce nuevas propiedades termoporoelásticas:

- $B_{ij} = -\partial^2 \Pi_s / \partial \varepsilon_{ij} \partial p$ es un tensor de segundo grado cuya diagonal principal esta formada por el coeficiente de Biot, presenta $B_{ij} = B_{ji}$. Relaciona linealmente el cambio de porosidad con la variación de deformación en procesos isotérmicos e isobáricos ($\dot{\theta} = \dot{p} = 0$).

- $1/\mathrm{M} = -\partial^2 \Pi_s / \partial p^2$ es la inversa del módulo de Biot y relaciona la variación de la presión de poro $\dot{p}$ con la variación de la porosidad $\dot{\phi}$ en un proceso termodinámico a deformación y temperatura constantes ($\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{p} = 0$).

- $3\alpha_\phi = \partial^2 \Pi_s / \partial \theta \partial p$ es el coeficiente de dilatación volumétrica térmica relacionada con la porosidad.

Linealización del medio poroso

El comportamiento termoporoelasticas queda definido al igualar a cero la disipación intrínseca, y por lo tanto por la ausencia de variables internas. Entonces, las ecuaciones constitutivas termoporoelasticas de sistemas elementales se reduce a las ecuaciones de

estado de Ec. (2.73) donde la energía libre Ψ es una función de las variables externas ε_{ij}, m y θ.

Para deducir la expresión formal de la energía libre se lleva a cabo un proceso de linealización física. Este proceso consiste en asumir pequeña deformación del esqueleto, pequeñas variaciones de temperatura y pequeñas variaciones del contenido de masa de fluido. Bajo estas hipótesis de *pequeñas transformaciones* la energía libre $\Psi = \Psi\left(\varepsilon_{ij}, m, \theta\right)$ puede ser aproximada con una expansión de segundo orden respecto de los argumentos ε_{ij}, m y θ [18]. Así, se obtiene la siguiente expresión para la energía libre

$$\Psi = \sigma^0_{ij}\varepsilon_{ij} + g^0_f m - s^0\theta + \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}C_{ijkl}\varepsilon_{kl} + \frac{1}{2}\mathrm{M}\left(\frac{m}{\rho^f}\right)^2 - \frac{1}{2}C_v\theta^2 - \mathrm{M}B_{ij}\varepsilon_{ij}\left(\frac{m}{\rho^f}\right) - A_{ij}\varepsilon_{ij}\theta - 3\alpha_\phi m\theta \quad (2.85)$$

La exactitud de la expresión anterior y de sus argumentos ε_{ij}, m y θ solo puede ser estimado si se conoce la expresión exacta de la función Ψ. De este modo, las pequeñas deformaciones no significan necesariamente deformaciones infinitesimales, es decir, $\|\varepsilon_{ij}\| <<< 1$.

Algunos coeficientes de Ec. (2.85) fueron introducidos anteriormente en las Ecs. (2.80)-(2.82). Sin embargo, el superíndice ^{0} denota valores iniciales de las correspondientes variables, es decir g^0_f es la entalpía inicial libre de fase fluida y s^0 es la densidad de la entropía inicial.

Tensor de tensiones efectivo en termoporoelasticidad

La ecuación (2.80) puede ser reescrita de la siguiente forma

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}'_{ij} - \mathrm{M}B_{ij}\dot{p} \quad (2.86)$$

con

$$\dot{\sigma}'_{ij} = C^s_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{ij} - \alpha^s_{ij}\dot{\theta} \quad (2.87)$$

El tensor σ'_{ij} es usualmente conocido como tensor de tensiones efectivo elástico. La Ec. (2.87) relaciona linealmente el tensor de tensiones σ'_{ij}, el tensor de deformaciones ε_{ij} y la temperatura θ para un sólido termoelástico. Por lo tanto, el tensor de tensión efectivo se puede interpretar como el tensor de tensiones que produce deformación (elástica) en el esqueleto sólido.

Por otro lado, combinando Ec. (2.80) y Ec. (2.81) la siguiente expresión es obtenida

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{ij} - \mathrm{M}B_{ij}\dot{\phi} - \alpha_{ij}\dot{\theta} \quad (2.88)$$

siendo

$$C_{ijkl} = C^s_{ijkl} + \mathrm{M}B_{ij}B_{kl} \quad ; \quad \alpha_{ij} = \alpha^s_{ij} + 3\alpha_\phi \mathrm{M}B_{ij} \tag{2.89}$$

Debido a la simetría de B_{ij}, α^s_{ij} y C^s_{ijkl}, el tensor de segundo orden α_{ij} preserva su simetría, así como también el tensor de cuarto orden C_{ijkl} satisface las mismas relaciones de simetría C^s_{ijkl}, Ec. (2.84). El tensor C^s_{ijkl} introducido en Ec. (2.80), puede ser interpretado como el tensor de rigidez efectivo elástico en condiciones isotérmicas. Usualmente se lo denomina tensor constitutivo elástico drenado para procesos isotérmicos, mientras que el tensor de cuarto orden C_{ijkl} es identificado como el tensor constitutivo elástico no drenado para procesos isotérmicos.

Tensor de tensiones para medios porosos parcialmente saturados

En el marco de la Teoría de Medios Porosos, los medios porosos parcialmente saturados consisten en medios continuos heterogéneos formados por un esqueleto sólido cuyos vacíos están saturados por las fases continuas de fluido, ya sea líquida o gaseosa. El comportamiento mecánico de los medios porosos parcialmente saturados se describe generalmente mediante el tensor de tensiones efectivo σ'_{ij}, definido anteriormente en Ec. (2.87) para medios porosos bifásicos.

La extensión de la presente teoría a medios porosos parcialmente saturados se estudia en el contexto de medios porosos con doble (o múltiple) porosidad [6, 19, 15]. La clave para interpretar al medio poroso continuo como un medio multifásico consiste en asumir que la porosidad total ϕ se descompone en tantas porosidades parciales como fases tenga el sistema ϕ_α (con $\alpha = 1, \ldots, n$). Así, el volumen ocupado por el fluido α es $\phi_\alpha \mathrm{d}\Omega$, y

$$\phi = \sum_\alpha \phi_\alpha \tag{2.90}$$

En este contexto el grado de saturación S_α relativo a la fase α se define como

$$S_\alpha = \frac{\phi_\alpha}{\phi} \quad \text{y} \quad \sum_\alpha S_\alpha = 1 \tag{2.91}$$

Por lo tanto, el tensor de tensiones totales puede ser expresado como

$$\sigma_{ij} = (1-\phi)\,\sigma^s_{ij} - \phi^\alpha p^\alpha \delta_{ij} \tag{2.92}$$

$$\sigma_{ij} = \sigma^{sk}_{ij} + \sigma^{f\alpha}_{ij} \tag{2.93}$$

donde $\sigma^{sk}_{ij} = (1-\phi)\,\sigma^s_{ij}$ es el tensor de tensiones relacionado al esqueleto sólido, $\sigma^{f\alpha}_{ij} = -\phi^\alpha p^\alpha \delta_{ij}$ es el tensor de tensiones relacionado a la fase fluida, p^α es la presión de poro de la fase α, siendo $\alpha = w$ y $\alpha = g$ correspondiente a la presión de poro de agua y aire, respectivamente.

No obstante, asumiendo un enfoque simplificado se puede suponer para medios porosos parcialmente saturados la presión de poro de fase gaseosa como una constante e igual a la presión atmosférica [107, 124]. Luego, definiendo el tensor de succión como p^s_{ij}, se tiene

$$p^s_{ij} = \left(\phi^g p^g - \phi^w p^w\right) \delta_{ij} \tag{2.94}$$

y la tensión total puede ser expresado como

$$\sigma_{ij} = \sigma^{sk}_{ij} + p^s_{ij} \tag{2.95}$$

En varios problemas geotécnicos la presión de poro de gas puede ser considerado como un término constante que es igual a la presión atmosférica. En estos casos, el tensor de succión es equivalente a la presión de poro de agua, p^w.

2.3 Teoría del flujo de la poroplasticidad

2.3.1 Variables internas de materiales poroplásticos

La plasticidad es una propiedad observada en numerosos materiales cuando son sometidos a estados tensionales elevados, donde las deformaciones exceden el campo elástico y se vuelven irrecuperables o permanentes, luego de un proceso completo de carga y descarga. Por lo tanto, poroplasticidad es que la propiedad de medios porosos que define su capacidad para experimentar no sólo las deformaciones permanentes del esqueleto sólido, sino también las variaciones permanentes en el contenido de masa de fluido debido a cambios irreversibles en la porosidad.

Por lo tanto, debido a las deformaciones permanentes (o inelásticas) y a los cambios irreversibles en la porosidad que experimenta el medio poroso, las evoluciones poroplasticas serán procesos irreversibles y, a diferencia de la Termoporoelasticidad presentada en la sección anterior, las deformaciones ε_{ij} y la porosidad ϕ no son suficientes para caracterizar el estado actual de energía del sistema Ψ_s. De esta manera, para caracterizar completamente los estados energéticos actuales de los sistemas poroelastoplásticos y describir sus mecanismos de evolución irreversible se deben definir las variables internas. Tales variables son la porosidad plástica ϕ^p o el contenido de masa fluida plástica m^p, la deformación plástica ε^p_{ij} y la densidad de la entropía irreversible s^p, en caso de procesos no isotérmicos.

La regla de flujo para pequeñas deformaciones en materiales poroplásticos se basa en descomposiciones aditivas de variables internas en sus componentes elásticos y plásticos

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij} &= \dot{\varepsilon}^e_{ij} + \dot{\varepsilon}^p_{ij} \\ \dot{m} &= \dot{m}^e + \dot{m}^p \\ \dot{s} &= \dot{s}^e + \dot{s}^p \end{aligned} \tag{2.96}$$

cabe destacar que de la relación entre el contenido de masa fluida y la porosidad en Ec. (2.40), la segunda expresión de Ec. (2.96) puede ser sustituida por

$$\dot{m} = \rho^f \dot{\phi} = \rho^f \left(\dot{\phi}^e + \dot{\phi}^p \right) \tag{2.97}$$

Para deformaciones finitas esta teoría presenta algunas modificaciones, algunos detalles se presentan en el Apéndice A.

La configuración inicial, corresponde a $\varepsilon_{ij} = 0$ y $m = 0$, por lo tanto σ^0_{ij}, p^0 y θ^0. La figura 2.3 muestra la hipotética transformación irreversible que sufre un elemento de volumen representativo del medio poroso.

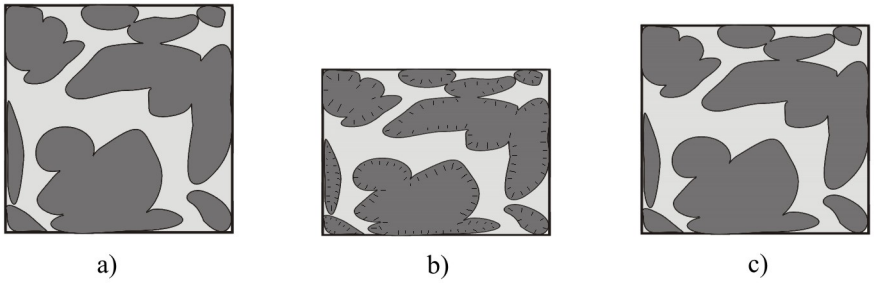

Figura 2.3: Proceso de deformación poroplástico: a) Estado inicial; b) Estado actual; c) Estado final

La tasa de deformación plástica del esqueleto sólido $\dot{\varepsilon}^p_{ij}$ está relacionado únicamente con la evolución irreversible del esqueleto. Sin embargo, la tasa del contenido plástico de masa de fluido $\dot{m}^p$ puede también esta vinculado a la evolución irreversible de esqueleto sólido a través de la porosidad según Ec. (2.40). De hecho, la tasa de la porosidad plástica $\dot{\phi}^p$ puede ser obtenida por

$$\dot{\phi}^p = \frac{\dot{m}^p}{\rho_0^{fl}} \tag{2.98}$$

siendo ρ^f la densidad de masa fluida inicial.

Suponiendo configuración Lagrangiana y teniendo en cuenta la ley de conservación de masa, la variación del contenido de masa se puede expresar como

$$m = J\rho^f \phi - \rho_0^{fl} \phi_0 \tag{2.99}$$

donde

$$J \equiv 1 + \varepsilon \tag{2.100}$$

válido para transformaciones infinitesimales. De esta manera $\varepsilon = \varepsilon_{ii}$. Dado que $J^p = (1 + \varepsilon^p)$, con $\varepsilon^p = \varepsilon^p_{ii}$ y siendo ϕ^d la porosidad relativa al estado previo, se tiene

$$m^p = J^p \rho_0^{fl} \phi^d - \rho_0^{fl} \phi_0 \tag{2.101}$$

Combinando las Ecs. (2.101) y (2.98) se llega a

$$\phi^p = J^p \phi^d - \phi_0 \tag{2.102}$$

De la definición del Jacobiano y considerando Ec. (2.100), el volumen diferencial residual luego de un proceso completo de descarga se expresa como

$$\mathrm{d}\Omega^d = J^p \mathrm{d}\Omega \tag{2.103}$$

Combinando Ecs. (2.102) y (2.103) se tiene

$$\phi^p \mathrm{d}\Omega = \phi^d \mathrm{d}\Omega^d - \phi_0 \mathrm{d}\Omega \tag{2.104}$$

Es decir, la terminología *porosidad plástica* queda completamente justificada dado que, según Ec. (2.104), ϕ^p representa la variación irreversible del volumen de poro por unidad de volumen inicial, $\mathrm{d}\Omega$. Los contenidos de masa fluida total y plástica m y m^p, respectivamente, así como también la porosidad plástica ϕ^p son cantidades Lagrangianas dado que estan referidas al volumen inicial $\mathrm{d}\Omega$.

Como se indicó previamente, bajo la hipótesis de transformaciones infinitesimales, la traza del tensor de deformaciones, ε, representa el cambio de volumen de un elemento diferencial de medio poroso, conocido también como dilatación o contracción volumétrica. A su vez, la dilatación volumétrica del esqueleto está relacionado con el cambio de volumen, tanto la fase porosa como de la matriz sólida, ε_s.

Siendo $d\Omega^s$ y $d\Omega^s_t$ el volumen diferencial ocupado por la matriz sólida en las configuraciones de referencia y actuales, respectivamente, la dilatación volumétrica del esqueleto sólido puede expresarse como

$$\varepsilon_s = \frac{d\Omega^s_t - d\Omega^s}{d\Omega^s} \tag{2.105}$$

Considerando que $d\Omega^s_t = (1 - \phi)\, d\Omega_t$ y $d\Omega^s = (1 - \phi_0)\, d\Omega_t / J$, la siguiente expresión puede ser obtenida a partir de Ec. (2.100)

$$(1 - \phi_0)\, \varepsilon_s = (1 - \phi)\, \varepsilon - (\phi - \phi_0) \tag{2.106}$$

Finalmente, teniendo en cuenta un comportamiento a poroplástico la Ec. (2.106) puede ser reescrita como

$$(1 - \phi_0)\, \varepsilon^p_s = \left(1 - \phi^d\right) \varepsilon^p - \left(\phi^d - \phi_0\right) \tag{2.107}$$

donde ε_s^p es la dilatación volumétrica permanente del esqueleto sólido luego de un proceso completo de descarga sobre un elemento diferencial de medio poroso.

Combinando Ecs. (2.102) y (2.107) se llega a

$$\varepsilon^p = \phi^p + (1 - \phi_0)\, \varepsilon_s^p \tag{2.108}$$

2.3.2 Dominio de la poroplasticidad y la función de fluencia

El tensor de tensiones σ_{ij} así como también la presión de poro p son las variables necesarias y suficientes para caracterizar cualquier trayectoria de carga elástica. En el espacio de tensiones existe el dominio inicial de la poroelasticidad que incluye el cero absoluto, $(\sigma_{ij} = 0; p = 0)$. Este dominio $\mathcal{C}_E$ es tal que la deformación o el cambio de porosidad (o contenido de masa fluida) permanecen reversibles a lo largo una cualquier trayectoria de carga que puede o no iniciarse en el origen, pero que permanece siempre dentro del dominio $\mathcal{C}_E$. Para un material poroplástico ideal este dominio inicial de poroplasticidad permanece inalterable aunque tenga lugar un proceso de evolución plástica. Por el contrario, si se trata de un material poroplástico estándar (o con endurecimiento) el dominio inicial de poroplasticidad puede modificarse, tanto en su tamaño como en su forma, en presencia de un proceso inelástico.

Este dominio de la poroplasticidad $\mathcal{C}_E$ se define mediante la función de carga escalar $f = f(\sigma_{ij}, p)$ cuando se trata de un material poroplástico ideal.

En el caso de materiales poroplásticos con endurecimiento (u ablandamiento), el dominio de la poroelásticidad esta dado por la función escalar $f(\sigma_{ij}, p, Q_\alpha)$, la cual introduce las tensiones disipativas Q_α referidas a las variables de endurecimiento, tal que

$$\begin{aligned}
&f(\sigma_{ij}, p, Q_\alpha) < 0 \text{ para estados de carga } (\sigma_{ij}, p) \text{ dentro de } \mathcal{C}_E \\
&f(\sigma_{ij}, p, Q_\alpha) = 0 \text{ para estados de carga } (\sigma_{ij}, p) \text{ en la frontera de } \mathcal{C}_E \\
&f(\sigma_{ij}, p, Q_\alpha) > 0 \text{ para estados de carga } (\sigma_{ij}, p) \text{ afuera del dominio } \mathcal{C}_E
\end{aligned} \tag{2.109}$$

La condición de la elasticidad es dado ahora por $f(\sigma_{ij}, p, Q_\alpha) < 0$. Por otro lado, el condición de plasticidad $f(\sigma_{ij}, p, Q_\alpha) = 0$ corresponde al contorno del dominio de la elasticidad $\mathcal{C}_E$, y esta definido por la superficie definida por $f(\sigma_{ij}, p, Q_\alpha) = 0$ que se conoce como superficie de fluencia. Un estado de carga (σ_{ij}, p) es plásticamente admisible si satisface la condición $f(\sigma_{ij}, p, Q_\alpha) \leq 0$.

El dominio de la elasticidad de la mayoría de los materiales es una superficie convexa y esta propiedad puede ser extendida con facilidad a los materiales porosos. La propiedad fundamental del dominio convexo de la poroelasticidad consiste en que todos los puntos de un segmento que une a dos punto cualesquiera de la superficie de fluencia pertenecen al dominio $\mathcal{C}_E$. Si la función de fluencia $f(\sigma_{ij}, p, Q_\alpha)$ es continua y derivable respecto de σ_{ij} y p la condición de convexidad es equivalente a:

$$\forall\left(\tilde{\sigma}_{ij},\tilde{p}\right)\neq\left(\sigma_{ij},p\right)\ \text{con}\ f\left(\tilde{\sigma}_{ij},\tilde{p},Q_{\alpha}\right)=f\left(\sigma_{ij},p,Q_{\alpha}\right)=0$$
$$\left(\sigma_{ij}-\tilde{\sigma}_{ij}\right)\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}+\left(p-\tilde{p}\right)\frac{\partial f}{\partial p}\geq 0 \tag{2.110}$$

2.3.3 Regla de Flujo y Trabajo Plástico

El criterio de plasticidad $f\left(\sigma_{ij},p\right)=0$ o bien $f\left(\sigma_{ij},p,Q_{\alpha}\right)=0$, indica solamente el momento en el cual se inicia el proceso de evolución plástica. La regla del flujo (plástico) especifica como es dicha evolución plástica. Si un punto de carga $\left(\sigma_{ij},p,Q_{\alpha}\right)$ se encuentra sobre la superficie de fluencia pero un instante posterior abandona dicha posición se dice que la evolución que experimento fue poroelástica (o descarga elástica) Dado que la función de fluencia f se vuelve negativa para una trayectoria de carga $\left(\sigma_{ij},p\right)$ que re-ingresa al dominio elástico $\mathcal{C}_E$ (ver Fig. 2.4), la condición de descarga elástica está dada por $f=0$ y $\mathrm{d}f<0$, con:

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial f}{\partial p}\mathrm{d}p+\frac{\partial f}{\partial Q_{\alpha}}\mathrm{d}Q_{\alpha} \tag{2.111}$$

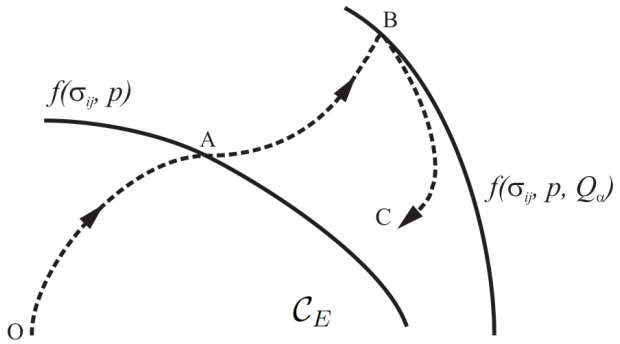

Figura 2.4: La condición $f\left(\sigma_{ij},p\right)<0$ define el dominio poroelástico inicial $\mathcal{C}_E$ por lo tanto, la deformación y el cambio de porosidad debido a una trayectoria de carga como la indicada por el segmento OA permanecen reversibles. Para un material poroplástico con endurecimiento el dominio inicial de la poroelásticidad se modifica debido a un proceso de evolución plástico como el indicado por AB. Para poder simular este cambio de forma y/o posición se deben definir las tensiones disipativas Q_{α}, luego el dominio actualizado de la poroelásticidad se re-define como $f\left(\sigma_{ij},p,Q_{\alpha}\right)<0$

Sin embargo, si transcurrido un instante de tiempo el punto de carga permanece sobre la superficie de fluencia que define al dominio $\mathcal{C}_E$ se produce un proceso de evolución plástica. La trayectoria de carga ahora debe satisfacer $f=\mathrm{d}f=0$, denominado *condición de consistencia*. Teniendo en cuenta todas estas consideraciones, la regla de flujo se define como

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}=\dot{\lambda}h_{ij}^{\varepsilon}\left(\sigma_{ij},p,Q_{\alpha}\right)\quad;\quad\dot{\phi}^{p}=\dot{\lambda}h^{\phi}\left(\sigma_{ij},p,Q_{\alpha}\right)\quad;\quad\dot{q}_{\alpha}=\dot{\lambda}h^{\alpha}\left(\sigma_{ij},p,Q_{\alpha}\right) \tag{2.112}$$

siendo q_α las variables internas termodinámicas (con $\alpha = s, p$ para el esqueleto sólido y la fase porosa, respectivamente) y $\dot{\lambda}$ el multiplicador plástico que determina la intensidad del incremento de la deformación plástica $(\dot{\varepsilon}_{ij}^p, \dot{\phi}^p)$ y satisface las condiciones complementarias de Kuhn-Tucker según

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad ; \quad f\left(\sigma_{ij}, p, Q_\alpha\right) \leq 0 \quad ; \quad \dot{\lambda}\, f\left(\sigma_{ij}, p, Q_\alpha\right) = 0 \quad ; \quad \dot{\lambda} \mathrm{d} f = 0 \tag{2.113}$$

Las funciones h_{ij}^ε, h^ϕ y h^α definen las direcciones del incremento de deformación plástico $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ y $\dot{\phi}^p$ así como también las correspondientes variables internas $\dot{q}_\alpha$, en el espacio $\{\sigma_{ij} \times p \times Q_\alpha\}$.

Adoptando los siguientes argumentos para la energía libre de materiales poroplásticos locales

$$\Psi_s = \Psi_s\left(\varepsilon_{ij}^e, \phi^e, q_\alpha\right) \tag{2.114}$$

la evolución irreversible de Φ_s (definido en Ec. (2.62)) junto con las ecuaciones de estado Ec. (2.69), se obtiene la energía disipada total

$$\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^p + p\dot{\phi}^p + Q_\alpha \dot{q}_\alpha \geq 0 \tag{2.115}$$

siendo las tensiones disipativas para materiales poroplásticos locales

$$Q_\alpha = -\frac{\partial \Psi_s}{\partial q_\alpha} \tag{2.116}$$

Debido a que el multiplicado plástico debe ser $\dot{\lambda} \geq 0$, según Ec. (2.113), y considerando las reglas de flujo de Ec. (2.112), para que la energía disipada total sea positiva Ec. (2.115), se requiere

$$\sigma_{ij} h_{ij}^\varepsilon + p\, h^\phi + Q_\alpha h^\alpha \geq 0 \tag{2.117}$$

2.3.4 Principio del Máximo Trabajo Plástico

El Principio del Máximo Trabajo Plástico requiere que los incrementos de deformación plástica actual y porosidad plástica $(\dot{\varepsilon}_{ij}^p, \dot{\phi}^p)$, correspondiente al estado tensional $(\sigma_{ij}, p, Q_\alpha)$, maximicen el trabajo plástico para todas las cargas plásticas admisibles $(\tilde{\sigma}_{ij}, \tilde{p}, Q_\alpha)$. Lo cual se escribe como

$$\begin{gathered} \forall\left(\tilde{\sigma}_{ij}, \tilde{p}, Q_\alpha\right) \neq \left(\sigma_{ij}, p, Q_\alpha\right) \text{ with } f\left(\tilde{\sigma}_{ij}, \tilde{p}, Q_\alpha\right) \leq 0 \\ \left(\sigma_{ij} - \tilde{\sigma}_{ij}\right)\dot{\varepsilon}_{ij}^p + \left(p - \tilde{p}\right)\dot{\phi}^p \geq 0 \end{gathered} \tag{2.118}$$

De hecho, según [19] el Principio del Máximo Trabajo Plástico se basa en otro principio termodinámico mas general, le Principio de la Máxima Producción de Entropía. Dado que valores nulos de $(\tilde{\sigma}_{ij}, \tilde{p}, Q_\alpha)$ son plásticamente admisibles, el Principio del Máximo Trabajo Plástico asegura el cumplimiento de la condición Ec. (2.117).

Si el estado tensional $(\sigma_{ij}, p, Q_\alpha)$ esta dentro del dominio poroelástico $\mathcal{C}_E$, las funciones h^ε_{ij}, h^ϕ y h^α puede adoptar cualquier orientación por lo tanto, para satisfacer Ec. (2.118), $(\dot{\varepsilon}^p_{ij}, \dot{\phi}^p, \dot{q}_\alpha)$ deben anularse según la definición de poroelasticidad (ver Fig. 2.5). Luego, considerando el vecto $(\sigma_{ij}, p, Q_\alpha)$ en el contorno del dominio de la poroelasticidad $\mathcal{C}_E$. Dado que el punto $(\tilde{\sigma}_{ij}, \tilde{p}, Q_\alpha)$ no puede encontrarse en el exterior de $\mathcal{C}_E$, la diferencia entre ambos vectores $(\sigma_{ij}, p, Q_\alpha)$ y $(\tilde{\sigma}_{ij}, \tilde{p}, Q_\alpha)$ solo puede ser un vector con dirección hacia el interior $\mathcal{C}_E$. Nuevamente, para cumplir la condición Ec. (2.118), el vector $(\dot{\varepsilon}^p_{ij}, \dot{\phi}^p, \dot{q}_\alpha)$ debe se normal al dominio de la poroelasticidad. Por lo tanto, la normalidad de la regla de flujo se expresa de la siguiente forma

$$\dot{\varepsilon}^p_{ij} = \dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \tag{2.119}$$

$$\dot{\phi}^p = \dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial p} \tag{2.120}$$

$$\dot{q}_\alpha = \dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial Q_\alpha} \tag{2.121}$$

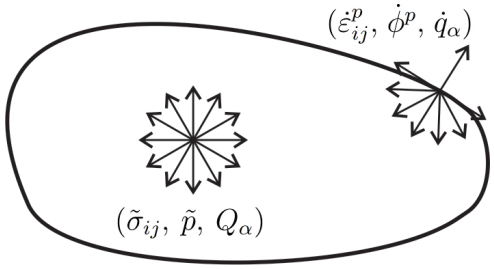

Figura 2.5: Normalidad de la regla de flujo y Principio del Máximo Trabajo Plástico

Sustituyendo Ecs. (2.119)-(2.121) en Ec. (2.118) se llega a

$$(\sigma_{ij} - \tilde{\sigma}_{ij})\,\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} + (p - \tilde{p})\,\frac{\partial f}{\partial p} \geq 0 \tag{2.122}$$

Comparando Ec. (2.122) y Ec. (2.110), el Principio del Máximo Trabajo Plástico implica también la convexidad del dominio poroelástico $\mathcal{C}_E$ así como también la normalidad de la regla de flujo.

Este tipo de materiales son usualmente conocidos como materiales estándar dado que la función de fluencia es empleada también para definir la dirección del flujo plástico a través de las reglas de flujo, Ecs. (2.119)-(2.121). En este caso se dice que la plasticidad es asociada. Por el contrario, cuando la dirección del flujo plástico no responde a la superficie de fluencia se trata de materiales no-estándar, mientras que la plasticidad se denomina

no-asociada. En estos casos se requiere la definición de un potencial plástico g que gobierne la dirección del flujo plástico a través de la siguiente regla de flujo

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \dot{\lambda}\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \tag{2.123}$$

$$\dot{\phi}^{p} = \dot{\lambda}\frac{\partial g}{\partial p} \tag{2.124}$$

$$\dot{q}_{\alpha} = \dot{\lambda}\frac{\partial g}{\partial Q_{\alpha}} \tag{2.125}$$

Finalmente, dada la condición Ec. (2.117) la función potencial plástica no asociativa g debe satisfacer la siguiente relación

$$\sigma_{ij}\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} + p\,\frac{\partial g}{\partial p} + Q_{\alpha}\frac{\partial g}{\partial Q_{\alpha}} \geq 0 \tag{2.126}$$

CAPÍTULO 3

Una teoría de poroplasticidad basada en gradientes

La mecánica de medios porosos constituye una disciplina de gran relevancia en diversas áreas del conocimiento como la Geofísica, Biomecánica y Ciencia de los Materiales. Su principal objetivo es la descripción de la cinemática y la presión de poro del medio continuo poroso al ser sometidos a acciones físicas y/o mecánicas arbitrarias.

Las mayores ventajas de la aplicación de la mecánica de medios continuos en medios porosos para describir o predecir la compleja respuesta del comportamiento macroscópico de materiales cohesivos-friccionales basados en los aspectos fundamentales de su microestructura, ademas de tener en cuenta las propiedades hidráulicas y su influencia en el mecanismo de falla resultante fueron reconocidos por varios autores en la [10, 14, 109, 56]. En consecuencia, la tendencia a sustituir el marco teórico de la mecánica de medios continuos clásicos con la mecánica no-lineales porosos es bastante observada. En primer lugar, este proceso se llevó a cabo en el caso de la mecánica de suelos, [31, 21], pero posteriormente fue aplicado a medios cohesivos-friccionales como el hormigón [125, 94, 71] y también para el caso de biomateriales [80, 96].

Otro desarrollo de gran importancia en la mecánica de medios continuos clásicos fue la ampliación del marco teórico termodinámicamente consistente a los medios continuos no locales. El objetivo principal fue la regularización de comportamiento post pico de la respuesta mecánica en cuanto al tamaño y orientación de la discretización espacial empleada (malla) en caso de análisis por elementos finitos, basado en los aspectos fundamentales de la microestructura del material [120, 40, 36, 2, 133].

En los últimos años se realizaron avances y contribuciones significativas en las formulaciones de gradiente no locales para materiales no porosos. Marcos termodinámicos fueron considerados en las propuestas de [2, 3, 97, 98, 128, 47, 54, 133]. Algunos aspectos fenomenológicos fueron considerados a nivel microscópico en formulaciones no locales de gradientes por [99, 9, 64]. Descripciones objetivas de la longitud interna de gradientes basada en conceptos sobre plasticidad de cristal fueron estudiados por [8, 62, 63, 33], por su parte, la influencia de la presión actual de confinamiento en caso de materiales cuasi-frágiles como el hormigón fue estudiado por [133]. Finalmente, la influencia de la presión de poro en la longitud interna característica de los medios porosos fue analizada por [75].

La anisotropía material fue considerada en la formulación de las leyes de evolución de las variables internas en caso de plasticidad gradiente por [4, 129]. Análisis geométrico de la condición de bifurcación en el caso de las formulaciones de gradiente no locales fue estudiado por [130, 37]. La formulación de modelos de gradientes acoplados con daño y considerando la implementación numérica del método de elementos finitos fue estudia por [120, 68, 27].

Recientemente, los conceptos de no localidad fueron ampliados para la formulación de modelos de materiales porosos [77, 65, 58, 78]. Análogamente, la consideración de aspectos microscópicos en la formulación de las teorías constitutivas no-locales para materiales porosos se deben a [143, 82, 137].

A pesar del fuerte desarrollo de modelados constitutivos para medios porosos, explicado antes, todavía hay una necesidad de presentar un marcos teóricos termodinámicamente consistentes que abarque a la mayor parte de estas formulaciones.

En este trabajo la formulación termodinámicamente consistente para continuos sólidos basada en gradientes de deformación de orden superior propuesto por Vrech y Etse, 2009 [132, 133], que sigue el enfoque general propuesto por Svedberg y Runesson, 1997 [119, 121, 120] para formulaciones de daño no locales, es extendido a medios porosos parcialmente saturados. Probablemente una de las principales contribuciones de la presente propuesta consiste en la re-definición de longitud interna característica de gradientes siendo esta una función tanto del estado tensional actual como de las condiciones hidráulicas, esta diferenciación permite capturar con mejor precisión la transición entre la forma de falla dúctil y la frágil en materiales porosos cohesivo-friccionales con diferentes niveles de confinamiento y saturación [77, 75].

3.1 Teoría poroplástica termodinámicamente consistente basada en gradientes

En esta sección el marco termodinámico de la plasticidad clásica o local se extiende materiales porosos no-locales basado en gradiente de deformación de orden superior.

Siguiendo [114, 18] se puede asumir que cualquier estado en equilibrio termodinámico de un material disipativo, durante procesos isotérmicos, puede ser caracterizado por completo mediante el tensor de deformación elástico $\varepsilon^e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon^p_{ij}$ y las variables internas q_α con $\alpha = s, p$ para el esqueleto sólido y la fase porosa, respectivamente, las cuales son consideradas en este trabajo como variables escalares. Por lo tanto, considerando solo procesos isotérmicos, a diferencia de lo estipulado el en Capítulo 2 al estudiar las formulaciones termoporoelásticas, la temperatura absoluta θ es un término constante y la entropía elástica s^e es una variable irrelevante que no debe ser considerada como argumento en la energía libre.

Luego, considerando materiales poroplásticos la porosidad elástica $\phi^e = \phi - \phi^p$ en este caso debe ser incluida como argumento que caracteriza el estado termodinámico del sistema [18]. Basado en trabajos anteriores [120, 133, 77] se asume además que las variables internas q_α son las únicas de con características no locales. La extensión a dos

o mas variables internas escalares puede hacer sin mayores dificultades. De esta manera tanto q_α como $q_{\alpha,i}$ aparecen como argumentos en la energía libre del sistema Ψ_s, tal que

$$\Psi_s = \Psi_s\left(\varepsilon^e_{ij}, \phi^e, q_\alpha, q_{\alpha,i}\right) \tag{3.1}$$

Cabe destacar que en esta formulación de gradientes simplificada, donde el efecto no local esta restringido a las variables internas la ecuación de balance energético (Primer Principio de la Termodinámica, Ec. (2.49)) se mantiene sin cambios, es decir, que es válido tanto para formulaciones locales como no locales basadas en gradientes. Esto se debe a que la tasa del tensor de deformaciones permanece local y la densidad de energía interna no se expresa en término de los argumentos no locales como es el caso de la energía libre en Ec. (3.1).

Diferenciando la Ec. (3.1) y combinando con la disipación intrinseca según Ec. (2.55) en el dominio completo Ω, considerando además las Ecs. (2.96) y Ec. (2.97), se tiene

$$\int_\Omega \left[\left(\sigma_{ij} - \frac{\partial \Psi_s}{\partial \varepsilon^e_{ij}}\right)\dot{\varepsilon}_{ij} + \left(p - \frac{\partial \Psi_s}{\partial \phi^e}\right)\dot{\phi} + \frac{\partial \Psi_s}{\partial \varepsilon^e_{ij}}\dot{\varepsilon}^p_{ij} + \frac{\partial \Psi_s}{\partial \phi^e}\dot{\phi}^p \right.$$
$$\left. - \sum_\alpha \frac{\partial \Psi_s}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha - \sum_\alpha \frac{\partial \Psi_s}{\partial q_{\alpha,i}}\dot{q}_{\alpha,i}\right] \mathrm{d}\Omega \geq 0 \tag{3.2}$$

e integrando por partes el termino de gradientes, se tiene

$$\int_\Omega \left[\left(\sigma_{ij} - \frac{\partial \Psi_s}{\partial \varepsilon^e_{ij}}\right)\dot{\varepsilon}_{ij} + \left(p - \frac{\partial \Psi_s}{\partial \phi^e}\right)\dot{\phi} + \frac{\partial \Psi_s}{\partial \varepsilon^e_{ij}}\dot{\varepsilon}^p_{ij} + \frac{\partial \Psi_s}{\partial \phi^e}\dot{\phi}^p \right.$$
$$\left. - \sum_\alpha \frac{\partial \Psi_s}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha - \sum_\alpha \left(\frac{\partial \Psi_s}{\partial q_{\alpha,i}}\dot{q}_\alpha\right)_{,i}\dot{q}_\alpha\right] \mathrm{d}\Omega - \int_{\partial\Omega} \sum_\alpha n_i \frac{\partial \Psi_s}{\partial q_{\alpha,i}}\dot{q}_\alpha \, \mathrm{d}\partial\Omega \geq 0 \tag{3.3}$$

En la ecuación anterior se aplico el Teorema de la Divergencia, siendo n_i un vector unitario normal a la superficie $\partial\Omega$ dirigido hacia el exterior de la misma.

Luego, la tensión disipativa en el dominio Ω y en el contorno $\partial\Omega$ están definidas por Q_α y $Q^{(b)}_\alpha$, respectivamente,

$$Q_\alpha = -\frac{\partial \Psi_s}{\partial q_\alpha} - \left(\frac{\partial \Psi_s}{\partial q_{\alpha,i}}\right)_{,i} \qquad \text{en } \Omega \tag{3.4}$$

$$Q^{(b)}_\alpha = -\frac{\partial \Psi_s}{\partial q_{\alpha,i}} n_i \qquad \text{sobre } \partial\Omega \tag{3.5}$$

y la Ec. (3.3) puede ser expresada como

$$\int_\Omega \left[\left(\sigma_{ij} - \frac{\partial \Psi_s}{\partial \varepsilon^e_{ij}} \right) \dot{\varepsilon}_{ij} + \left(p - \frac{\partial \Psi_s}{\partial \phi^e} \right) \dot{\phi} + \frac{\partial \Psi_s}{\partial \varepsilon^e_{ij}} \dot{\varepsilon}^p_{ij} + \frac{\partial \Psi_s}{\partial \phi^e} \dot{\phi}^p \right.$$
$$\left. + \sum_\alpha Q_\alpha \dot{q}_\alpha \right] \mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega} \sum_\alpha Q^{(b)}_\alpha \dot{q}_\alpha \, \mathrm{d}\partial\Omega \geq 0 \quad (3.6)$$

En plasticidad clásica o local, se establece que la desigualdad anterior debe cumplirse para cualquier dominio Ω elegido y para cualquier proceso termodinámico independiente. Como resultado, las relaciones de Coleman se obtiene de igual manera que en la teoría de continuos locales clásicos Ec. (2.69)

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi_s}{\partial \varepsilon^e_{ij}} \quad ; \quad p = \frac{\partial \Psi_s}{\partial \phi^e} \quad (3.7)$$

siendo la energía de disipación

$$\mathfrak{D} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}^p_{ij} + p \dot{\phi}^p + \sum_\alpha Q_\alpha \dot{q}_\alpha \geq 0 \qquad \text{en } \Omega \quad (3.8)$$

$$\mathfrak{D}^{(b)} = \sum_\alpha Q^{(b)}_\alpha \dot{q}_\alpha \geq 0 \qquad \text{sobre } \partial\Omega \quad (3.9)$$

En el caso particular de materiales no porosos ($p = 0$) las ecuaciones anteriores adoptan la misma forma que las obtenidas por Svedberg (1999) [119] y Vrech (2007) [132], en condiciones isotérmicas.

De las ecuaciones anteriores, Ec. (3.8) y Ec. (3.9), puede concluirse que la mayor diferencia entre esta teoría no local basada en gradientes de las variables internas respecto a la formulación local basada en la Teoría de Medios Porosos presentada en la Sección 2.3.3 es el término de gradiente adicional en la expresión de la tensión disipativa Q_α, además del término de disipación en el contorno $Q^{(b)}_\alpha$ (ver Ec. (2.115)).

En consecuencia, la tensión disipativa Q_α se descompone en forma aditiva en un componente local y en otro no local

$$Q_\alpha = Q^{loc}_\alpha + Q^{nloc}_\alpha \quad (3.10)$$

con

$$Q^{loc}_\alpha = -\frac{\partial \Psi_s}{\partial q_\alpha} \quad (3.11)$$

$$Q^{nloc}_\alpha = -\left(\frac{\partial \Psi_s}{\partial q_{\alpha,i}} \right)_{,i} \quad (3.12)$$

Nota: La desigualdad global Ec. (3.6) es necesaria para satisfacer la desigualdad de Clausius-Duhem, mientras que las Ecs. (3.8) y (3.9) son las condiciones suficientes.

Analizando la expresión de disipación plástica de la Ec. (3.3) es posible trazar una similitud entre la presente formulación de plasticidad de gradiente y el tratamiento unificado de modelos no locales propuesto por Gudmundson (2004) [45]. Cuando se aplica integración por partes y el Teorema de la Divergencia a los términos no locales de la tasa de disipación propuesta por Gudmundson (ver Ec. 7 de [45]) dicha formulación conduce a tensiones disipativas no locales en el contorno muy similar a las obtenidas en este trabajo, cuando se omite la fase porosa del medio.

Sin embargo, una diferencia relevante entre la formulación Gudmundson y el presente trabajo es que la densidad de energía libre en la primera se expresa como función de la deformación elástica, deformación plástica y tensores gradiente de deformación plástica.

Por consiguiente, la disipación plástica incluye las diferencias entre la tasa de cambio de la energía libre con respecto a las deformación plástica y sus gradientes, y las tensiones internas conjugados a con los campos cinemáticos de desplazamiento y rotación. Estas tensiones internas son denominadas por Gudmundson como microtensiones y tensiones de momentos, respectivamente.

En el presente trabajo, basándose en trabajos anteriores de Svedberg (1999) [119] y Vrech (2007) [132] para continuos no porosos en condiciones isotérmicas, la densidad de energía libre se expresa en término del deformaciones elásticas, las variables internas y el gradiente de las variables internas (siendo éstas las únicas con características no locales). Por lo tanto, la tasa de disipación en Ec. (3.3) no incluye las llamadas microtensiones y tensiones de momentos de Gudmundson.

3.1.1 Relaciones constitutivas termodinámicamente consistentes

Basado en trabajos previos [120, 133, 35], se adopta la siguiente descomposición aditiva de la energía libre en sus componentes locales y no locales de gradientes

$$\Psi_s\left(\varepsilon_{ij}^e, m^e, q_\alpha, q_{\alpha,i}\right) = \Psi^e\left(\varepsilon_{ij}^e, m^e\right) + \Psi^{p,loc}\left(q_\alpha\right) + \Psi^{p,nloc}\left(q_{\alpha,i}\right) \tag{3.13}$$

siendo Ψ^e la energía elástica del medio poroso deducido en la Sección 2.2.5. Considerando la relación Ec. (2.40), la expresión Ec. (2.85) de la porción elástica de la energía libre para procesos isotérmicos, y despreciando tensiones y presiones iniciales, puede escribirse como

$$\Psi^e = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}C_{ijkl}\varepsilon_{kl} + \frac{1}{2}\mathrm{M}\left(\phi^e\right)^2 - \mathrm{M}B_{ij}\varepsilon_{ij}\phi^e \tag{3.14}$$

Mientras que $\Psi^{p,loc}$ y $\Psi^{p,nloc}$ son las contribuciones locales y no locales de gradientes de la energía libre, debidas al comportamiento disipativo de endurecimiento/ablandamiento isótropo, expresadas en término de las variables internas q_α y su gradiente $q_{\alpha,i}$, respectivamente.

A partir de la relaciones de Coleman en la Ec. (3.7) se tiene

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon^e_{kl} - \mathrm{M}B_{ij}\phi^e \tag{3.15}$$
$$p = -\mathrm{M}B_{ij}\varepsilon^e_{ij} + \mathrm{M}\phi^e \tag{3.16}$$

donde M es el módulo de Biot, $B_{ij} = b\delta_{ij}$ siendo b el coeficiente de Biot, y $C_{ijkl} = C^s_{ijkl} + \mathrm{M}B_{ij}B_{kl}$ es el tensor constitutivo elástico no drenado, además C^s_{ijkl} es el tensor elástico de cuarto orden que relaciona linealmente las tensiones y las deformaciones, ambos definidos en la Sección 2.2.5.

3.1.2 Ecuaciones constitutivas en tasas

En condiciones no drenadas y considerando la descomposición aditiva de la energía libre en Ec. (3.13) y las reglas de flujo Ec. (2.123) y Ec. (2.124), se obtienen las siguientes expresiones en tasas del tensor de tensiones $\dot{\sigma}_{ij}$ y de la presión de poro $\dot{p}$ a partir de Ec. (3.15) y Ec. (3.16)

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl} - C_{ijkl}\dot{\lambda}\frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} - \mathrm{M}B_{ij}\dot{\phi} + \mathrm{M}B_{ij}\dot{\lambda}\frac{\partial g}{\partial p} \tag{3.17}$$

$$\dot{p} = -\mathrm{M}B_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + \mathrm{M}B_{ij}\dot{\lambda}\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} + \mathrm{M}\dot{\phi} - \mathrm{M}\dot{\lambda}\frac{\partial g}{\partial p} \tag{3.18}$$

Luego de multiplicar Ec. (3.18) por B_{ij} y combinando con Ec. (3.17), se obtiene una expresión de la tasa del tensor de tensiones más adecuada para problemas drenados

$$\dot{\sigma}_{ij} = C^s_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl} - B_{ij}\dot{p} - C^s_{ijkl}\dot{\lambda}\frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \tag{3.19}$$

por su parte, la tasa de las tensiones disipativas de Ec. (3.10) pueden ser obtenidas a través de la regla de la cadena como sigue

$$\dot{Q}_\alpha = \dot{Q}^{loc}_\alpha + \dot{Q}^{nloc}_\alpha \tag{3.20}$$

con

$$\dot{Q}^{loc}_\alpha = -\dot{\lambda}H^{loc}_\alpha\frac{\partial g}{\partial Q_\alpha} \tag{3.21}$$
$$\dot{Q}^{nloc}_\alpha = l^2_\alpha\left(H^{nloc}_{\alpha\,ij}\dot{\lambda}_{,j}\frac{\partial g}{\partial Q_\alpha} + \dot{\lambda}H^{nloc}_{\alpha\,ij}Q_{\alpha,j}\frac{\partial^2 g}{\partial {Q_\alpha}^2}\right)_{,i} \tag{3.22}$$

En la expresión anterior se introdujeron el módulo de endurecimiento/ablandamiento local H_α^{loc}, así como también el nuevo tensor de endurecimiento/ablandamiento no local $H_{\alpha\,ij}^{nloc}$ definido por [120, 91].

$$H_\alpha^{loc} = \frac{\partial^2 \Psi^{p,loc}}{\partial {q_\alpha}^2} \quad , \quad H_{\alpha\,ij}^{nloc} = \frac{1}{l_\alpha^2} \frac{\partial^2 \Psi^{p,nloc}}{\partial q_{\alpha,i} \partial q_{\alpha,j}} \tag{3.23}$$

$H_{\alpha\,ij}^{nloc}$ es un tensor positivo definido de cuarto orden mientras que l_α es la longitud interna característica correspondiente a la fase porosa ($\alpha = p$), y al esqueleto sólido ($\alpha = s$). Al menos tres interpretaciones pueden ser atribuidas a l_α [85, 119, 130], la primera consiste en considera que la longitud característica es un parámetro dimensional conveniente para que los módulos H_α^{loc} y $H_{\alpha\,ij}^{nloc}$ tengan la misma dimensión, otra interpretación consiste en asumir que l_α es un mecanismo artificial de estabilización numérica de la teoría no local, por último, y en coincidencia con otros autores [85, 130, 128], l_α puede ser interpretada como una dimensión que caracteriza la microestructura del medio.

3.1.3 Ecuación diferencial del multiplicador plástico

A partir de la condición complementaria de Kuhn-Tucker en Ec. (2.113) y la condición de consistencia plástica, se obtiene la siguiente expresión

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial f}{\partial Q_\alpha} \dot{Q}_\alpha = 0 \tag{3.24}$$

De las Ec. (3.17), Ec. (3.18) y Ec. (3.20), se obtiene la siguiente ecuación diferencial para condiciones no drenadas

$$\begin{aligned} \dot{f} = \dot{\lambda} \Bigg(& -\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} + \mathrm{M} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} B_{ij} \frac{\partial g}{\partial p} + \mathrm{M} \frac{\partial f}{\partial p} B_{ij} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} - \mathrm{M} \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial p} - H_\alpha^{loc} \frac{\partial f}{\partial Q_\alpha} \frac{\partial g}{\partial Q_\alpha} \Bigg) \\ & + \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} - \mathrm{M} \frac{\partial f}{\partial p} B_{kl} \right) \dot{\varepsilon}_{kl} + \left(\mathrm{M} \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} B_{ij} \right) \dot{\phi} \\ & + \frac{\partial f}{\partial Q_\alpha} \left[l_\alpha^2 \left(H_{\alpha\,ij}^{nloc} \dot{\lambda}_{,j} \frac{\partial g}{\partial Q_\alpha} + \dot{\lambda} H_{\alpha\,ij}^{nloc} Q_{\alpha,j} \frac{\partial^2 g}{\partial {Q_\alpha}^2} \right)_{,i} \right] = 0 \end{aligned} \tag{3.25}$$

o bien, empleando la Ec. (3.19) en lugar de la Ec. (3.17), se obtiene la siguiente ecuación diferencial más adecuada para condiciones drenadas

$$\begin{aligned} \dot{f} = \dot{\lambda} \Bigg(& -\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl}^s \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} - H_\alpha^{loc} \frac{\partial f}{\partial Q_\alpha} \frac{\partial g}{\partial Q_\alpha} \Bigg) \\ & + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl}^s \dot{\varepsilon}_{kl} + \left(\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} B_{ij} \right) \dot{p} \end{aligned}$$

$$+\frac{\partial f}{\partial Q_\alpha}\left[l_\alpha^2\left(H_{\alpha\,ij}^{nloc}\dot{\lambda}_{,j}\frac{\partial g}{\partial Q_\alpha}+\dot{\lambda}H_{\alpha\,ij}^{nloc}Q_{\alpha,j}\frac{\partial^2 g}{\partial {Q_\alpha}^2}\right)_{,i}\right]=0 \quad (3.26)$$

Reagrupando términos, la expresión anterior puede ser escrita en una forma más compacta,

$$-\dot{f}^{nloc}+\left(h+h^{nloc}\right)\dot{\lambda}=\dot{f}^e-\dot{f} \quad (3.27)$$

donde $\dot{f}^e$ es la función de carga local, h es el módulo plástico generalizado, h^{nloc} es el módulo plástico de gradientes y $\dot{f}^{nloc}$ es la función de carga de gradientes definido según

$$\dot{f}^{nloc}=l_\alpha^2\frac{\partial f}{\partial Q_\alpha}\left\{\frac{\partial g}{\partial Q_\alpha}\left[H_{\alpha\,ij}^{nloc}\dot{\lambda}_{,ij}+H_{\alpha\,ij,j}^{nloc}\dot{\lambda}_{,i}\right]+2\frac{\partial^2 g}{\partial {Q_\alpha}^2}Q_{\alpha,i}H_{\alpha\,ij}^{nloc}\dot{\lambda}_{,j}\right\} \quad (3.28)$$

$$h^{nloc}=-l_\alpha^2\frac{\partial f}{\partial Q_\alpha}\left\{\frac{\partial^2 g}{\partial {Q_\alpha}^2}\left[H_{\alpha\,ij}^{nloc}Q_{\alpha,ij}+H_{\alpha\,ij,j}^{nloc}Q_{\alpha,i}\right]+\frac{\partial^3 g}{\partial {Q_\alpha}^3}Q_{\alpha,i}H_{\alpha\,ij}^{nloc}Q_{\alpha,j}\right\} \quad (3.29)$$

Tanto la función de fluencia (o carga) local como el módulo plástico generalizada se puede descomponer en los componentes ($\dot{f}_s^e$, h_s) y ($\dot{f}_p^e$ y h_p) relacionados con el esqueleto sólido y a la fase porosa, respectivamente. Esta descomposición es válida para condiciones drenadas y no drenadas.

$$\dot{f}^e=\dot{f}_s^e+\dot{f}_p^e \quad (3.30)$$

$$h=h_s+h_p+\bar{H} \quad (3.31)$$

con

$$\bar{H}=H_\alpha^{loc}\frac{\partial f}{\partial Q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial Q_\alpha} \quad (3.32)$$

donde, para condiciones drenadas se tiene

$$\dot{f}_s^{e,d}=\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}C_{ijkl}^s\dot{\varepsilon}_{kl} \quad (3.33)$$

$$\dot{f}_p^{e,d}=\left(\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}B_{ij}\right)\dot{p} \quad (3.34)$$

$$h_s^d=\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}C_{ijkl}^s\frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \quad (3.35)$$

$$h_p^d=0 \quad (3.36)$$

mientras que para condiciones no drenadas se tiene

$$\dot{f}_s^{e,u} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} - \mathrm{M} \frac{\partial f}{\partial p} B_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \tag{3.37}$$

$$\dot{f}_p^{e,u} = \dot{\phi} \left(\mathrm{M} \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} B_{ij} \right) \tag{3.38}$$

$$h_s^u = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \tag{3.39}$$

$$h_p^u = -\mathrm{M} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} B_{ij} \frac{\partial g}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial p} B_{ij} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial p} \right) \tag{3.40}$$

Cuando todas las variables de estado son espacialmente homogéneas, puede asumirse que el gradiente de la tensión disipativa es despreciable, luego $Q_{\alpha,i} = 0$ y en consecuencia $\partial^2 g / \partial {Q_\alpha}^2 = 0$, ver [134, 32, 81, 120]. De tal manera,

$$h^{nloc} = 0 \quad \text{and} \quad \dot{f}^{nloc} = l_\alpha^2 \frac{\partial f}{\partial Q_\alpha} \frac{\partial g}{\partial Q_\alpha} H_{\alpha\, ij}^{nloc} \dot{\lambda}_{,ij} \tag{3.41}$$

ay la ecuación diferencial que permite obtener el multiplicador plástico se reduce a

$$-\dot{f}^{nloc} + h\dot{\lambda} = \dot{f}^e - \dot{f} \tag{3.42}$$

3.1.4 Relación constitutiva elastoplástica de gradiente

Considerando carga plástica, el multiplicador plástico puede ser fácilmente determinado a partir de la Ec. (3.42). Luego, reemplazando en la tasa de la ecuación constitutiva del esqueleto sólido para medios porosos tanto para el caso no drenado de Ec. (3.17), como el drenado de Ec. (3.19), se obtiene

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^s \dot{\varepsilon}_{kl} - B_{ij} \dot{p} - C_{ijkl}^s \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \left(\dot{f}^e + \dot{f}^{nloc} \right) / h \tag{3.43}$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} - \mathrm{M} B_{ij} \dot{\phi} + \left(\mathrm{M} B_{ij} \frac{\partial g}{\partial p} - C_{ijkl} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \right) \left(\dot{f}^e + \dot{f}^{nloc} \right) / h \tag{3.44}$$

Considerando las definiciones de $\dot{f}^e$ y $\dot{f}^{nloc}$ en las ecuaciones anteriores resulta

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}^{ep,sd} \dot{\varepsilon}_{kl} + E_{ij}^{ep,pd} \dot{p} - E_{ij}^{g,spd} \dot{f}^g \tag{3.45}$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}^{ep,su} \dot{\varepsilon}_{kl} + E_{ij}^{ep,pu} \dot{\phi} - E_{ij}^{g,spu} \dot{f}^g \tag{3.46}$$

siendo $\boldsymbol{E}^{ep,s}$ el operador de cuarto orden elastoplástico del esqueleto sólido, $\boldsymbol{E}^{ep,p}$ el operador de segundo orden elastoplástico de la fase porosa y $\boldsymbol{E}^{g,sp}$ el tensor de segundo orden elastoplástico basado en gradientes para ambas fases. El superíndice ^{d} o ^{u} indica la condición de borde hidráulica considerada, drenada o no drenada, respectivamente. Las matrices de Ec. (3.45) y Ec. (3.46) están presentadas en el Apéndice B.

3.2 Casos particulares de análisis

En esta Sección se presentan algunos casos particulares de análisis con el fin de mostrar posibles comportamientos materiales abarcados por esta teoría consititutiva

Comportamiento no local restringido al esqueleto sólido En algunos materiales empleados en la ingeniería el comportamiento no local disipativo puede considerarse totalmente restringido a la fase sólida o granular. La formulación constitutiva termodinámicamente consistente presentada en las secciones anteriores puede ser ajustada fácilmente para reproducir esta forma particular de comportamiento no local. En este caso la fase porosa no se comporta como un proceso termodinámico irreversible, por lo tanto $\dot{phi}^p = 0$ y $\dot{q}_p = 0$. En consecuencia la Ec. (3.8) se transforma en

$$\mathfrak{D} = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}^p_{ij} + Q_s\dot{q}_s \geq 0 \tag{3.47}$$

Esta formulación no local requiere sólo una longitud interna característica, también está enmarcada en formulación unificada de plasticidad de gradiente de Gudmundson, 2004 [45].

Es importante destacar que la condición $\dot{\phi}^p = 0$ usualmente conduce a modelos constitutivos que no cumplen en forma estricta la Segunda Ley de la Termodinámica. Los modelos basados en la Teoría de Mezclas (presentado en la Sección 2.1) propuestos en [20, 55, 109, 74] son ejemplos típicos de esta clase de formulaciones constitutivas. Lo mismo puede decirse de los modelos basados en simplificaciones ficticias del comportamiento material como las propuestas de [59, 25] que emplean combinaciones de estado hipotéticas para obtener la respuesta acoplada de todas las fases que componen el medio poroso.

Comportamiento no local restringido a la fase porosa A partir de algunas evidencias experimentales es posible asumir que para determinados estados tensionales y condiciones de borde hidráulicas el fenómeno de localización podría desarrollarse sólo en la fase porosa [72, 66, 107]. Este comportamiento particular también se puede modelar con la formulación no local de gradientes propuesta en este trabajo. Para este fin, el gradiente de variables internas que controlan el comportamiento local de la fase sólida es despreciado mientras que los términos de gradientes de las variables internas correspondientes a la fase porosa son los únicos con características no locales.

CAPÍTULO 4

Modelos poroplásticos termodinamicamente consistentes

Luego de la presentación de la teoría no local basada en gradientes termodinámicamente consistente Capítulo 3 se propone la particularización de dicha teoría a un modelo material específico para medios porosos. En este sentido, se consideran dos modelos materiales muy conocidos para medios porosos, el modelo de plasticidad Cam Clay modificado empleado usualmente en la predicción mecánica de suelos arcillosos saturados y parcialmente saturados [13, 14, 86] y modelo material de Drucker-Prager parabólico comúnmente usado en formulaciones constitutivas de hormigón [130, 88].

Los modelos materiales usuales empleados en medios no porosos cubren una amplia gama de materiales cohesivos friccionales pero tienen dificultades para capturar el comportamiento plástico de los medios porosos, tales como arcillas. En efecto, los suelos no pueden sostener tensiones de tracción, ni presiones de confinamiento muy elevadas, mientras que la dilatancia observada puede ser positiva (dilatación) o negativa (contracción), dependiendo de la relación entre el esfuerzo cortante y el nivel de confinamiento efectivo.

Este capítulo se enfoca en la presentación del las principales características de estos modelos materiales empleados en medios porosos y su particularización para la teoría no local de gradientes propuesta en [77, 35]. Por otro lado, la descripción matemática de ambas longitudes internas características referidas al esqueleto sólido y a la fase porosa son propuestas, así como también las correspondientes funciones potenciales plásticas.

4.1 Modelo de plasticidad Cam Clay modificado

A partir de las investigaciones de realizadas por Roscoe et al. (1958) [102] en la Universidad de Cambridge se desarrollaron una familia de modelos de plasticidad para suelos saturados al introducir una función de endurecimiento isotrópica en la función de fluencia. Posteriormente surgieron numerosos modelos entre los cuales se encuentra el Cam Clay porpuesto por Schofield and Wroth (1968) [108] y el Cam Clay modificado propuesto por Roscoe and Burland (1968) [101]. En un principio los modelos basados en el Cam Clay original estaban orientados al análisis de arcillas normalmente consolidadas, sin embargo,

en virtud de la sus adecuadas capacidades de modelar las características de diferentes tipos de suelos y el reducido número de parámetros, ha sido extendido a una amplia gama de suelos incluyendo los suelos no saturados [5, 13], incluso para cargas cíclicas [89].

Las principales características del modelo original Cam Clay modificado son las siguientes:

a- La función de fluencia describe una elipse en el plano (σ', τ)

b- La componente volumétrica de la deformación plástica sobre la linea de estados críticos es nula (tangente horizontal) y el flujo plástico se produce a volumen constante.

c- La plasticidad es asociada, con lo cual los estados de rotura quedan definidos por el valor máximo $\tau = p_{co}/2$.

d- La ley de endurecimiento/ablandamiento es una función creciente, convexa y asintótica a un valor determinado, con lo cual se cumple la condición de Prager y no se viola el Segundo principio de la Termodinámica.

La función de fluencia se define por

$$f\left(\sigma, \tau, p, Q_\alpha\right) = \left(\sigma - \beta p + \frac{\tau^2}{M^2\left(\sigma - \beta p\right)}\right) - Q_\alpha \tag{4.1}$$

donde $\sigma = I_1/3$ es la tensión total hidrostática y $\sigma' = \sigma - \beta p$ es el tensor de tensiones efectivas, $\tau = \sqrt{3J_2}$ son las tensiones de corte, M es la pendiente de la Linea de Estados Críticos (CSL en ingles) y Q_α es la tensión disipativa termodinámicamente consistente equivalente a la presión de preconsolidación p_{co}, ver Fig. 4.1. Además, I_1 y J_2 son el primer y segundo invariante del tensor de tensiones totales y del tensor desviador, respectivamente.

La presión de preconsolidación p_{co} es el límite superior de la presión efectiva σ' y resulta ser la presión máxima efectiva a la que el material ha sido sometido durante los últimos procesos de cargas plásticas.

4.1.1 Potential plástico

Por otro lado, resultados experimentales mostraron que el modelo de estado crítico convencional, a menudo subestima los valores del coeficiente de compresibilidad volumétrica K_0 [44, 7] por lo tanto resulta conveniente emplear un potencial plástico diferente de la función de fluencia. Para evitar la subestimación del coeficiente de compresibilidad volumétrica K_0 por el modelo de estado crítico convencional diferentes autores han propuesto algunas alternativas para las reglas de flujo no asociado [7, 117, 75].

De este modo, el se propone el siguiente potencial plástico

$$g\left(\sigma, \tau, p, Q_\alpha\right) = \eta\left[\left(\sigma - \beta p\right)^2 - \left(\sigma - \beta p\right) Q_\alpha\right] + \left(\frac{\tau}{M}\right)^2 \tag{4.2}$$

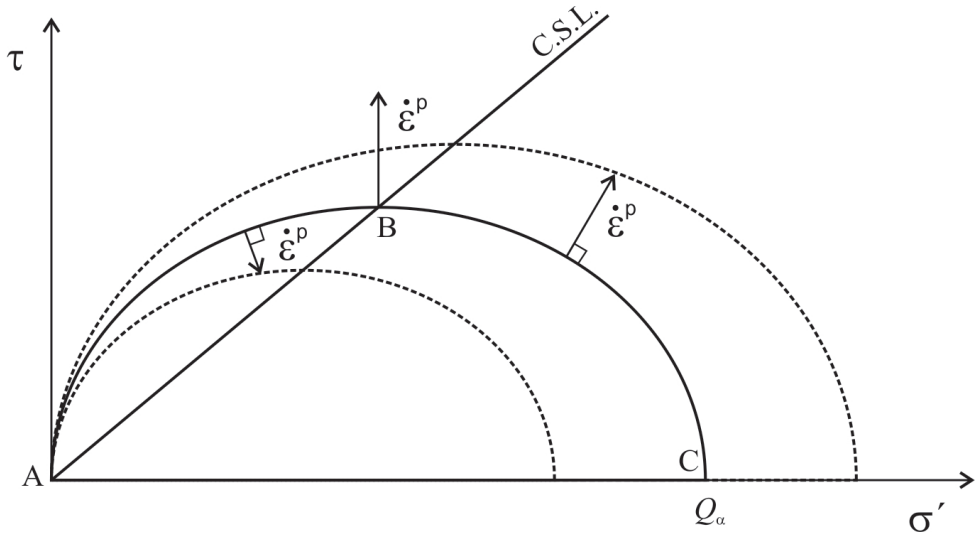

Figura 4.1: Modelo de plasticidad de Cam Clay modificado. El material presenta contracción para $\sigma' > Q\alpha/2$ (superficie BC) y dilatancia plástica para $\sigma' < Q_\alpha/2$ (superficie AB), para $\sigma' = Q_\alpha/2$ la evolución plástica ocurre a volumen constante y por lo tanto el flujo plástico se produce en forma indefinida a carga constante (plasticidad perfecta) y la linea se denomina Linea de Estados Críticos (C.S.L. en inglés).

η es un coeficiente que limita la influencia de la presión volumétrica en régimen de ablandamiento (ver Fig. 4.2).

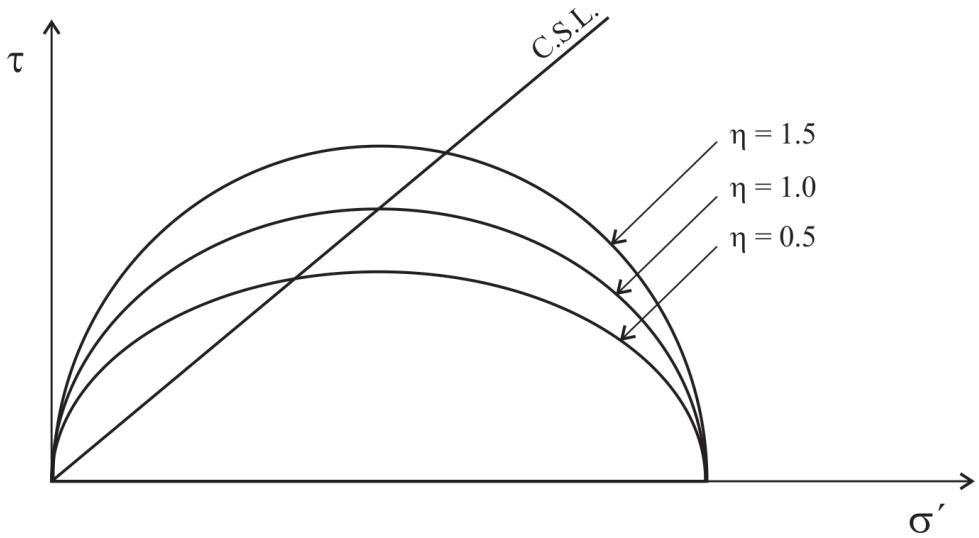

Figura 4.2: Modelo plástico de Cam Clay modificado y potencial plástico

Los gradientes del potencial plástico, Ec. (4.2), están resumidos en el Apéndice C.

4.1.2 Ley de endurecimiento

La adopción del potencial plástico Ec. (4.2) permite no solo reducir el coeficiente de compresibilidad volumétrica sino también mantener la consistencia termodinámica del

modelo, la cual no podría ser conseguida empleando reglas de flujo no asociada, como las propuestas en [5, 7].

La consistencia termodinámica requiere a su vez que la parte disipativa de la energía libre de deformación plástica definida en Ec. (3.13) sea expresada de la siguiente forma

$$\Psi^p\left(\varepsilon^p, \varepsilon^p_{,i}\right) = \Psi^{p,loc}\left(\varepsilon^p\right) + \Psi^{p,nloc}\left(\varepsilon^p_{,i}\right) = -\frac{1}{\chi} p^0_{co} \exp\left(\chi \varepsilon^p\right) - \left(\frac{1}{2} l^2_\alpha H^{nloc}_{\alpha\, ij} \varepsilon^p_{,j}\right)_{,i} \tag{4.3}$$

donde el coeficiente χ se define como

$$\chi = -\frac{\beta\left(1 + e_0\right)}{\gamma - \kappa} \tag{4.4}$$

siendo β un coeficiente de ajuste (en este trabajo se asume $\beta = 1$), e_0 la relación de vacíos inicial, γ un parámetro de endurecimiento y κ el índice de dilatación (obtenido de un ensayo odométrico).

La deformación volumétrica plástica del medio poroso, ε^p (ver Ec. (2.108)), puede ser expresada como una función de las variables de estado con el fin de describir la evolución plástica del esqueleto sólido y de la fase porosa, en término de la porosidad plástica ϕ^p y la deformación plástica volumétrica del esqueleto sólido ε^p_s, respectivamente [18].

$$\varepsilon^p = \phi^p + \left(1 - \phi_0\right) \varepsilon^p_s \tag{4.5}$$

De la Ec. (3.11) y Ec. (3.12) las siguientes expresiones de las tensiones disipativas locales y no locales son ontenidas

$$Q^{loc}_\alpha\left(\varepsilon^p\right) = -\frac{\partial \Psi_s}{\partial \varepsilon^p} = p^0_{co} \exp\left(\chi\left(\phi^p + \left(1 - \phi_0\right) \varepsilon^p_s\right)\right) \tag{4.6}$$

$$Q^{nloc}_\alpha\left(\varepsilon^p_{,i}\right) = -\left(\frac{\partial \Psi_s}{\partial \varepsilon^p_{,i}}\right)_{,i} = l^2_s H^{nloc}_{s\, ij} \varepsilon^p_{s\, ,ij} + l^2_p H^{nloc}_{p\, ij} \phi^p_{,ij} \tag{4.7}$$

donde l_s y l_p son las longitudes internas características del esqueleto sólido y de la fase porosa, respectivamente.

4.2 Modelo de plasticidad de Drucker-Prager parabólico

El modelo de plasticidad de Drucker-Prager ha sido empleado en numerosas formulaciones constitutivas de materiales cohesivo-friccionales. La formulación clásica del criterio de Drucker-Prager (1952) [29] es una simple modificación del criterio de von Mises incluyendo un parámetro adicional en función del primer invariante del tensor de tensiones.

Este modelo material simple permite reproducir con suficiente precisión el comportamiento mecánico de estos materiales, que presentan una resistencia muy diferente en tracción y compresión.

La versión original del modelo de material de Drucker-Prager se expresa mediante la siguiente función de fluencia

$$f\left(I_1, J_2\right) = \sqrt{J_2} + \alpha I_1 - k \tag{4.8}$$

ambos parámetros α y k son calibrados con las resistencias máximas a tracción y compresión, f_t y f_c, respectivamente. El coeficiente α se denomina coeficiente friccional interno, mientras que k representa el límite de la tensión de corte puro. Por otro lado, si todas las tensiones principales son iguales, es decir $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$ el límite de la tensión media es $\sigma = k/\alpha$. Por lo tanto, el coeficiente k/α es conocido como presión de cohesión.

$$\alpha = \frac{f_c - f_t}{\sqrt{3}\ \left(f_c + f_t\right)} \qquad ; \qquad k = \frac{2 f_c f_t}{\sqrt{3}\ \left(f_c + f_t\right)} \tag{4.9}$$

Cuando ambas resistencias máximas son iguales, $\alpha = 0$ y la Ec. (4.8) tiende al criterio clásico de von Mises. La función de fluencia Ec. (4.8) representa una superficie cónica en el espacio de las tensiones principales mientras que en el espacio de los invariantes de del tensor de tensiones representa una función lineal.

El principal inconveniente que presenta el modelo lineal de Drucker-Prager es que en determinadas ocasiones produce dilatancia plástico excesiva. Para mejorar esta limitación se propuso una versión parabólica del criterio de Drucker-Prager. Para materiales no porosos este criterio esta definido por (ver Fig. 4.3)

$$f\left(I_1, J_2\right) = J_2 + \alpha I_1 - k \tag{4.10}$$

siendo los parámetros de fricción y cohesión:

$$\alpha = \frac{f_c - f_t}{3} \qquad ; \qquad k = \frac{f_c f_t}{3} \tag{4.11}$$

En cuanto al modelado de medios porosos, el modelo material de Drucker-Prager parabólico puede ser re-escrito teniendo en cuenta el efecto de la presión de poro,

$$f\left(\sigma, J_2, p, Q_\alpha\right) = J_2 + \alpha\left(\sigma - \beta p\right) - Q_\alpha \tag{4.12}$$

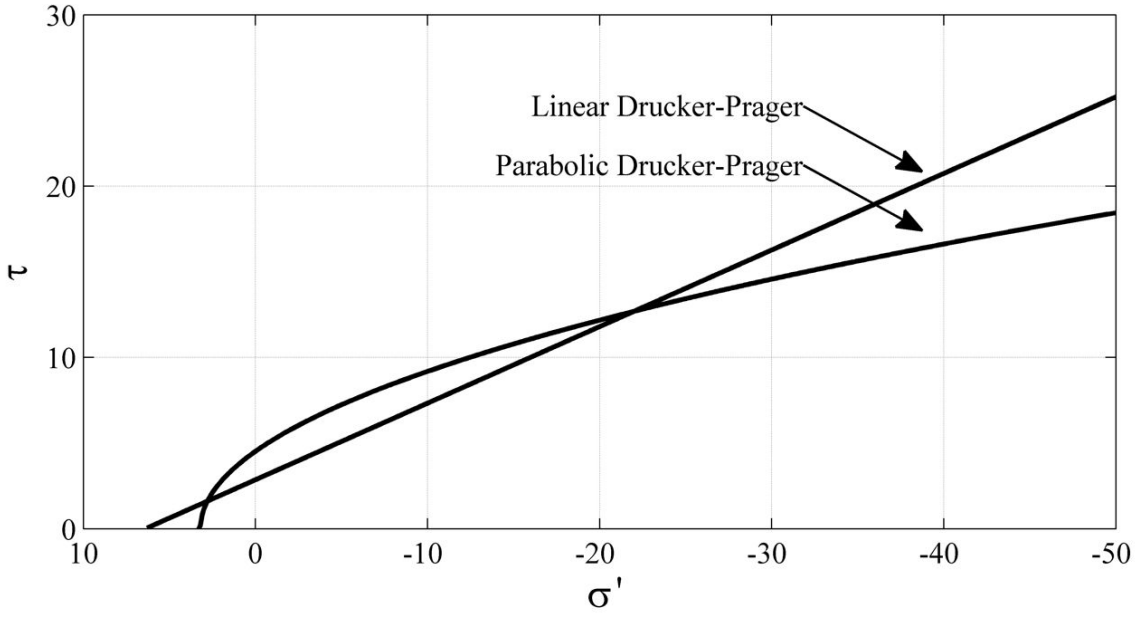

Figura 4.3: Criterio Lineal y Parabólico de Drucker-Prager

4.2.1 Potencial plástico

Con la finalidad de mejorar las predicciones de la dilatancia volumétrica del hormigón sometido a confinamiento [130, 88], se propone una función de flujo plástico no asociada.

$$g\left(\sigma, J_2, p, Q_\alpha\right) = J_2 + \eta\alpha\left(\sigma - \beta p\right) - Q_\alpha \tag{4.13}$$

La influencia del parámetro de no asociatividad η se muestra en la Fig. 4.4.

Los gradientes del potencial plástico de la Ec. (4.13) están resumidos en el Apéndice C.

4.3 Expresión matemática de las longitudes internas características

En la presente formulación no local la combinación entre ambas longitudes internas características l_s y l_p, correspondientes al esqueleto sólido y a la fase porosa, respectivamente, define el ancho de la banda de corte, donde se concentra la disipación plástica y se produce la degradación mecánica del material.

En los materiales porosos cuasi-frágiles como algunos suelos y hormigones, y el proceso de degradación de la resistencia en el régimen post-pico puede ser controlada por dos variables independientes, la presión de confinamiento durante el proceso de ablandamiento y el contenido de agua de los poros. Esta dependencia puede describirse matemáticamente mediante la expresión que define la longitud característica interna.

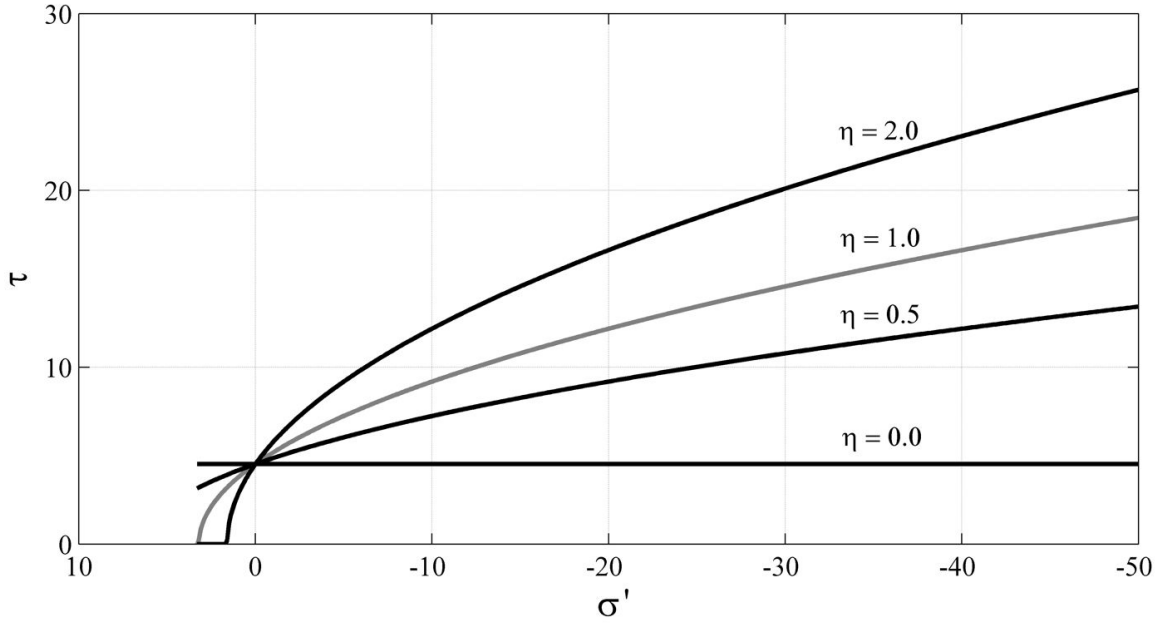

Figura 4.4: Criterio de Drucker-Prager parabólico y potencial plástico

A partir de Vrech y Etse (2009) [133] la longitud interna característica para la fase sólida puede adoptar la siguiente expresión matemática (ver Fig. 4.5)

$$l_s(\sigma') = \begin{cases} 0 & \text{for } \sigma' \leq 0 \\ \frac{l_{s,m}}{2}\left[1 + \sin\left(\frac{\pi}{Q_\alpha/2}\sigma' - \frac{\pi}{2}\right)\right] & \text{for } 0 < \sigma' \leq Q_\alpha/2 \\ l_{s,m} & \text{for } \sigma' > Q_\alpha/2 \end{cases} \tag{4.14}$$

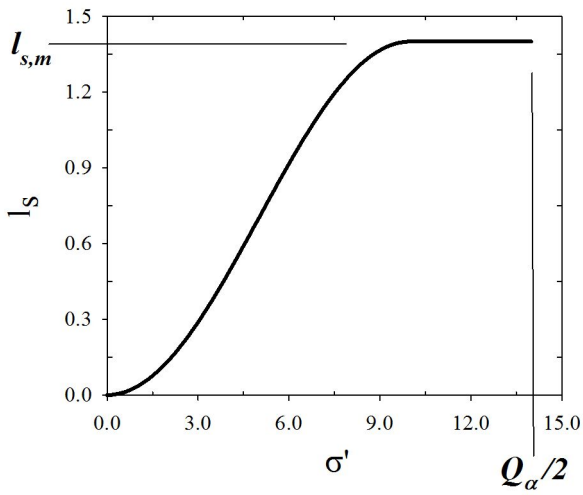

Figura 4.5: Longitud interna característica del esqueleto sólido vs. σ'

La longitud interna característica de la fase porosa está gobernada por el grado de saturación del medio poroso S_w o, en forma indirecta por la presión de poro actuante. A

medida que el espécimen de suelo se seca o pierde humedad, l_p tiende a cero, y se espera que el modo de falla sea frágil. Por otro lado, cuando el contenido de agua se incrementa, l_p tiende a un valor máximo $l_{p,m}$, en cuyo caso se espera que el modo de falla sea dúctil.

El grado de saturación del medio poroso está asociado con la presión de poro (o succión) por una expresión logarítmica [41, 67] que depende de numerosos coeficientes obtenidos experimentales, esta expresión matemática se denominada curva característica de agua del suelo. Otra opción para describir la relación entre el grado de saturación y la presión de poro es una función hiperbólica como la propuesta por Mroginski et al. (2010) [74]. Esta función puede ser fácilmente invertida, además requiere de un algoritmo adicional para la obtener su raíz. Entonces,

$$p = \frac{1}{2\,b} \ln\left(\frac{a + S_w}{a - S_w}\right) \tag{4.15}$$

siendo a y b dos parámetros de ajuste. En la Fig. 4.6a se representa la Ec. (4.15), siendo p_{100} la presión de poro de agua correspondiente al espécimen completamente saturado.

Por lo tanto, se propone la siguiente expresión para la longitud interna característica de la fase porosa,

$$l_p\,(p) = \begin{cases} 0 & \text{for } p \leq 0 \\ a\, l_{p,m} \tanh\,(b\, l_p) & \text{for } 0 < p \leq p_{100} \end{cases} \tag{4.16}$$

En la Fig. 4.6b se presenta la Ec. (4.16).

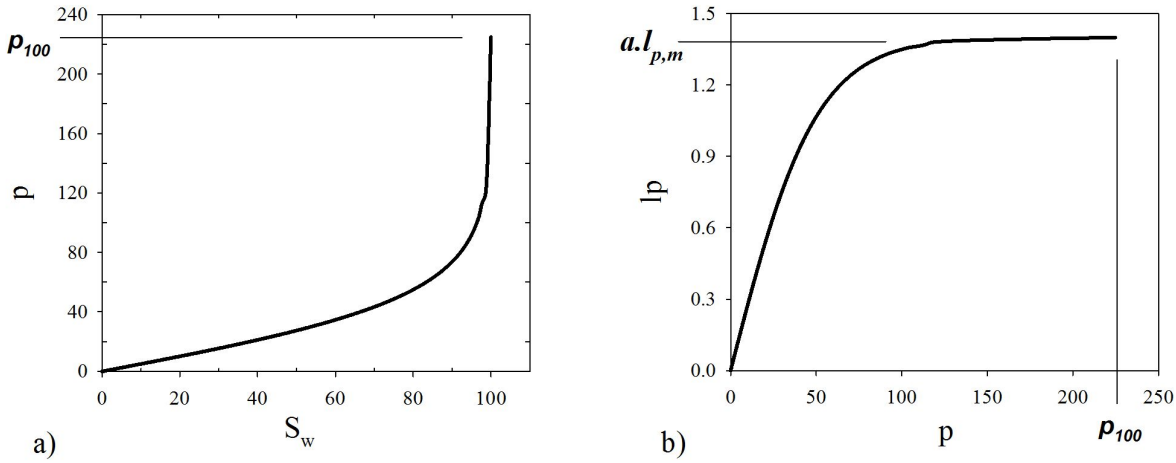

Figura 4.6: a) Grado de saturación vs. Presión de poro; b) Longitud interna característica de la fase porosa vs. Presión de poro

CAPÍTULO 5

Análisis de inestabilidad en la forma de bifurcación discontinua

En este capítulo se realiza el análisis de bifurcación discontinua en medios porosos locales y no locales, así como también la deducción del módulo de endurecimiento crítico teniendo en cuenta condiciones de borde hidráulicas drenadas y no drenadas.

5.1 Conceptos básico sobre la definición de falla

La falla generalizada en un medio continuo se produce generalmente como consecuencia de fallas locales en zonas o regiones donde se verifica que el material constituyente está sometido a un estado tensional post-pico. La mecánica de medios continuos cuenta con numerosos estudios sobre el proceso de falla de los materiales [85, 40, 127, 57], y se han identificado una sucesión de eventos que se inician en escala microscópica y provocan el deterioro progresivo del medio, que inicialmente es tratado como un continuo, hasta transformarlo en un medio discontinuo.

Dado un dominio arbitrario Ω, la falla o discontinuidad S que separa los subdominios Ω^+ y Ω^-, queda caracterizada por el vector normal unitario $\boldsymbol{n}$ en el punto P (ver Fig. 5.1).

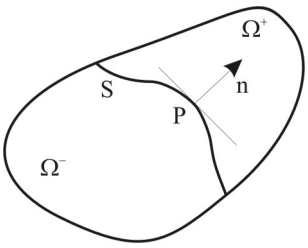

Figura 5.1: Superficie de discontinuidad S

Dicha discontinuidad puede ser analizada desde perspectivas diferentes según el enfoque que se desee realizar. Se definen así tres tipos de fallas:

1. *Falla discreta*: este tipo de análisis escapa a la Mecánica del Medio Continuo y debe ser abordado por la Mecánica de Fracturas. La discontinuidad se presenta en el campo de velocidad de desplazamiento, es decir $[[\dot{\boldsymbol{u}}]] \neq 0$

2. *Falla localizada:* Esta forma se falla se caracteriza por mostrar continuidad en el campo $\dot{u}_i$ mientras que la discontinuidad se presenta en el campo de sus gradientes, las deformaciones. Es decir $[[\dot{\boldsymbol{u}}]] = 0$ y $[[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]] \neq 0$.

3. *Falla difusa:* Es propia de materiales dúctiles. En este caso tanto el campo $\dot{u}_i$ como $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ permanecen continuos, es decir $[[\dot{\boldsymbol{u}}]] = 0$ y $[[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]] = 0$.

En las definiciones anteriores el operador $[[\bullet]]$ es el denominado operador salto, definido por

$$[[\bullet]] = \bullet^{+} - \bullet^{-} \tag{5.1}$$

Estos conceptos provienen de la mecánica de sólidos aunque pueden ser extrapolados a la mecánica de medios porosos sin mayores dificultades, considerando que el medio está constituido por un esqueleto sólido continuo circundado, en el caso más general, por fluidos de diferentes características. La influencia de cada fase fluida es tenida en cuenta a partir de la presión de poro correspondiente.

Por lo tanto, en relación a los medios porosos el análisis de localización puede presentar dos enfoques diferentes basados en la hipótesis de discontinuidad asumida en la fase porosa. El primer enfoque consiste en atribuir el fenómeno localización de deformaciones exclusivamente a la estructura sólida del medio. En este enfoque, las discontinuidades se verifican solo en la tasa de deformación permaneciendo continuas las fases fluidas. Por otro lado, la segunda alternativa supone discontinuidades tanto en la fase sólida como en el fluido. Este fenómeno es poco frecuente, sin embargo, algunos investigadores aseguran que ambas hipótesis se han observado en la naturaleza de los suelos cohesivos friccionales y su validez depende de las condiciones hidráulicas del medio, concretamente, en condiciones drenadas (cuando la presión neta se disipa por completo) la primera hipótesis parece tener mayor validez [14, 31], sin embargo, si las condiciones de confinamiento y la tasa de aplicación de las cargas produce una sobre presión de poro se puede evidenciar un salto o discontinuidad a causa de la expansión que se produce cuando el esqueleto sólido falla en forma localizada, siendo válida el segundo hipótesis [107].

5.2 Análisis de bifurcación discontinua en medios porosos locales

Ha sido ampliamente aceptado que cuando modelos constitutivos disipativos de materiales cuasi-frágiles y dúctiles son sometidos a carga monotónica en el régimen inelástico, pueden presentar discontinuidades espaciales de los campos cinemáticos [53, 103] dependiendo de la condición de contorno particular, pero también del grado de no asociatividad, del contenido de agua, de las inhomogeneidades, etc. La aparición de grietas y bandas de

corte observados experimentalmente en materiales cementicios y granular así como también en metales están relacionadas con el modo de falla de localizada.

Cuando se estudian teorías constitutivas de materiales no porosos, diferentes autores realizaron análisis numéricos y teóricos para obtener predicciones de los modos de falla localizados en forma de bifurcación discontinua, ver entre otros [39, 85, 16, 40, 127, 57].

En el caso de medios porosos, el análisis de localización no debe limitarse a considerar que las discontinuidades tienen lugar sólo en la fase sólida, véase [12, 14, 107]. Por el contrario, las discontinuidades pueden desarrollarse en todas las diferentes fases durante un proceso de carga monotónica o debido a cambios en las condiciones de humedad de medio poroso. Desde el punto de vista matemático este supuesto significa que tanto el campo de gradientes de velocidad y la tasa del contenido de masa de fluido son discontinuos y sus saltos se definen como

$$[[\dot{\varepsilon}_{ij}]] = 1/2\,(g_i n_j + n_i g_j) \tag{5.2}$$

$$[[\dot{m}]] = -\,[[M_{i,i}]] = -n_i g_i^{\mathrm{M}} \tag{5.3}$$

Aplicando la relación de Hadamard de una discontinuidad de primer orden a una magnitud escalar p, y tensorial σ_{ij} [48, 18] se obtienen las siguientes ecuaciones de balance (ver Apéndice D para mas detalles).

$$\mathrm{c}\,[[p_{,i}]] + [[\dot{p}]]\,n_i = 0 \tag{5.4}$$

$$\mathrm{c}\,[[\sigma_{ij,j}]] + [[\dot{\sigma}_{ij}]]\,n_j = 0 \tag{5.5}$$

Estado drenado

En el caso completamente drenado los efectos plásticos que intoducen posibles localizaciones en el medio poroso conciernen pura y exclusivamente al esqueleto sólido y no al fluido. El flujo de fluidos en medios porosos deformables está gobernado por la ley de Darcy. Por lo tanto, despreciando las fuerzas de inercia, el vector de flujo relativo de la masa fluida M_i se expresa como

$$M_i = -\rho^f k_{ij} p_{,j} \tag{5.6}$$

donde k_{ij} es el tensor de permeabilidad del medio poroso. Durante un proceso de carga cuasi-estática no es posible observar procesos de acumulación de energía de deformación dentro de la fase fluida en virtud del comportamiento propio de los fluidos (no viscosos), dado que el fluido sometido a fuertes gradientes de presión pueden presentar un proceso de difusión espontáneo, con una caída muy rápida de presión. En consecuencia, el vector de flujo relativo de la masa de fluido debe permanecer continuo. De la Ec. (5.6) se obtiene

$$[[M_i]] = -\rho^f k_{ij}\,[[p_{,j}]] = 0 \tag{5.7}$$

Esta expresión conduce a la conclusión de que el gradiente de presión de poro no puede presentar discontinuidades, $[[p_{,i}]] = 0$. Por lo tanto, la Ec. (5.4) solo se cumple si la tasa de la presión de poro permanece continua, es decir $[[\dot{p}]] = 0$.

Luego, teniendo en cuenta la ecuación de balance de momentum para problemas cuasi-estáticos y aplicando el operador salto a la ecuación constitutiva incremental, Ec. (3.45), y sustituyendo en la Ec. (5.5) se tiene

$$[[\dot{\sigma}_{ij}]]\, n_j = E^{ep,sd}_{ijkl}\, [[\dot{\varepsilon}_{kl}]]\, n_j = 0 \tag{5.8}$$

siendo $E^{ep,sd}_{ijkl}$ el tensor elastoplástico del esqueleto sólido, definido en la Sección 3.1.4. Introduciendo la Ec. (5.2) en la Ec. (5.8) se tiene

$$[[\dot{\sigma}_{ij}]]\, n_j = A^{d,loc}_{ij} g_j = 0 \tag{5.9}$$

donde el tensor acústico elastoplástico para plasticidad clásica en medios porosos en condiciones drenadas se descompone en sus partes elástica, $A^{d,e,s}_{ij}$, y elastoplástica, $A^{d,ep,s}_{ij}$, según

$$A^{d,loc}_{ij} = E^{ep,sd}_{ijkl} n_l n_k = A^{d,e,s}_{ij} - A^{d,ep,s}_{ij} \tag{5.10}$$

donde

$$\begin{aligned} A^{d,e,s}_{ij} &= C^{s}_{ijkl} n_l n_k \\ A^{d,ep,s}_{ij} &= \frac{C^{s}_{ijmn} g^{s}_{mn} f^{s}_{pq} C^{s}_{pqkl}}{h} n_l n_k \end{aligned} \tag{5.11}$$

A partir de ahora se emplea la siguiente notación abreviada de las derivadas parciales:

$$\begin{aligned} f^{s}_{ij} &= \partial f / \partial \sigma_{ij} \quad ; f^{p} = \partial f / \partial p \quad ; f^{Q}_{\alpha} = \partial f / \partial Q_{\alpha} \\ g^{s}_{ij} &= \partial g / \partial \sigma_{ij} \quad ; g^{p} = \partial g / \partial p \quad ; g^{Q}_{\alpha} = \partial g / \partial Q_{\alpha} \end{aligned} \tag{5.12}$$

Las soluciones no triviales de Ec. (5.9) pueden obtenerse a partir del análisis espectral del tensor acústico local $A^{d,loc}_{ij}$. Luego, la condición de localización para medios porosos locales drenados es

$$\det\left(A^{d,loc}_{ij}\right) = 0 \tag{5.13}$$

A partir de estos supuestos la influencia de la presión de poro puede despreciarse cuando las condiciones de borde hidráulicas sean drenadas. En consecuencia, la discontinuidad relacionada con la condición de bifurcación anterior corresponde solo al campo de velocidad de deformación del esqueleto sólido, y el tensor de localización es equivalente al de un medio continua elastoplástico clásico. Sin embargo, puesto que la condición de localización en Ec. (5.13) involucra solamente las propiedades poroelásticas drenadas, la presión del fluido solamente esta involucrada en la determinación del valor actual de la función de fluencia f y del módulo plástico generalizado h.

Condición no drenada

A continuación se estudia el fenómeno de localización en condiciones no drenadas. Por condiciones no drenadas debe entenderse que tanto el esqueleto sólido como las fases fluidas se mueven solidariamente, es decir que la variación del contenido de masa del poro m se conserva en el movimiento del esqueleto sólido $\dot{m} = 0$, y el medio se comporta como un material homogéneizado cuyas propiedades no corresponden a las del esqueleto sólido ni a las de la fase porosa exclusivamente. Bajo estas consideraciones es posible calcular la presión de poro a través de la cinemática de la fase sólida, $g_i \equiv g_i^{\mathrm{M}}$.

Aplicando el operador salto a la Ec. (3.46) y a la Ec. (5.2),

$$[[\dot{\sigma}_{ij}]]\, n_j = A_{ij}^{u,loc} g_j = 0 \tag{5.14}$$

donde, de la misma forma que en la sección anterior, el tensor acústico elastoplástico para plasticidad local en condiciones no drenadas puede ser descompuesto en su parte elástica debida al esqueleto sólido $A_{ij}^{u,e,s}$ y debido a la fase porosa $A_{ij}^{u,e,p}$, así como también en sus partes elastoplásticas referidas nuevamente al esqueleto sólido $A_{ij}^{u,ep,s}$, y a la fase porosa $A_{ij}^{u,ep,p}$, y por último, en un tensor acústico elastoplástico acoplado para el esqueleto sólido y la fase porosa $A_{ij}^{u,ep,sp}$, según

$$A_{ij}^{u,loc} = E_{ijkl}^{ep,su} n_l n_k = A_{ij}^{u,e,s} + A_{ij}^{u,e,p} - A_{ij}^{u,ep,s} - A_{ij}^{u,ep,p} + A_{ij}^{u,ep,sp} \tag{5.15}$$

donde

$$\begin{aligned}
A_{ij}^{u,e,s} &= A_{ij}^{d,e,s} = C_{ijkl}^{s} n_l n_k \\
A_{ij}^{u,e,p} &= \mathrm{M} B_{ij} B_{kl} n_l n_k \\
A_{ij}^{u,ep,s} &= \frac{C_{ijmn} g_{mn}^{s} f_{pq}^{s} C_{pqkl}}{h} n_l n_k \\
A_{ij}^{u,ep,p} &= \mathrm{M}^2 \frac{g^p B_{ij} B_{kl} f^p}{h} n_l n_k \\
A_{ij}^{u,ep,sp} &= \mathrm{M} \left(\frac{C_{ijmn} g_{mn}^{s} B_{kl} f^p}{h} + \frac{g^p B_{ij} C_{klmn} f_{mn}^{s}}{h} \right) n_l n_k
\end{aligned} \tag{5.16}$$

La condición de localización surge del análisis de las propiedades espectrales del tensor acústico

$$\det\left(A_{ij}^{u,loc}\right) = 0 \tag{5.17}$$

De la comparación entre la Ec. (5.13) y la Ec. (5.17) se puede concluir que las condiciones de la borde hidráulicas afectan notablemente a la condición de localización mediante las matrices de acoplamiento sólido-líquido.

5.3 Análisis de bifurcación en medios porosos no locales basados en gradientes

En la sección anterior se estudió el problema de localización en medios porosos locales. Este análisis es perfectamente válido cuando la falla del material es frágil, como es el caso de algunos suelos arenosos cementados con óxido de hierro (también conocidos como areniscas) o el homigón sometido a esfuerzos de tracción, donde la localización se generera en una región de espesor nulo $l_\alpha = 0$.

Cuando el comportamiento post-pico del medio se torna dúctil se evidencia una región donde se concentran los efectos plásticos que antecede al colapso del material, cuya medida es la longitud interna de localización l_α. Este suele ser el caso típico de algunos metales y de los materiales cementicios y granular sometidos a estados tensionales triaxiales con niveles de confinamiento entre medios y elevados. El tamaño de las zonas de localización que se desarrollan durante el proceso de falla, de estos materiales cuasi-frágiles y dúctiles está definido por la llamada longitud interna característica $l_\alpha \neq 0$ [85, 127, 130].

A continuación se analizan las condiciones para la aparición de modos de falla localizadas en la forma de bifurcación discontinua en medios porosos no locales. Es importante recalcar que para el presente análisis se asume estado homogéneo de tensiones y deformaciones previo a proceso de localización. Contrariamente a lo discutido en el Capítulo 2, la condición de consistencia plástica, Ec. (3.42), en el caso de medios porosos no locales es ahora una función del multiplicador plástico $\dot{\lambda}$ y de sus gradientes $\dot{\lambda}_{,ij}$.

El operador salto aplicado al tensor tensiones en la superficie de discontinuidad debe satisfacer la ecuación de equilibrio

$$\dot{\sigma}_{ij,j} = 0 \tag{5.18}$$

donde el tensor de tensiones incremental está definido por la Ec. (3.17) o Ec. (3.19), según las condiciones de borde hidráulicas impuestas.

Para investigar la estabilidad de un estado en equilibrio se estudia usualmente la pérdida de elipticidad de las ecuaciones de gobierno mediante el análisis de propagación de ondas [1, 123, 12, 68, 120]. Así, considerando un estado homogéneo antes del inicio del fenómeno de localización se asume la siguiente perturbación armónica con respecto a las variables de campo incrementales (es decir, desplazamientos, contenido en masa y multiplicador de plástico) para un medio poroso infinito.

A partir de [120, 1] las soluciones de las variables de campo, es decir, desplazamientos, contenido en masa y multiplicador de plástico, pueden expresarse en término de las siguientes ecuaciones de ondas planas

$$\begin{bmatrix} \dot{u}\left(\boldsymbol{x},t\right) \\ \dot{\gamma}\left(\boldsymbol{x},t\right) \\ \dot{\lambda}\left(\boldsymbol{x},t\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathcal{U}}\left(t\right) \\ \dot{\mathcal{M}}\left(t\right) \\ \dot{\mathcal{L}}\left(t\right) \end{bmatrix} \exp\left(\frac{i2\pi}{\delta}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}\right) \tag{5.19}$$

siendo $\dot{\gamma}$ el contenido de masa, $\boldsymbol{x}$ el vector posición (en coordenadas Cartesianas), $\boldsymbol{n}$ la dirección normal a la onda y δ la longitud de onda. Por otro lado, $\dot{\mathcal{U}}$, $\dot{\mathcal{M}}$ y $\dot{\mathcal{L}}$ son las amplitudes de onda espacialmente homogéneas.

Reemplazando las Ecs. (5.19) en las Ecs. (3.42), (5.18) y (3.17) (o (3.19) según las condiciones hidráulicas asumidas), que representan la expresión diferencial de la condición de consistencia plástica, la condición de equilibrio, y las relaciones constitutivas incrementales, respectivamente, se deduce que la condición de equilibrio en la superficie de discontinuidad se cumple si

$$\left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2 \left\{ C^s_{ijkl} - \frac{C^s_{ijmn} g^s_{mn} f^s_{pq} C^s_{pqkl}}{h + \bar{h}^{nloc}} \right\} n_l n_k \, \dot{\mathcal{U}} = 0 \tag{5.20}$$

para condiciones drenadas, y

$$\begin{aligned}\left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2 \Bigg\{ C_{ijkl} - \frac{C_{ijmn} g^s_{mn} f^s_{pq} C_{pqkl}}{h + \bar{h}^{nloc}} - \mathrm{M}^2 \frac{g^p B_{ij} B_{kl} f^p}{h + \bar{h}^{nloc}} + \\ \mathrm{M} \left(\frac{C_{ijmn} g^s_{mn} B_{kl} f^p}{h + \bar{h}^{nloc}} + \frac{g^p B_{ij} C_{mnkl} f^s_{mn}}{h + \bar{h}^{nloc}} \right) \Bigg\} n_l n_k \, \dot{\mathcal{U}} = 0\end{aligned} \tag{5.21}$$

en el caso de condiciones no drenadas. Donde $\bar{h}^{nloc}$ es el módulo de gradiente generalizado,

$$\bar{h}^{nloc} = l^2_\alpha \left(f^Q_\alpha g^Q_\alpha H^{nloc}_{\alpha\, ij} \right) n_j n_i \left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2 \tag{5.22}$$

Las expresiones entre corchetes de la Ec. (5.20) y la Ec. (5.21) corresponden al tensor acústico no local para medios porosos en condiciones drenadas y no drenadas, $A^{d,nloc}_{ij}$ y $A^{u,nloc}_{ij}$, respectivamente,

$$A^{d,nloc}_{ij} = A^{d,e,s}_{ij} - A^{d,nl,s}_{ij} \tag{5.23}$$

$$A^{u,nloc}_{ij} = A^{u,e,s}_{ij} + A^{u,e,p}_{ij} - A^{u,nl,s}_{ij} - A^{u,nl,p}_{ij} + A^{u,nl,sp}_{ij} \tag{5.24}$$

donde las submatrices de $A^{d,nloc}_{ij}$ y $A^{u,nloc}_{ij}$ se obtinen por simple inspección.

$$\begin{aligned} A^{d,nl,s}_{ij} &= \frac{C^s_{ijmn} g^s_{mn} f^s_{pq} C^s_{pqkl}}{h + \bar{h}^{nloc}} \\ A^{u,nl,s}_{ij} &= \frac{C_{ijmn} g^s_{mn} f^s_{pq} C_{pqkl}}{h + \bar{h}^{nloc}} \\ A^{u,nl,p}_{ij} &= \mathrm{M}^2 \frac{g^p B_{ij} B_{kl} f^p}{h + \bar{h}^{nloc}} \\ A^{u,nl,sp}_{ij} &= \mathrm{M} \left(\frac{C_{ijmn} g^s_{mn} B_{kl} f^p}{h + \bar{h}^{nloc}} + \frac{g^p B_{ij} C_{mnkl} f^s_{mn}}{h + \bar{h}^{nloc}} \right) \end{aligned} \tag{5.25}$$

De la comparación entre el análisis de bifurcación llevado a cabo para medios porosos locales y no locales, se desprende que la diferencia entre ambas formulaciones radica solamente en el módulo de gradiente generalizado $\bar{h}^{nloc}$. Precisamente, el efecto de $\bar{h}^{nloc}$ en la simulación por elementos finitos es la regularización del comportamiento mecánico en régimen post-pico.

5.4 Análisis espectral de la condición de bifurcación discontinua

Dado que el cumplimiento de la condición de bifurcación discontinua requiere la singularidad del tensor acústico deducido anteriormente, este análisis puede ser abordado a partir del estudio de los autovalores y autovectores del tensor acústico. En este trabajo se lleva a cabo el análisis de las propiedades espectrales solamente del tensor acústico no drenado para poroplasticidad de gradientes, en virtud de que cuando el módulo de Biot M tiende a cero se demuestra fácilmente que el tensor de $A_{ij}^{u,nloc}$ tiende a $A_{ij}^{d,nloc}$, así como también el módulo de endurecimiento crítico, H^{crit}, siguiendo [84, 104].

El clásico de problema de autovalores puede escribirse de la siguiente manera

$$\left(Q_{ij} - \delta_{ij}\lambda^{(i)}\right) y^{(i)} = 0 \tag{5.26}$$

siendo $\lambda^{(i)}$ y $y^{(i)}$ los autovalores y autovectores, respectivamente, y Q_{ij} está definido por

$$Q_{ij} = \delta_{ij} - \frac{1}{h + \bar{h}^{nloc}} \left(P_{ik}^{e} b_k^s a_j^s + \mathrm{M}^2 P_{ik}^{e} b_k^p a_j^p - \mathrm{M} P_{ik}^{e} \left(b_k^s a_j^p + b_k^p a_j^s\right)\right) \tag{5.27}$$

con

$$\begin{aligned}
b_j^s &= n_i C_{ijkl} g_{kl}^s \\
a_k^s &= f_{ij}^s C_{ijkl} n_l \\
b_j^p &= n_i B_{ij} g^p \\
a_j^p &= f^p B_{kl} n_l \\
P_{ik}^{e} &= \left(A_{ij}^{u,e,s} + A_{ij}^{u,e,p}\right)^{-1}
\end{aligned} \tag{5.28}$$

La matriz $P_{ik}^{e} b_k a_j$ puede escribirse también de la siguiente manera $p_i a_j$, donde $p_i = P_{ik}^{e} b_k$, por lo tanto dos filas de la matriz $P_{ik}^{e} b_k a_j$ son linealmente dependientes de la restante siendo el rango de la matriz Q_{ij} igual a uno. Luego, $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = 1$, y el autovalor restante puede ser obtenido a partir de la siguiente propiedad

$$Q_{jj} = \lambda^{(1)} + \lambda^{(2)} + \lambda^{(3)} = 2 + \lambda^{(3)} \tag{5.29}$$

y,

$$\lambda^{(3)} = 1 - \frac{1}{h + \bar{h}^{nloc}} \left(P^e_{ik} b^s_k a^s_j + \mathrm{M}^2 P^e_{ik} b^p_k a^p_j - \mathrm{M} P^e_{ik} \left(b^s_k a^p_j + b^p_k a^s_j \right) \right) \tag{5.30}$$

De este análisis espectral puede observarse que existe solo una solución no trivial de la Ec. (5.26), es decir $\lambda^{(3)} = 0$. De la Ec. (5.28) y Ec. (5.30) se obtiene la siguiente expresión correspondiente al módulo de endurecimiento crítico

$$\begin{aligned} \bar{H} = {} & P^e_{ik} b^s_k a^s_j + \mathrm{M}^2 P^e_{ik} b^p_k a^p_j - \mathrm{M} P^e_{ik} \left(b^s_k a^p_j + b^p_k a^s_j \right) \\ & - f^s_{ij} C_{ijkl} g^s_{kl} + \mathrm{M} \left(f^s_{ij} B_{ij} g^p + f^p B_{ij} g^s_{ij} - f^p g^p \right) - \bar{h}^{nloc} \end{aligned} \tag{5.31}$$

Asumiendo la isotropía del tensor constitutivo elástico del esqueleto sólido C^s_{ijkl}, y considerando $C_{ijkl} = C^s_{ijkl} + \mathrm{M} B_{ij} B_{kl}$, se obtiene la siguiente expresión para el tensor constitutivo elástico para medios poroelásticos continuos

$$C_{ijkl} = G \left(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \right) + \omega \delta_{ij} \delta_{kl} \tag{5.32}$$

donde G es el módulo de corte, ν el coeficiente de Poisson y $\omega = 2G\nu/(1-2\nu) + \mathrm{M}b^2$. El tensor acústico elástico para poroplasticidad de gradientes $A^{u,e}_{ij} = A^{u,e,s}_{ij} + A^{u,e,p}_{ij}$ definido en la Ec. (5.23) y su inversa P^e_{ij} pueden ser re-escritos según

$$A^{u,e}_{ij} = G \left(\gamma n_i n_j + \delta_{ij} \right) \qquad ; \qquad P^e_{ij} = \frac{1}{G} \left(-\phi n_i n_j + \delta_{ij} \right) \tag{5.33}$$

siendo $\phi = \left[G + \mathrm{M}b^2 \left(1 - 2\nu\right) \right] \left[2G \left(1 - \nu\right) + \mathrm{M}b^2 \left(1 - 2\nu\right) \right]^{-1}$ y $\gamma = 1/(1-2\nu) + \mathrm{M}b^2/G$. Con estas expresiones el módulo de endurecimiento dado por Ec. (5.31) adopta la siguiente forma

$$\begin{aligned} \bar{H} = {} & 4G\phi n_i f^s_{ij} n_j n_k g^s_{kl} n_l + f^s_{ii} g^s_{ii} \left[\frac{\omega^2}{G} \left(1 - \phi\right) - \omega \right] + 4G n_i f^s_{ij} g^s_{jk} n_k \\ & - 2G f^s_{ij} g^s_{ij} + 2\omega \left(1 - \phi\right) n_i \left(g^s_{kk} f^s_{ij} + f^s_{kk} g^s_{ij} \right) n_j - 2\mathrm{M}b \left(1 - \phi\right) n_i \left(g^p f^s_{ij} + f^p g^s_{ij} \right) n_j \\ & + \left(g^p f^s_{ii} + f^p g^s_{ii} \right) \left[\mathrm{M}b - \frac{\mathrm{M}b\omega}{G} \left(1 - \phi\right) \right] + f^p g^p \left[\frac{\mathrm{M}^2 b^2}{G} \left(1 - \phi\right) - \mathrm{M} \right] - \bar{h}^{nloc} \end{aligned} \tag{5.34}$$

Considerando luego la descomposición de f^s_{ij} y g^s_{ij} en sus partes volumétricas y desviadoras, se tiene

$$\bar{f}^s_{ij} = f^s_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} f^s \qquad ; \qquad \bar{g}^s_{ij} = g^s_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} g^s \tag{5.35}$$

donde $\bar{f}^s_{ij}$ y f^s son las partes desviadoras y volumétricas de f^s_{ij}, así como también $\bar{g}^s_{ij}$ y g^s constituyen las partes desviadoras y volumétricas de g^s_{ij}, respectivamente.

Con esta notación el módulo de endurecimiento de la Ec. (5.34) puede ser re-escrito como

$$\frac{\bar{H}}{4G} = -\frac{1}{2}\bar{f}^s_{ij}\bar{g}^s_{ij} - \alpha_0 n_i \bar{f}^s_{ij} n_j n_k \bar{g}^s_{kl} n_l + \alpha_1 f^s g^s + n_i \left(\alpha_2 g^s \bar{f}^s_{ij} + \alpha_2 f^s \bar{g}^s_{ij} + \bar{g}^s_{ij}\bar{f}^s_{ij}\right) n_j$$
$$+ \alpha_3 n_i \left(g^p \bar{f}^s_{ij} + f^p \bar{g}^s_{ij}\right) n_j + \alpha_4 \left(f^p g^s + g^p f^s\right) + \alpha_5 f^p g^p - \frac{\bar{h}^{nloc}}{4G} \quad (5.36)$$

siendo

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \phi \\
\alpha_1 &= \frac{\omega\left(1-\phi\right)}{G}\left(\frac{1}{3}+\frac{\omega}{4G}\right) - \left(\frac{\omega}{4G}+\frac{\phi}{9}+\frac{1}{18}\right) \\
\alpha_2 &= \frac{1-\phi}{3} + \frac{\omega\left(1-\phi\right)}{2G} \\
\alpha_3 &= \frac{\mathrm{M}b\left(1-\phi\right)}{2G} \\
\alpha_4 &= \frac{\mathrm{M}b}{4G}\left[1-\left(1-\phi\right)\frac{\omega}{G}\right] - \frac{\mathrm{M}b\left(1-\phi\right)}{6G} \\
\alpha_5 &= \left(1-\phi\right)\left(\frac{\mathrm{M}b}{2G}\right)^2 - \frac{\mathrm{M}}{4G}
\end{aligned} \quad (5.37)$$

Con el fin de obtener las soluciones analítica del problema, asumiendo que tanto f^s_{ij} como g^s_{ij} se encuentran en direcciones principales, por lo tanto

$$\bar{f}^s_{ij} = \begin{bmatrix} \bar{f}^s_1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{f}^s_2 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{f}^s_3 \end{bmatrix} \quad ; \quad \bar{g}^s_{ij} = \begin{bmatrix} \bar{g}^s_1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{g}^s_2 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{g}^s_3 \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

donde $\bar{f}^s_1, \bar{f}^s_2, \bar{f}^s_3$ y $\bar{g}^s_1, \bar{g}^s_2, \bar{g}^s_3$ se refieren a los valores principales según $\bar{f}^s_1 \geq \bar{f}^s_2 \geq \bar{f}^s_3$.

Por otro lado, para materiales cohesivos-friccionales como el suelo o el hormigón, se adopta la siguiente regla de flujo con no asociatividad volumétrica, mientras que las componentes desviadoras permanecen asociadas, es decir $\bar{f}^s_i = \bar{g}^s_i$ y $f^s \neq g^s$.

Con estas suposiciones la Ec. (5.36) se vuelve

$$\frac{\bar{H}}{4G} = -\alpha_0 \left(\bar{f}^s_i n^2_i\right)^2 + \left(r\bar{f}^s_i + \left(\bar{f}^s_i\right)^2\right) n^2_i + \alpha_4 \left(f^p g^s + g^p f^s\right) + k - \frac{\bar{h}^{nloc}}{4G} \quad (5.39)$$

con $r = \alpha_2\left(f^s + g^s\right) - \alpha_3\left(f^p + g^p\right)$ y $k = -\frac{1}{2}\left(\bar{f}^s_i\right)^2 + \alpha_1 f^s g^s + \alpha_5 f^p g^p$.

Usando multiplicadores de Lagrange se pueden estudiar los extremos de $\bar{H}$

$$\ell = \frac{\bar{H}}{4G} - \lambda\left(n^2_1 + n^2_2 + n^2_3 - 1\right) \quad (5.40)$$

donde λ es el multiplicador de Lagrange. Se demuestra que el módulo de endurecimiento y sus direcciones críticas son altamente dependiente de dos coeficientes, r y c_{13}, o c_{31}.

$$c_{13} = \bar{f}_1^s + (1 - 2\alpha_0)\,\bar{f}_3^s + r \qquad ; \qquad c_{31} = \bar{f}_3^s + (1 - 2\alpha_0)\,\bar{f}_1^s + r \tag{5.41}$$

Luego, el módulo de endurecimiento crítico puede ser obtenido por

$$r \leq 0 \begin{cases} \bar{H} = \frac{G}{\alpha_0}\left(\bar{f}_1^s + \bar{f}_3^s + r\right)^2 - \bar{f}_1^s \bar{f}_3^s + c & ;\text{for } c_{13} \geq 0 \\ \bar{H} = 4G\,(1 - \alpha_0)\,\bar{f}_3^{s2} + r\bar{f}_3^s + c & ;\text{for } c_{13} \leq 0 \end{cases} \tag{5.42}$$

$$r \geq 0 \begin{cases} \bar{H} = \frac{G}{\alpha_0}\left(\bar{f}_1^s + \bar{f}_3^s + r\right)^2 - \bar{f}_1^s \bar{f}_3^s + c & ;\text{for } c_{31} \leq 0 \\ \bar{H} = 4G\,(1 - \alpha_0)\,\bar{f}_1^{s2} + r\bar{f}_1^s + c & ;\text{for } c_{31} \geq 0 \end{cases} \tag{5.43}$$

con $c = \alpha_4\,(f^p g^s + f^s g^p) + k - \bar{h}^{nloc}/4G$

De este modo, la dirección crítica obtenida en este análisis se resumen en el Cuadro 5.1, considerando dos casos diferentes: $r \geq 0$ y $r \leq 0$, siendo $\rho = 2\alpha_0\left(\bar{f}_1^s - \bar{f}_3^s\right)$

	$r \leq 0$		$r \geq 0$	
	$c_{13} \geq 0$	$c_{13} < 0$	$c_{31} \leq 0$	$c_{31} > 0$
$\bar{f}_1^s > \bar{f}_2^s > \bar{f}_3^s$	$n_1^2 = c_{13}/\rho$ $n_2^2 = 0$ $n_3^2 = -c_{31}/\rho$	$n_1^2 = 0$ $n_2^2 = 0$ $n_3^2 = 1$	$n_1^2 = c_{31}/\rho$ $n_2^2 = 0$ $n_3^2 = -c_{31}/\rho$	$n_1^2 = 1$ $n_2^2 = 0$ $n_3^2 = 0$
$\bar{f}_1^s = \bar{f}_2^s > \bar{f}_3^s$	$n_1^2 + n_2^2 = c_{13}/\rho$ $n_3^2 = -c_{31}/\rho$	$n_1^2 = n_2^2 = 0$ $n_3^2 = 1$	$n_1^2 + n_2^2 = c_{13}/\rho$ $n_3^2 = -c_{31}/\rho$	$n_1^2 + n_2^2 = 1$ $n_3^2 = 0$
$\bar{f}_1^s > \bar{f}_2^s = \bar{f}_3^s$	$n_1^2 = c_{13}/\rho$ $n_2^2 + n_3^2 = -c_{31}/\rho$	$n_1^2 = 0$ $n_2^2 + n_3^2 = 1$	$n_1^2 = c_{13}/\rho$ $n_2^2 + n_3^2 = -c_{31}/\rho$	$n_1^2 = 1$ $n_2^2 = n_3^2 = 0$

Cuadro 5.1: Direcciones críticas de $\bar{H}$

Finalmente, en el caso especial de $\bar{f}_1^s = \bar{f}_2^s = \bar{f}_3^s = 0$ el módulo de endurecimiento crítico permanece constante y es igual a:

$$\bar{H} = 4Gc \tag{5.44}$$

5.5 Análisis analítico de localización

En esta Sección, se lleva a cabo el estudio de las propiedades espectrales de los tensores acústicos de localización de plasticidad gradiente deducidos en la sección anterior. Se presentan una serie de ejemplos numéricos con el fin de analizar la condición de localización en medios porosos considerando condiciones de borde hidráulicas drenadas y no drenadas.

Se asume estado plano de deformaciones, y los modelos materiales de Cam Clay modificado para medios porosos saturados [14], así como también la particularización del criterio de Drucker-Prager parabólico para hormigones jóvenes (ver Capítulo 4).

5.5.1 Dominio del estado tensional

En general las superficies de fluencia están definidas por funciones cuyas variables son los invariantes del tensor de tensiones. Por lo tanto, para poder evaluar el estado de tensional de un punto genérico de la superficie es necesario plantear ecuaciones que permitan relacionar las componentes del tensor de tensiones con los invariantes.

Por lo tanto, en primer lugar se asume estado de tensiones principales por razones de simplicidad, luego, se emplean las siguientes expresiones matemáticas para el primer invariante del tensor de tensiones, I_1, y para el segundo invariante del tensor desviador de tensiones, J_2, [88]

$$I_1 = \sigma_{kk} \quad ; \quad J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ji} \tag{5.45}$$

siendo $S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} I_1/3$ el tensor desviador de tensiones. Cuando se considera estado de tensiones principales las expresiones anteriores pueden escribirse según

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ J_2 &= \frac{1}{3}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)\right] \end{aligned} \tag{5.46}$$

Ambos invariantes pueden ser conocidos a partir de un punto específico de la superficie de fluencia. Lamentablemente, el caso general de estado tensional tridimensional no puede ser especificado correctamente debido a que se tienen más incógnitas que las cantidad de ecuaciones.

Estado plano de tensiones

Al asumir estado plano de tensiones la tercera tensión principal es nula,

$$\sigma_3 = 0 \tag{5.47}$$

luego, combinando la Ec. (5.47) con las Ec. (5.45) y Ec. (5.46) restantes tensiones principales se tiene

$$\sigma_1 = \frac{3I_1 + \sqrt{-3I_1^2 + 36J_2}}{6} \tag{5.48}$$

$$\sigma_2 = \frac{3I_1 - \sqrt{-3I_1^2 + 36J_2}}{6} \tag{5.49}$$

De las Ec. (5.48) y Ec. (5.49) puede concluirse que las soluciones reales de σ_1 y σ_2 deben satisfacer la siguiente expresión

$$-3I_1^2 + 36J_2 \geq 0 \tag{5.50}$$

Esta restricción establece límites en el espacio de tensiones principales cuando se asume estado plano de tensiones.

Estado plano de deformaciones

En forma similar, para estado plano de deformaciones la tercera tensión principal es una función de σ_1 y σ_2,

$$\sigma_3 = \nu \left(\sigma_1 + \sigma_2\right) \tag{5.51}$$

luego, combinando la Ec. (5.51) con las Ec. (5.45) y Ec. (5.46) las restantes tensiones principales son

$$\sigma_1 = \frac{I_1}{2\left(1+\nu\right)} + \frac{1}{6\left(1+\nu\right)}\sqrt{-3\left(1-2\nu\right)^2 I_1^2 + 36\left(1+\nu\right)^2 J_2} \tag{5.52}$$

$$\sigma_2 = \frac{I_1}{2\left(1+\nu\right)} - \frac{1}{6\left(1+\nu\right)}\sqrt{-3\left(1-2\nu\right)^2 I_1^2 + 36\left(1+\nu\right)^2 J_2} \tag{5.53}$$

Finalmente, de las Ec. (5.52) y Ec. (5.53) puede concluirse que las soluciones reales de σ_1 y σ_2, para estado plano de deformaciones, deben satisfacer la siguiente expresión

$$-3\left(1-2\nu\right)^2 I_1^2 + 36\left(1+\nu\right)^2 J_2 \geq 0 \tag{5.54}$$

Dominio de un modelo material en particular

Ambos limites deducidos anteriormente, Ec. (5.50) y Ec. (5.54), son genéricos y por lo tanto válidos para cualquier modelo material considerado, dentro de la hipótesis de tensión o deformación plana. En este sentido, el principal objetivo de esta sección es definir el dominio de I_1 para el modelo material Cam Clay modificado y Drucker-Prager parabólico.

Dominio del modelo Cam Clay modificado Cuando se emplea el modelo material Cam Clay modificado el segundo invariante del tensor desviador de tensiones se obtiene de la Ec. (4.1), según

$$J_2 = M^2\left[Q_\alpha\left(\sigma - \beta p\right) - \left(\sigma - \beta p\right)^2\right] \tag{5.55}$$

para cada punto sobre la superficie de fluencia.

Finalmente, remplazando la Ec. (5.55) en los dominios genéricos deducidos anteriormente, Ec. (5.50) y Ec. (5.54), se obtienen las siguientes ecuaciones polinómicas cuadráticas para la tensión hidrostática total, $\sigma = I_1/3$,

$$a\sigma^2 + b\sigma + c = 0 \tag{5.56}$$

donde, para tensión plana,

$$\begin{aligned} a &= -\left(1 + \frac{3}{4M^2}\right) \\ b &= Q_\alpha - 2\beta p \\ c &= Q_\alpha p\beta - (\beta p)^2 \end{aligned} \tag{5.57}$$

y, para deformación plana,

$$\begin{aligned} a &= -\left[1 + \frac{3}{4}\left(\frac{1-2\nu}{M\,(1+\nu)}\right)^2\right] \\ b &= Q_\alpha - 2\beta p \\ c &= Q_\alpha p\beta - (\beta p)^2 \end{aligned} \tag{5.58}$$

Luego, a partir de la Ec. (5.56) se pueden obtener los limites del primer invariante del tensor de tensiones considerando la Ec. (5.57) para estado plano de tensiones o Ec. (5.58) para estado plano de deformaciones.

Dominio del modelo Drucker-Prager parabólico Similar a la sección anterior, en este apartado se analiza los limites del estado tensional del modelo de plasticidad Drucker-Prager parabólico. En consecuencia el segundo invariante del tensor desviador de tensiones puede ser obtenido de la Ec. (4.12)

$$J_2 = Q_\alpha - \alpha\,(\sigma - \beta p) \tag{5.59}$$

para cada punto sobre la superficie de fluencia.

Luego, reemplazando la Ec. (5.59) en las Ec. (5.50) y Ec. (5.54), se obtiene la siguiente expresión polinómica cuadrática del primer invariante del tensor de tensiones

$$aI_1^2 + bI_1 + c = 0 \tag{5.60}$$

siendo, para tensión plana,

$$\begin{aligned} a &= -3 \\ b &= -12\alpha \\ c &= 36\,(Q_\alpha - \alpha\beta p) \end{aligned} \tag{5.61}$$

y, para deformación plana,

$$
\begin{aligned}
a &= -3\left(1-2\nu\right)^2 \\
b &= -12\alpha\left(1+\nu\right)^2 \\
c &= 36\left(1+\nu\right)^2\left(Q_\alpha - \alpha\beta p\right)
\end{aligned}
\tag{5.62}
$$

Finalmente, los límites del primer invariante del tensor de tensiones pueden obtenerse a partir de la Ec. (5.60) empleando la Ec. (5.61) en el caso de estado plano de tensiones o la Ec. (5.62) cuando se asume estado plano de deformaciones.

5.5.2 Predicción analítica del módulo de endurecimiento crítico para el modelo Cam Clay modificado

En esta sección se realiza la predicción analítica del módulo de endurecimiento crítico deducido en la Sección 5.4 teniendo en cuenta sólo el modelo de plasticidad Cam Clay modificado, descripto en el Capítulo 4 para condiciones de borde drenadas y no drenadas.

Las propiedades materiales empleadas en los ejemplos siguientes están resumidas en el Cuadro 5.2. Se consideran estados tensionales en equilibrio sobre la superficie de fluencia, ver Fig. 5.2.

La evolución del módulo de endurecimiento para cada ángulo de bifurcación así como también el valor máximo, que corresponde al módulo de endurecimiento crítico, establecido según el análisis realizado en la Sección 5.4 se grafícan en las Fig. 5.3 y Fig. 5.4 para condiciones de borde hidráulicas drenadas y no drenadas, respectivamente.

5.5.3 Análisis de bifurcación discontinua y determinación del punto de transición del modelo Cam Clay

En esta sección se presentan diversos resultados numéricos con el doble propósito de estudiar las propiedades espectrales de los tensores acústicos de localización deducidos en las secciones anteriores y determinar fehacientemente el punto de transición entre los modos de falla frágil y la dúctil.

Por otro lado, el estudio del modulo de endurecimiento critico en el espacio de las tensiones principales permite establecer si la condición de bifurcación discontinua puede cumplirse en régimen de endurecimiento plástico.

Además se analiza la influencia de la presión de poro y del grado de no asociatividad del modelo material propuesto en la condición de bifurcación discontinua, estudiando dicha condición en el espacio (σ',det(A),p) y (σ',det(A),η), respectivamente.

En primer lugar, el la Fig. 5.5 se presenta el módulo de endurecimiento critico en el espacio de las tensiones principales. Este tipo de análisis resulta de gran importancia dado que permite establecer dominios en el espacio de tensiones donde la condición de

Parámetro material	Valor
Pendiente de la CSL, M	0,856
Presión de preconsolidación, p_{co}	100,00 Mpa
Presión de poro inicial, p	10,00 Mpa
Porosidad inicial, ϕ_0	0,4
Coeficiente de compresibilidad volumétrico, K_0	1000,00
Coeficiente de compresibilidad del esqueleto, K_s	1500,00
Coeficiente de compresibilidad del fluido, K_{fl}	500,00
Coeficiente de Biot, $b = 1 - K_0/K_s$	0,33
Inversa del módulo de Biot, $M1 = M^{-1} = (b - \phi_0)/K_s + \phi_0/K_f$	$3{,}56 * 10^{-4}$
Módulo de Young, E	20000,0 MPa
Coeficiente de Poisson, ν	0,2
Módulo de endurecimiento local, $H_s^{loc} = H_p^{loc}$	$-0{,}1 * E$
Coeficiente de no asociatividad, η	0,25

Cuadro 5.2: Parámetros materiales del modelo Cam Cay modificado

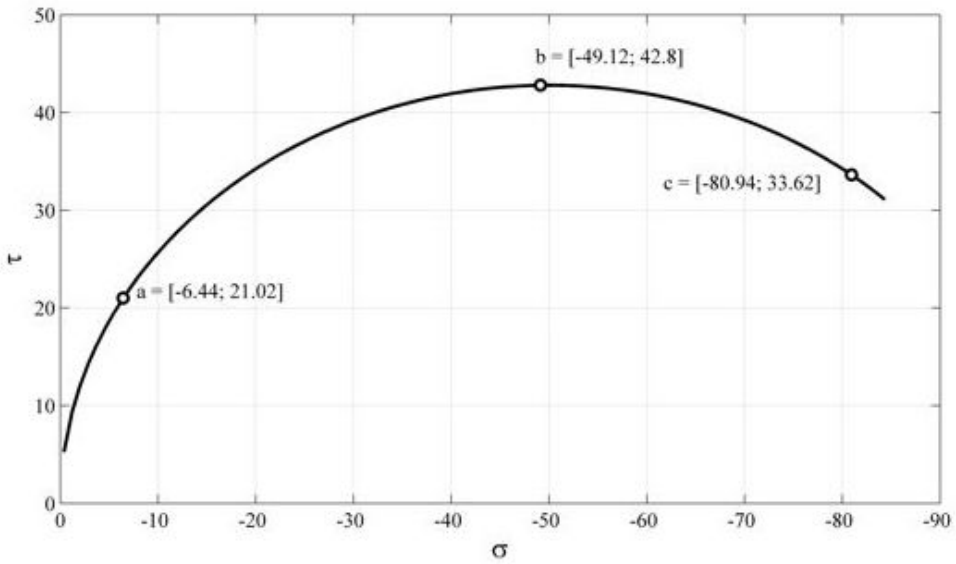

Figura 5.2: Estados tensionales considerados sobre la superficie de fluencia Cam Clay modificado

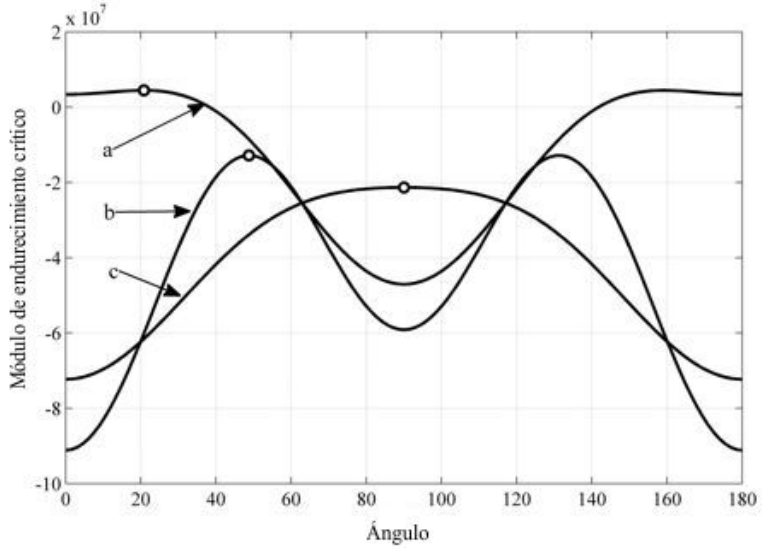

Figura 5.3: Predicción del módulo de endurecimiento crítico del modelo Cam Clay para condiciones de borde drenadas

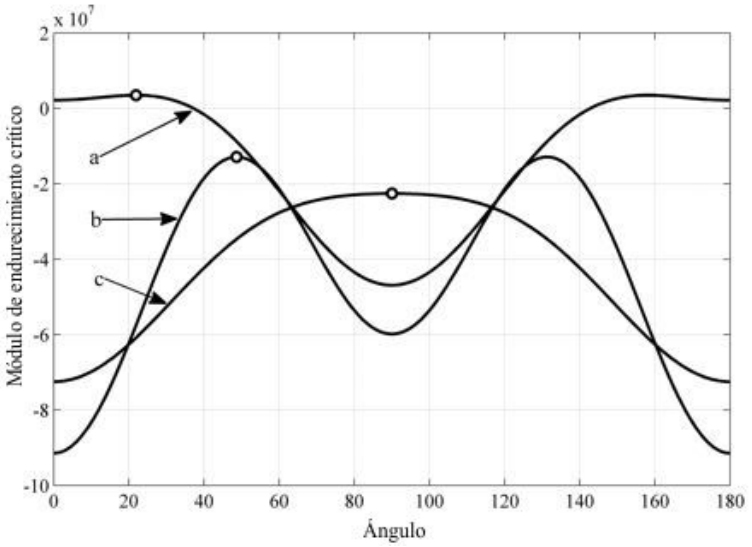

Figura 5.4: Predicción del módulo de endurecimiento crítico del modelo Cam Clay para condiciones de borde no drenadas

bifurcación discontinua se cumple no solo en régimen de ablandamiento sino también en endurecimiento, $H^{crit} > 0$.

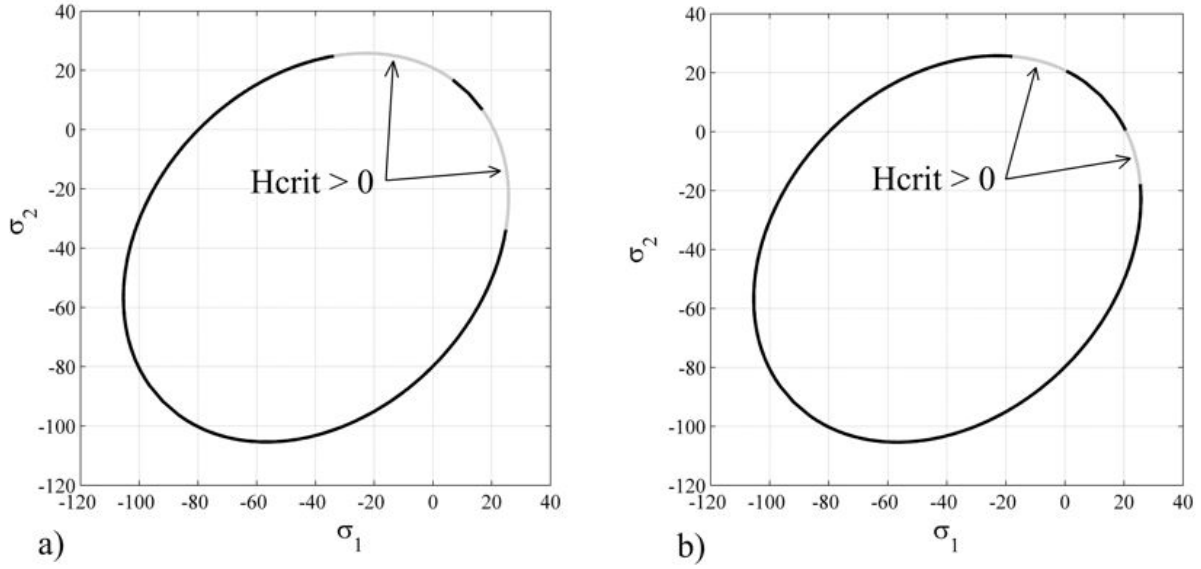

Figura 5.5: Módulo de endurecimiento crítico en el espacio de tensiones principales del modelo material Cam Clay modificado, considerando: a) Condiciones drenadas; b) Condiciones no drenadas

A continuación se analiza la condición de bifurcación discontinua sobre la superficie de fluencia inicial, cuyas propiedades materiales estas resumidas en el Cuadro 5.2, demostrando además las propiedades regularizantes de esta formulación constitutiva no local de gradientes para medios porosos. En la Fig. 5.6 se presenta el determinante del tensor acústico en condiciones de borde drenadas, tanto para plasticidad clásica como para plasticidad de gradientes. Puede observarse claramente como la condición de bifurcación discontinua no se cumple y el problema numérico puede ser regularizado.

Del mismo modo, en la Fig. 5.7 muestra la condición de bifurcación discontinua en medios porosos no drenados. Aquí también puede apreciarse como esta formulación no local de gradientes de las variables internas consigue regularizar la solución numérica.

Una variante en la representación de los resultados mostrados anteriormente consiste en graficar el determinante del tensor acústico de localización sobre la curva de máxima resistencia que para el modelo material Cam Clay modificado es la Linea de Estados Critica, lo cual permite realizar un mejor análisis del proceso de bifurcación discontinua y determinar el punto de transición entre la forma de falla frágil y dúctil.

Sobre la Línea de Estados Críticos tanto el gradiente de la superficie de fluencia como el gradiente del potencial plástico son vectores verticales, por lo tanto la influencia de la componente hidrostática es nula. En consecuencia, la función potencial plástico no asociado tiende a la función de fluencia y el flujo plástico es asociado. De la misma manera, las derivadas de la superficie de fluencia y del potencial plástico con respecto a la presión de poro tienden a cero sobre la Línea de Estados Críticos, por lo tanto, el indicador de bifurcación discontinua para la condición de borde no drenada tiende

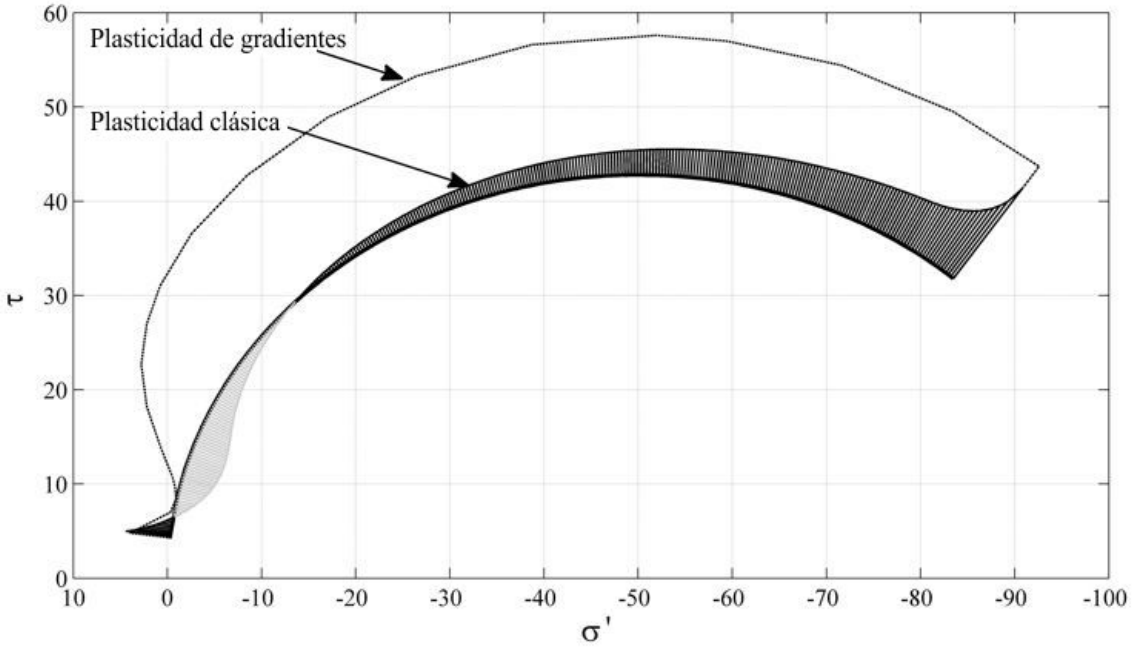

Figura 5.6: Condición de localización del modelo material Cam Clay modificado en condiciones de borde drenadas sobre la superficie de fluencia

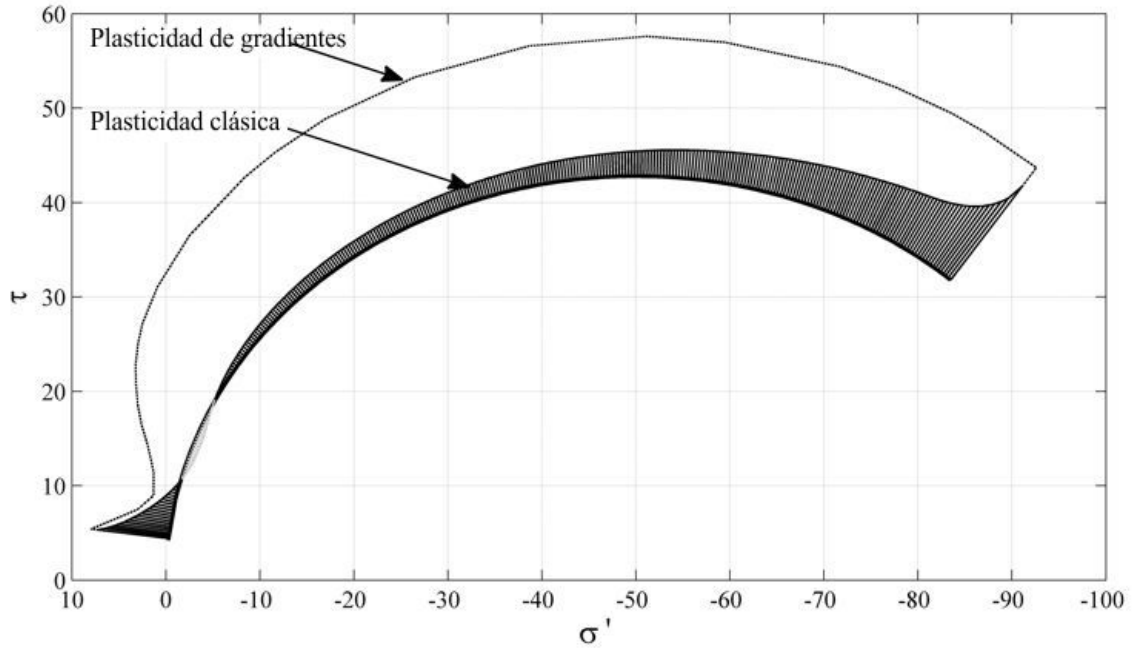

Figura 5.7: Condición de localización del modelo material Cam Clay modificado en condiciones de borde no drenadas sobre la superficie de fluencia

a la condición de borde drenada. En este sentido, resulta de interés solamente mostrar los resultados correspondientes a una de las condiciones de borde. Así, en la Fig. 5.8 se presenta el indicador de bifurcación discontinua sobre la Línea de Estados Críticos asumiendo solamente condición de borde drenado, para plasticidad clásica y de gradiente en medios porosos.

Para una mejor entendimiento del complejo proceso de degradación la resistencia mecánica en medios porosos resulta de interés analizar la influencia de la presión de poro actuante en la condición de bifurcación discontinua. Con este fin se presentan las Fig. 5.9 y Fig. 5.10 donde se muestra el determinante del tensor acústico de localización en condiciones drenadas y no drenadas, respectivamente, en el espacio (σ',det(A),p).

Por ultimo, la influencia del grado de no asociatividad del modelo material Cam Clay modificado en la condición de bifurcación discontinua se muestra en las Fig. 5.11a y Fig. 5.11b, considerando condiciones de borde drenadas y no drenadas, respectivamente.

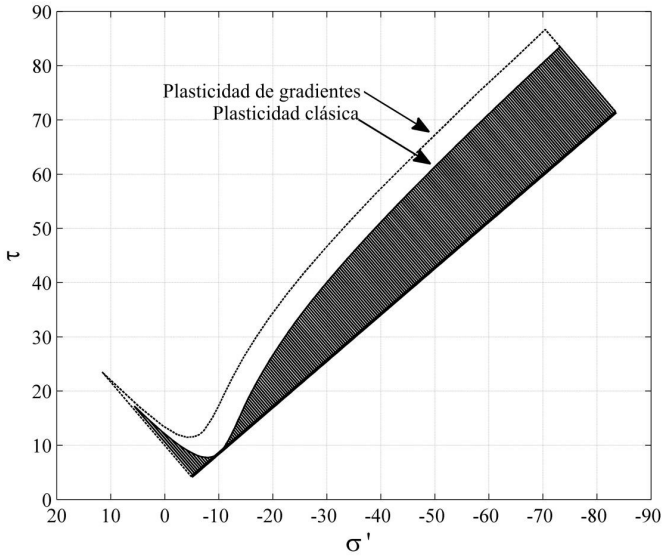

Figura 5.8: Condición de bifurcación del modelo Cam Clay en condiciones drenadas sobre la Linea de Estados Críticos

5.5.4 Análisis de bifurcación discontinua y determinación del punto de transición del criterio Parabólico de Drucker-Prager

Similar a la Sección 5.5.3, en este apartado se presenta el análisis de las propiedades espectrales del tensor acústico de localización particularizado para el modelo de material parabólico de Drucker-Prager (ver Capítulo 4). El principal objetivo de esta sección es desarrollar el estudio analítico de la condición de bifurcación discontinua de hormigones jóvenes con el fin de establecer el dominio crítico donde el tensor acústico se singulariza, considerando a su vez ambas condiciones de borde hidráulicas drenadas y no drenadas.

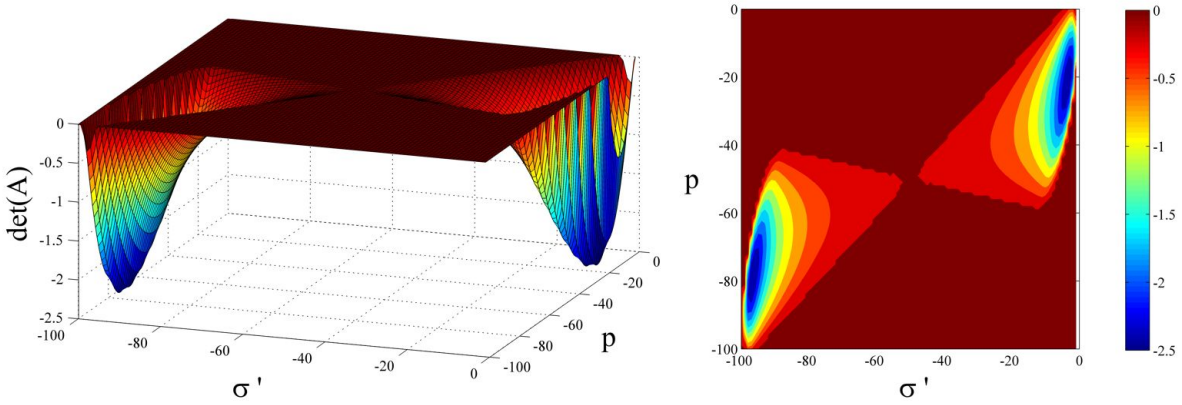

Figura 5.9: Condición de bifurcación discontinua en el espacio (σ',det(A),p) del modelo Cam Clay modificado en condiciones drenadas

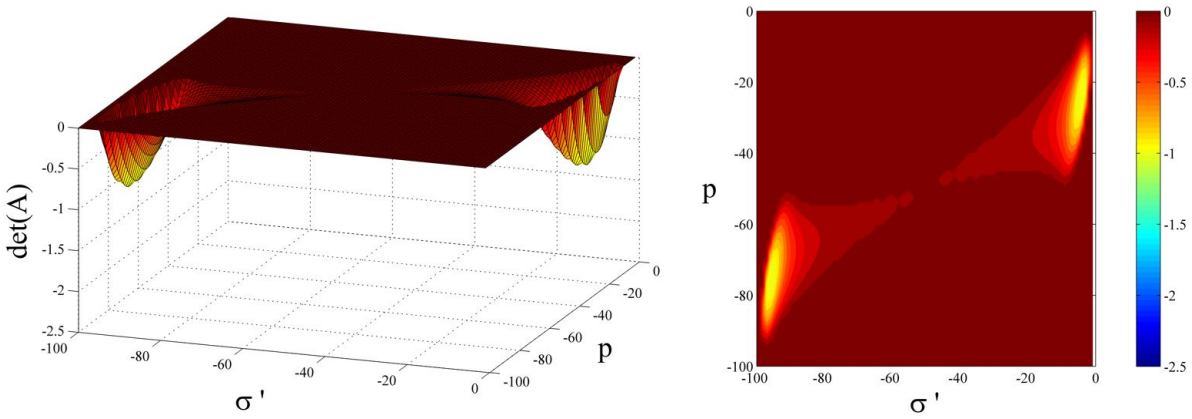

Figura 5.10: Condición de bifurcación discontinua en el espacio (σ',det(A),p) del modelo Cam Clay modificado en condiciones no drenadas

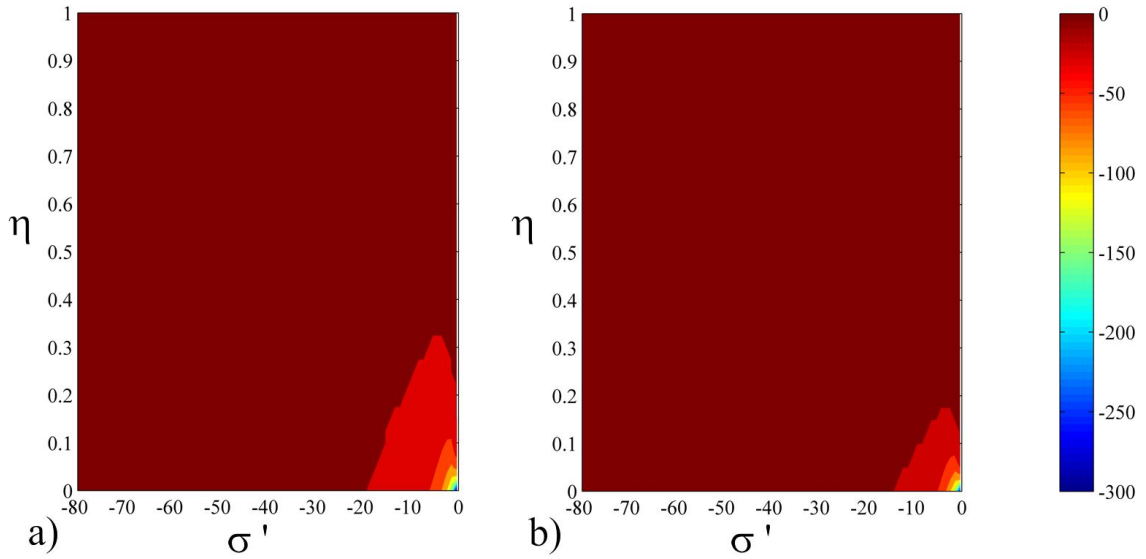

Figura 5.11: Condición de bifurcación discontinua en el espacio (σ',det(A),η) del modelo Cam Clay modificado considerando condiciones: a) drenadas; b) no drenadas

También se estudia el módulo de endurecimiento crítico representado en el espacio de las tensiones principales con el fin de establecer si la condición de bifurcación discontinua puede ser cumplida en régimen de endurecimiento plástico.

Además, se analiza la influencia de la presión de poro de agua y el grado de no asociatividad del modelo material propuesto en los espacios (σ',det(A),p) y (σ',det(A),η), respectivamente.

En este sentido, las propiedades materiales empleadas están resumidas en el Cuadro 5.3. El módulo de endurecimiento crítico en el espacio de las tensiones principales se presenta en la Fig. 5.12 con el fin de determinar si la condición de bifurcación discontinua se verifica no sólo en régimen de ablandamiento sino también en endurecimiento.

Se puede observar a partir de la Fig. 5.12 que el dominio crítico donde el tensor acústico es singular, en el espacio de las tensiones principales, es ligeramente superior cuando la condición de borde hidráulica es drenada, de manera similar a lo observado en la Fig. 5.5 correspondiente al modelo material Cam Clay.

A continuación, se analiza la condición de bifurcación discontinua de los estados tensionales sobre la superficie de fluencia inicial, teniendo en cuenta las propiedades materiales presentadas en el Cuadro 5.3, con el fin de mostrar el dominio de las formas de falla localizada y dúctil, así como también la propiedad regularizadora de la presente formulación no local basada en gradientes para los hormigones jóvenes.

En la Fig. 5.13 se presenta el determinante del tensor acústico para condiciones de borde drenadas, considerando tanto plasticidad clásica como plasticidad de gradientes. Puede verse claramente que la condición de bifurcación discontinua no se cumple, por lo tanto se confirma que la presente formulación no local asegura la objetividad de la solución numérica.

Parámetro material	Valor
Resistencia a la compresión, f_c	22,0 MPa
Resistencia a la tracción, f_t	2,8 MPa
Presión de poro inicial, p	10,0 MPa
Porosidad inicial, ϕ_0	0,1
Coeficiente de compresibilidad volumétrico, K_0	1000,0
Coeficiente de compresibilidad del esqueleto, K_s	25000,0
Coeficiente de compresibilidad del fluido, K_{fl}	100,0
Módulo de Young, E	19300,0 MPa
Coeficiente de Poisson, ν	0,2
Módulo de endurecimiento local, $H_s^{loc} = H_p^{loc}$	$-0{,}1 * E$
Coeficiente de no asociatividad η,	0,1

Cuadro 5.3: Parámetros materiales del criterio de Drucker-Prager

En forma similar, se presenta en la Fig. 5.14 el indicador de bifurcación discontinua para medios porosos en condiciones no drenadas En este caso, no se observa que la condición de localización sea verificada. A diferencia del caso anterior, la condición de frontera sin drenaje es el responsable de la regularización de la solución numérica en lugar de la formulación no local

Por otro lado, para una mejor comprensión del complejo proceso de degradación mecánica que sufren los hormigones jóvenes sujetos a diferentes estados de carga, es muy interesante analizar la influencia de la presión del poro de agua en la condición de bifurcación discontinua. En este sentido, en la Fig. 5.15 se muestran solo los valores negativos

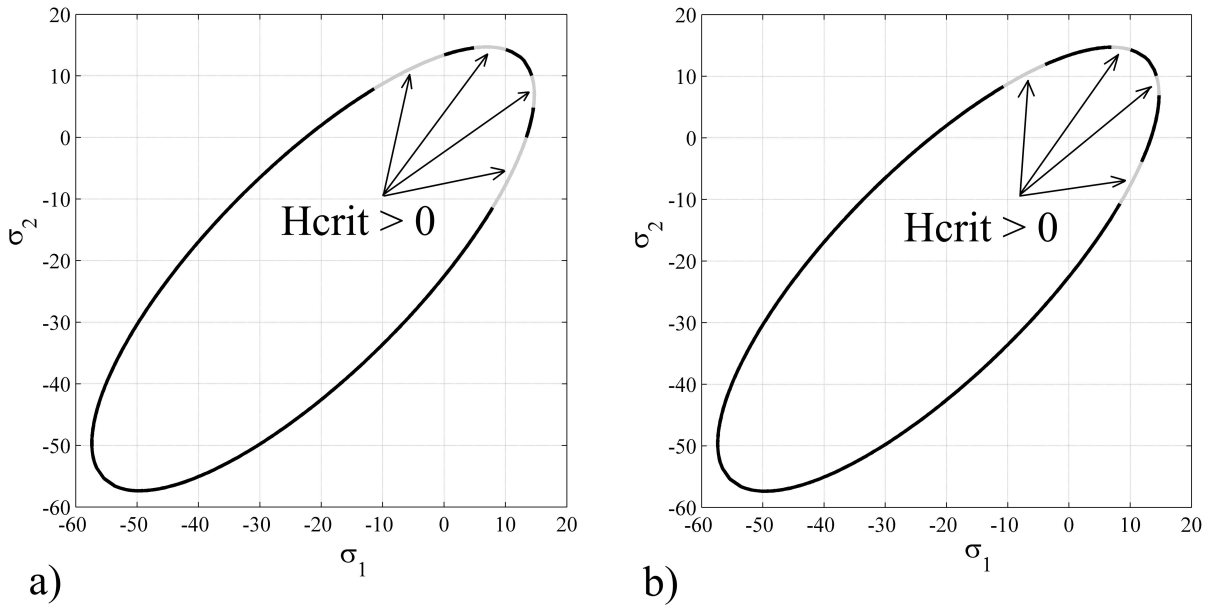

Figura 5.12: Módulo de endurecimiento crítico en el espacio de las tensiones principales para modelo parabólico de Drucker-Prager, considerando condiciones: a) drenadas; b) no drenadas

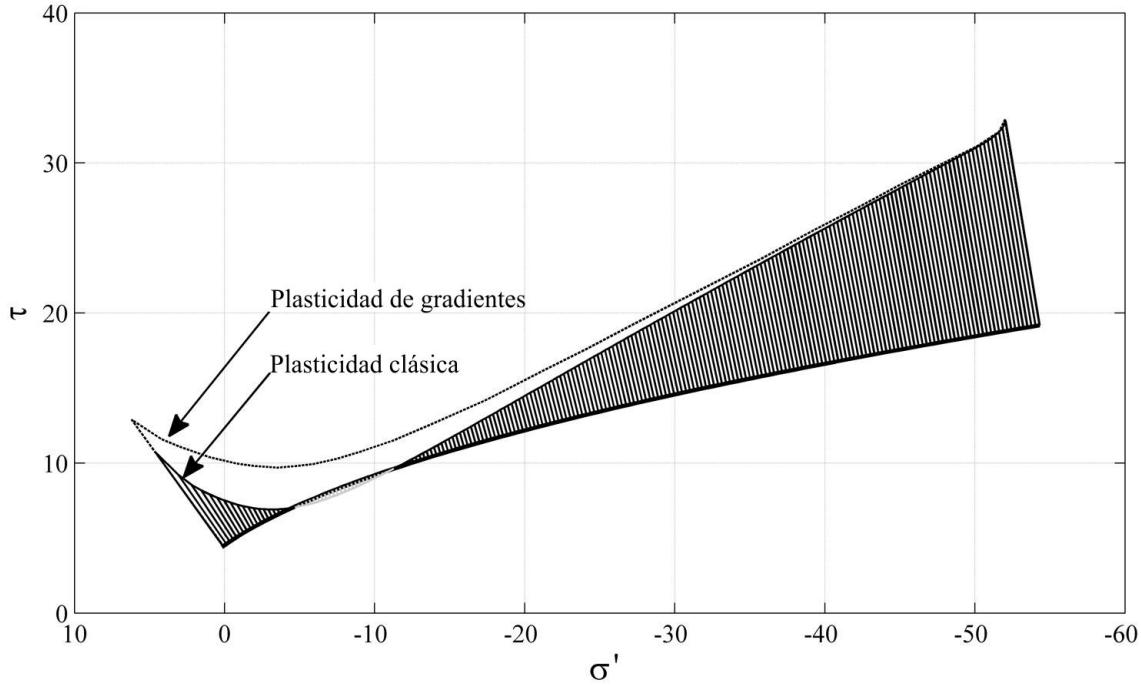

Figura 5.13: Condición de localización del modelo parabólico de Drucker-Prager en condiciones drenadas

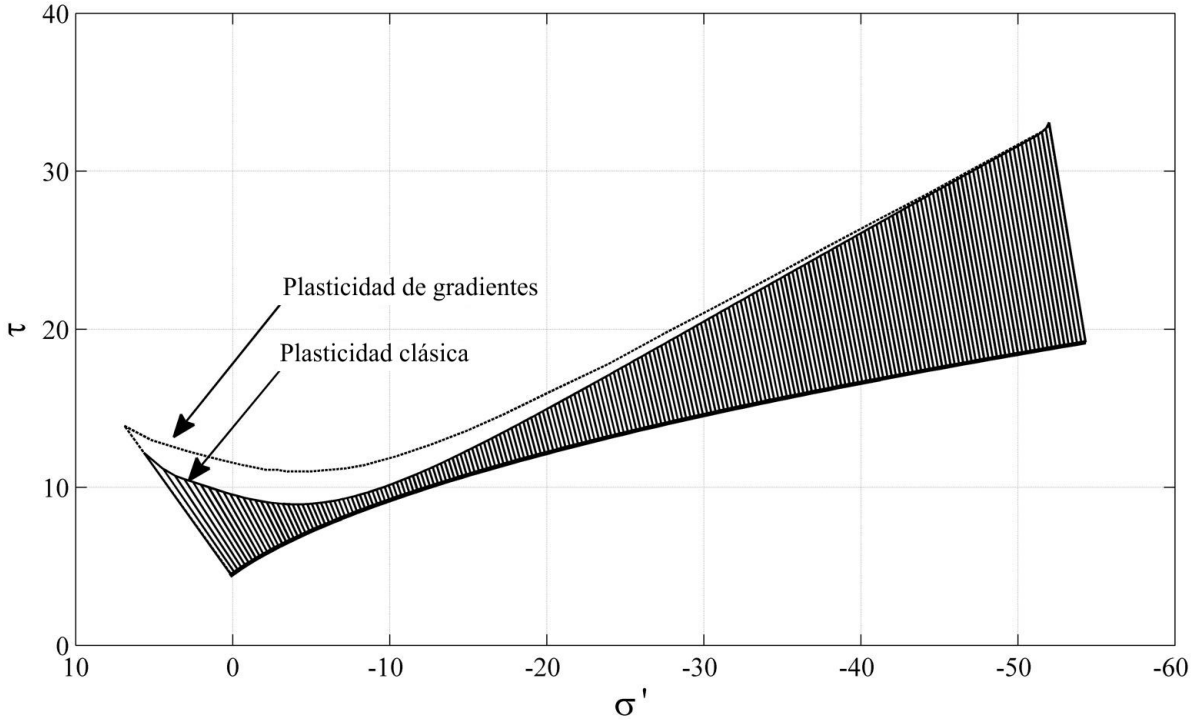

Figura 5.14: Condición de localización del modelo parabólico de Drucker-Prager en condiciones drenadas

del determinante del tensor acústico de localización en condiciones drenadas en el espacio (σ',det(A),p). Se observa claramente como la presión de poro tiene una influencia relevante en la singularidad del tensor acústico.

Así mismo, en la Fig. 5.16 se presenta la condición de bifurcación discontinua en condiciones no drenadas. En este caso, la condición de localización no es observada en todo el dominio, dado que el determinante del tensor acústico es siempre positivo para cualquier valor de la presión de poro.

Finalmente, se estudia la influencia del grado de no asociatividad del modelo material Drucker-Prager parabólico. En este sentido, en las Fig. 5.17 y Fig. 5.18 se presentan la condición de bifurcación discontinua en condiciones de contorno drenadas y no drenadas, respectivamente. De la Fig. 5.18 puede observar que el criterio de plasticidad de Drucker-Prager parabólico es indiferente al grado de no asociatividad del potencial plástico (ver Ec. (4.13)) cuando se asumen condiciones de borde no drenadas.

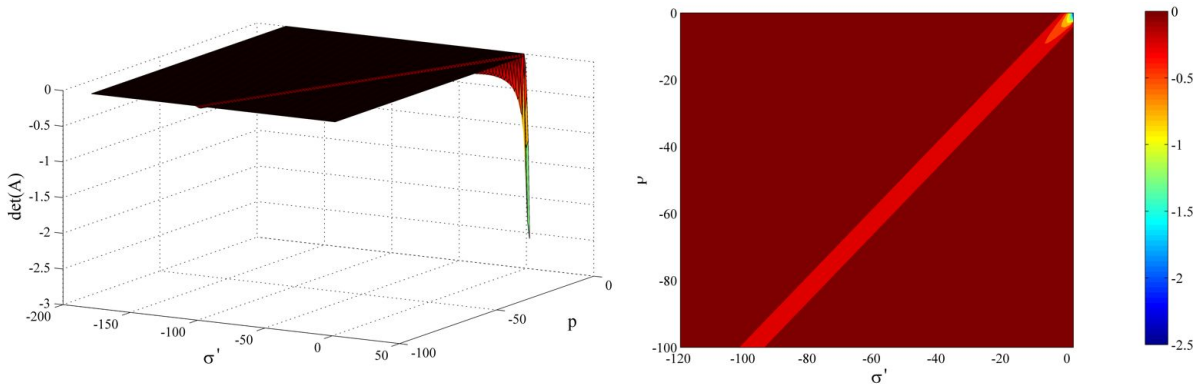

Figura 5.15: Condición de bifurcación discontinua en el espacio (σ',det(A),p) del modelo parabólico de Drucker-Prager en condiciones drenadas

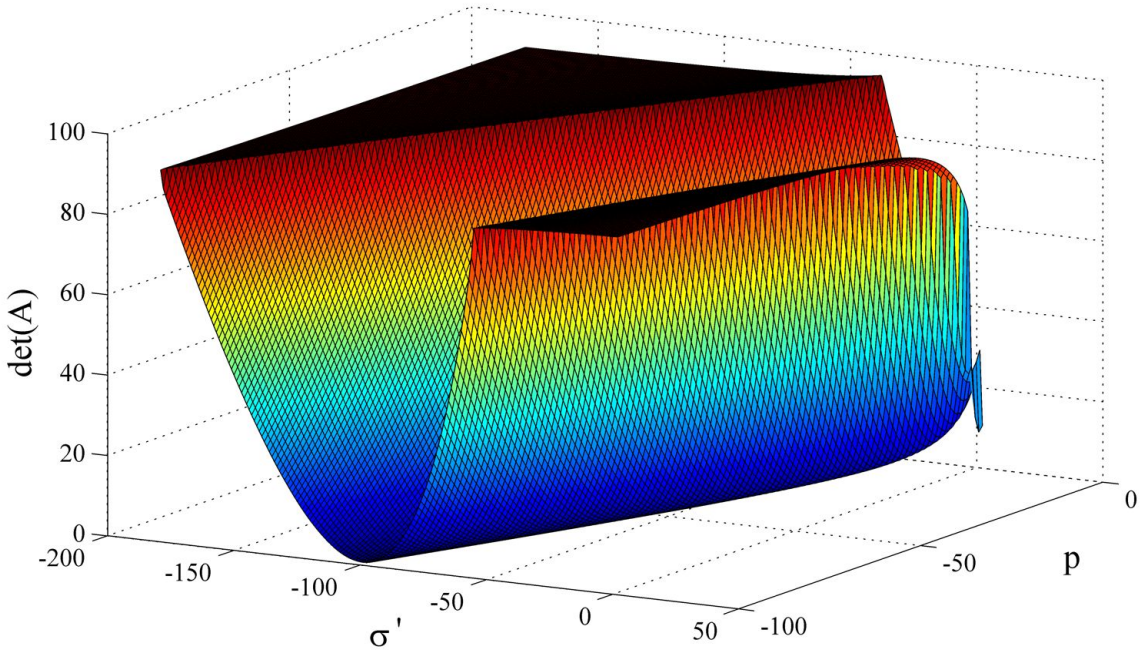

Figura 5.16: Condición de bifurcación discontinua en el espacio (σ',det(A),p) del modelo parabólico de Drucker-Prager en condiciones no drenadas

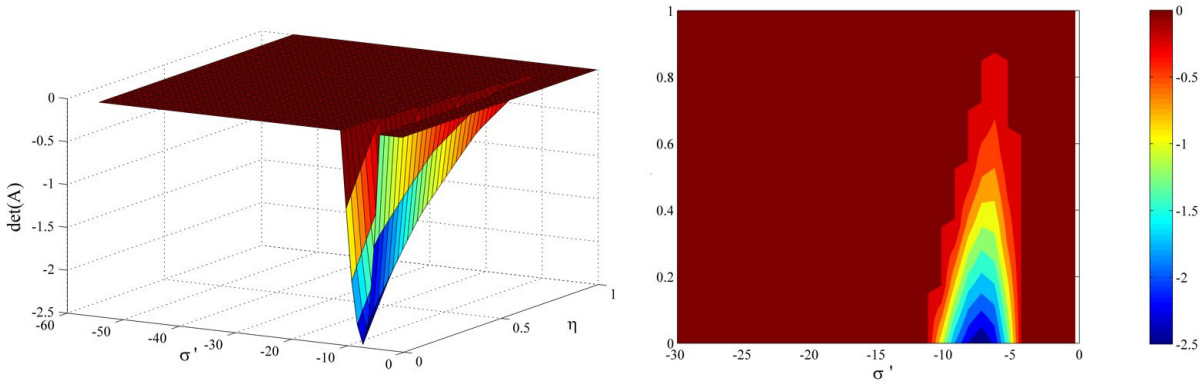

Figura 5.17: Condición de bifurcación discontinua en el espacio (σ',det(A),η) del modelo parabólico de Drucker-Prager en condiciones drenadas

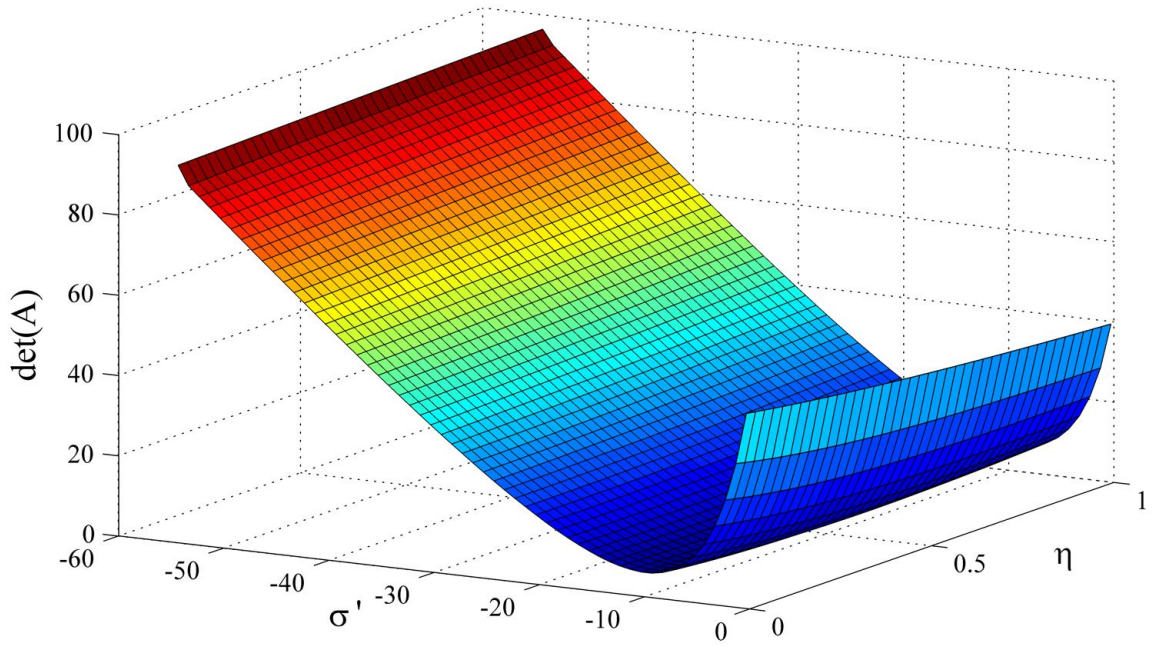

Figura 5.18: Condición de bifurcación discontinua en el espacio (σ',det(A),η) del modelo parabólico de Drucker-Prager en condiciones no drenadas

CAPÍTULO 6

Formulación de Elemento Finito para poroplasticidad basada en gradientes

Una vez establecidos los principios básicos de esta teoría no local basada en gradientes termodinámicamente consistente para medios porosos en el Capítulo 3, así como también su particularización para el modelo de plasticidad Cam Clay modificado y el Drucker-Prager parabólico en el Capítulo 4, en esta sección del trabajo se presenta la formulación de un nuevo elemento finito cuadrilátero para plasticidad de gradientes en medios porosos.

Por lo tanto en este capítulo se presenta una nueva formulación de elemento finito, propuesto por Mroginski & Etse (2012) [75], con continuidad C_1 de las variables internas para plasticidad de gradientes en medios porosos con la capacidad de reproducir los modos de falla tanto localizadas como difusas, que caracterizan los materiales cuasi-frágiles como el hormigón y el suelo. Un aspecto importante de esta formulación de elemento finito es la inclusión de funciones de interpolación de continuidad de primer orden (C_1) solamente para el campo de las variables internas mientras que los campos cinemáticas permanecen con las funciones de interpolación clásicas de continuidad C_0. En forma similar a las propuestas [121, 131], la presente formulación de elemento finito considera modelos materiales de gradiente donde la no localidad esta restringida a las variables internas. Esto reduce la complejidad en la implementación numérica de esta formulación. Esta tecnología de elemento finito es particularmente apropiada para ser utilizada con la teoría no local gradiente termodinámicamente consistente propuesto en el Capítulo 3.

Por otra parte, luego de la presentación de la formulación de elementos finitos, se presenta el algoritmo iterativo para resolver el incremento de las variables de campo del problema de valores de borde.

La solución del problema de valores de borde se debe satisfacer en forma simultánea y acoplada la condición de equilibrio, el balance de masa de fluido y la condición de fluencia, al final de cada incremento de carga considerado.

6.1 Formulación incremental

Al final de la iteración $j+1$ del paso de carga actual, el cumplimiento de las ecuaciones generales de gobierno se realiza en forma incremental, es decir, la condición de equilibrio, la ecuación de balance de masa de fluido y la condición de fluencia serán planteadas en forma débil, de la siguiente manera, empleando notación tensorial en lugar de la indicial empleada en los capítulos anteriores

$$\int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T : \boldsymbol{\sigma}_{j+1} \, \mathrm{d}\Omega - \int_{\partial\Omega} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{t}_{j+1} \, \mathrm{d}\partial\Omega = 0 \tag{6.1}$$

$$\int_{\Omega} \delta p \, \dot{m}_{j+1} \, \mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega} \nabla\delta p \cdot \mathbf{w}_{j+1} \, \mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega} \delta p \, \mathbf{w}_{j+1} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}\partial\Omega = 0 \tag{6.2}$$

$$\int_{\Omega} \delta\lambda \; f \left(\boldsymbol{\sigma}, p, Q_\alpha\right)\big|_{j+1} \; \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{6.3}$$

A diferencia de lo que ocurre en plasticidad clásica, en esta formulación la Ec. (6.3) no se cumple en un sentido estricto sino en forma distribuida y solo cuando se alcanza la convergencia global del problema.

Considerando la descomposición del tensor de tensiones para la iteración $j+1$ según $\boldsymbol{\sigma}_{j+1} = \boldsymbol{\sigma}_j + \Delta\boldsymbol{\sigma}$ y reemplazando en la Ec. (6.1) se tiene

$$\int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T : \Delta\boldsymbol{\sigma} \, \mathrm{d}\Omega = \int_{\partial\Omega} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{t}_{j+1} \, \mathrm{d}\partial\Omega - \int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T : \boldsymbol{\sigma}_j \, \mathrm{d}\Omega \tag{6.4}$$

reemplazando $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ en la última ecuación por la forma linealizada en la Ec. (3.19),

$$\int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T : \left(\mathbf{C}^s : \Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{B}\Delta p - \mathbf{C}^s : \mathbf{g}^s \Delta\lambda\right) \mathrm{d}\Omega = \int_{\partial\Omega} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{t}_{j+1} \mathrm{d}\partial\Omega - \int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T : \boldsymbol{\sigma}_j \mathrm{d}\Omega \tag{6.5}$$

Puede observarse que la Ec. (6.5) no depende explícitamente del gradiente del multiplicador plástico y tiene en consecuencia una forma muy similar a la ecuación de equilibrio incremental usada en plasticidad clásica.

Luego, considerando la descomposición incremental del vector de infiltración $\mathbf{w}_{j+1} = \mathbf{w}_j + \Delta\mathbf{w}$ y la tasa del contenido de masa de fluido $\dot{m}$ obtenido de la combinación entre las Ec. (2.97) y Ec. (3.18), la Ec. (6.2) puede ser re-escrita de la siguiente manera

$$\int_{\Omega} \delta p \left(\frac{\Delta p}{M} + \mathbf{B} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \left(\mathbf{B} : \mathbf{g}^s - \mathrm{g}^p\right) \Delta\lambda \right) \, \mathrm{d}\Omega = \Delta t \int_{\Omega} \nabla\delta p \cdot \left(\mathbf{w}_j + \Delta\mathbf{w}\right) \, \mathrm{d}\Omega - \Delta t \int_{\partial\Omega} \delta p \; \mathbf{w}_{j+1} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}\partial\Omega \tag{6.6}$$

considerando la ley generalizada de Darcy para medios porosos [18, 67, 111].

$$\mathbf{w} = -\mathbf{k} \cdot \nabla p \tag{6.7}$$

la siguiente expresión es obtenida

$$\int_\Omega \delta p \left(\frac{\Delta p}{M} + \mathbf{B} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \left(\mathbf{B} : \mathbf{g}^s - \mathrm{g}^p \right) \Delta \lambda \right) \, \mathrm{d}\Omega =$$
$$- \Delta t \int_\Omega \nabla \delta p \cdot \mathbf{k} \cdot \nabla p_j \, \mathrm{d}\Omega - \Delta t \int_\Omega \nabla \delta p \cdot \mathbf{k} \cdot \nabla \Delta p \, \mathrm{d}\Omega - \Delta t \int_{\partial\Omega} \delta p \; \mathbf{w}_{j+1} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}\partial\Omega \tag{6.8}$$

A partir de trabajos anteriores de Pamin (1994) [85], entre otros, la función de fluencia puede f puede ser aproximada con suficiente exactitud por medio de una expación de Taylor lineal al rededor de $\left(\boldsymbol{\sigma}_j, p_j, Q_{\alpha_j} \right)$ según

$$f\left(\boldsymbol{\sigma}, p, Q_\alpha\right)\big|_{j+1} = f\left(\boldsymbol{\sigma}, p, Q_\alpha\right)\big|_j + \mathbf{f}^s : \Delta \boldsymbol{\sigma} + \mathrm{f}^p \Delta p + \mathrm{f}^Q_\alpha \Delta Q_\alpha \tag{6.9}$$

Cuando todas las variables de estado son espacialmente homogéneas puede asumirse que la influencia del gradiente de las tensiones disipativas es despreciable, $\nabla Q_\alpha = 0$, ver [134, 32, 81, 120]. Además, de las descomposición aditiva de las tensiones disipativas en Ec. (3.20) se tiene

$$\dot{Q}_\alpha = \dot{Q}^{loc}_\alpha + \dot{Q}^{nloc}_\alpha = -H^{loc}_\alpha \mathrm{g}^Q_\alpha \dot{\lambda} + l^2_\alpha \mathbf{H}^{nloc}_\alpha \mathrm{g}^Q_\alpha \nabla^2 \dot{\lambda} \tag{6.10}$$

reemplazando las Ec. (3.19) y Ec. (6.10) en Ec. (6.9) se obtiene la forma débil de la condición de fluencia

$$\int_\Omega \delta\lambda \; f\left(\boldsymbol{\sigma}, p, Q_\alpha\right)\big|_{j+1} \, \mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \delta\lambda \; f\left(\boldsymbol{\sigma}, p, Q_\alpha\right)\big|_j \, \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \delta\lambda \; \mathbf{f}^s : \mathbf{C}^s : \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \, \mathrm{d}\Omega +$$
$$\int_\Omega \delta\lambda \left[\left(\mathrm{f}^p - \mathbf{f}^s : \mathbf{B} \right) \Delta p - \mathbf{f}^s : \mathbf{C}^s : \mathbf{g}^s \Delta\lambda \right.$$
$$\left. + \mathrm{f}^Q_\alpha \left(-H^{loc}_\alpha \mathrm{g}^Q_\alpha \Delta\lambda + l^2_\alpha \mathbf{H}^{nloc}_\alpha \mathrm{g}^Q_\alpha \nabla^2 \Delta\lambda \right) \right] \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{6.11}$$

6.2 Discretización de Galerkin

En esta sección, la formulación original propuesta por De Borst y Mühlhaus (1992) [22] para materiales sólidos es extendida a medios poroso. Como se observa en el sistema de ecuaciones formado por las Ecs. (6.5), (6.8) y (6.11) al menos aparecen derivadas de primer orden del campo cinemático y de presiones de poro así como también derivadas de

segundo orden del multiplicador plástico. Por lo tanto el proceso de discretización requiere de funciones de forma de continuidad C_0 para el campo de desplazamientos y presiones de poro, indicadas con $\mathbf{N}_u$ y $\mathbf{N}_p$, respectivamente, y funciones de forma de continuidad C_1 para la dicretización del multiplicador plástico, denominadas $\mathbf{H}$. En definitiva, las aproximaciones del elemento finito son

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_u \; \bar{\mathbf{u}} \tag{6.12}$$

$$p = \mathbf{N}_p \; \bar{p} \tag{6.13}$$

$$\lambda = \mathbf{H} \; \bar{\lambda} \tag{6.14}$$

donde $\bar{\mathbf{u}}$, $\bar{p}$ y $\bar{\lambda}$ son los vectores nodales de desplazamiento, presión de poro y multiplicador plástico, respectivamente. Luego, considerando $\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \mathbf{u} = \nabla^s \mathbf{N}_u \; \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{B}} \; \bar{\mathbf{u}}$ y reemplazando en las Ecs. (6.5), (6.8) y (6.11) se obtiene el siguiente set de ecuaciones integrales.

$$\begin{aligned}
&\left\{ \int_\Omega \delta\bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{B}}^T : \mathbf{C}^s : \bar{\mathbf{B}} \; \mathrm{d}\Omega \right\} \Delta\bar{\mathbf{u}} - \left\{ \int_\Omega \delta\bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{B}}^T : \mathbf{B}\mathbf{N}_p \; \mathrm{d}\Omega \right\} \Delta\bar{p} \\
&- \left\{ \int_\Omega \delta\bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{B}}^T : \mathbf{C}^s : \mathbf{g}^s \mathbf{H} \; \mathrm{d}\Omega \right\} \Delta\bar{\lambda} = \int_{\partial\Omega} \delta\bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{N}_u^T \mathbf{t}_{j+1} \mathrm{d}\partial\Omega - \int_\Omega \delta\bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{B}}^T : \boldsymbol{\sigma}_j \mathrm{d}\Omega
\end{aligned} \tag{6.15}$$

$$\begin{aligned}
&\left\{ \int_\Omega \delta\bar{p} \; \mathbf{N}_p^T \mathbf{B} : \bar{\mathbf{B}} \; \mathrm{d}\Omega \right\} \Delta\bar{\mathbf{u}} + \left\{ \int_\Omega \delta\bar{p} \left[\frac{\mathbf{N}_p^T \mathbf{N}_p}{M} + \Delta t \left(\nabla \mathbf{N}_p \right)^T \cdot \mathbf{k} \cdot \nabla \mathbf{N}_p \right] \mathrm{d}\Omega \right\} \Delta\bar{p} \\
&\qquad + \left\{ \int_\Omega \delta\bar{p} \mathbf{N}_p^T \left[\mathrm{g}^p - \mathbf{B} : \mathbf{g}^s \right] \mathbf{H} \; \mathrm{d}\Omega \right\} \Delta\bar{\lambda} = \\
&\qquad - \left\{ \Delta t \int_\Omega \delta\bar{p} \left(\nabla \mathbf{N}_p \right)^T \cdot \mathbf{k} \cdot \nabla \mathbf{N}_p \; \mathrm{d}\Omega \right\} \bar{p}_j - \Delta t \int_{\partial\Omega} \delta\bar{p} \mathbf{N}_p^T \mathbf{w}_{j+1} \cdot \mathbf{n} \; \mathrm{d}\partial\Omega
\end{aligned} \tag{6.16}$$

$$\begin{aligned}
&\left\{ \int_\Omega \delta\bar{\lambda} \mathbf{H}^T \mathbf{f}^s : \mathbf{C}^s : \bar{\mathbf{B}} \; \mathrm{d}\Omega \right\} \Delta\bar{\mathbf{u}} + \left\{ \int_\Omega \delta\bar{\lambda} \mathbf{H}^T \left[\mathrm{f}^p - \mathbf{f}^s : \mathbf{B} \right] \mathbf{N}_p \; \mathrm{d}\Omega \right\} \Delta\bar{p} \\
&\qquad + \left\{ - \int_\Omega \delta\bar{\lambda} \mathbf{H}^T \left[\mathbf{f}^s : \mathbf{C}^s : \mathbf{g}^s + \bar{H}_\alpha^{loc} \right] \mathbf{H} + l_\alpha^2 \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{H}}_\alpha^{nloc} \mathbf{P} \; \mathrm{d}\Omega \right\} \Delta\bar{\lambda} = \\
&\qquad\qquad - \int_\Omega \delta\bar{\lambda} \mathbf{H}^T \; f\left(\boldsymbol{\sigma}_j, p_j, Q_{\alpha_j} \right) \; \mathrm{d}\Omega
\end{aligned} \tag{6.17}$$

donde

$$\nabla^2 \left(\Delta\lambda \right) = \nabla^2 \left(\mathbf{H} \right) \Delta\bar{\lambda} = \mathbf{P} \Delta\bar{\lambda} \tag{6.18}$$

$$\bar{H}_{\alpha}^{loc} = \mathrm{f}_{\alpha}^{Q} H_{\alpha}^{loc} \mathrm{g}_{\alpha}^{Q} \tag{6.19}$$

$$\bar{\mathbf{H}}_{\alpha}^{nloc} = \mathrm{f}_{\alpha}^{Q} \mathbf{H}_{\alpha}^{nloc} \mathrm{g}_{\alpha}^{Q} \tag{6.20}$$

Las Ecs. (6.15)-(6.17) deben cumplirse para cualquier variación admisible de $\delta\bar{\mathbf{u}}$, $\delta\bar{p}$ y $\delta\bar{\lambda}$. Por lo tanto, el sistema de ecuaciones algebraicas, en forma matricial, del elemento finito propuesto está definido por

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{\mathrm{ss}} & \mathbf{Q}_{\mathrm{sp}} & \mathbf{Q}_{\mathrm{s}\lambda} \\ \mathbf{Q}_{\mathrm{ps}} & \mathbf{K}_{\mathrm{pp}} + \Delta t \mathbf{H}_{\mathrm{pp}} & \mathbf{Q}_{\mathrm{p}\lambda} \\ \mathbf{Q}_{\lambda\mathrm{s}} & \mathbf{Q}_{\lambda\mathrm{p}} & -\mathbf{K}_{\lambda\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\bar{\mathbf{u}} \\ \Delta\bar{p} \\ \Delta\bar{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{int}} - \mathbf{F}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{ext}} \\ -\mathbf{F}_{\mathrm{p}} \\ -\mathbf{F}_{\lambda} \end{bmatrix} \tag{6.21}$$

Las submatrices de Ec. (6.21) se presentan en el Apéndice E. Estas submatrices se obtienen por simple inspección de las Ecs. (6.15)-(6.17).

En la tabla 6.1 se muestra el algoritmo de solución del problema de valores de borde.

1) Computar las matrices de Ec. (6.21) según el Apéndice E
2) Resolver el sistema de ecuaciones algebraicas de Ec. (6.21) para obtener los incrementos $\Delta\bar{\mathbf{u}}$, $\Delta\bar{p}$ y $\Delta\bar{\lambda}$
3) Actualizar las variables primarias $\Delta\bar{\mathbf{u}}_{j+1} = \Delta\bar{\mathbf{u}}_j + \Delta\bar{\mathbf{u}}$, $\Delta\bar{p}_{j+1} = \Delta\bar{p}_j + \Delta\bar{p}$ y $\Delta\bar{\lambda}_{j+1} = \Delta\bar{\lambda}_j + \Delta\bar{\lambda}$
4) En cada punto de integración computar:
$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{j+1} = \bar{\mathbf{B}}\ \Delta\bar{\mathbf{u}}_{j+1}$
$\Delta\lambda_{j+1} = \mathbf{H}\ \Delta\bar{\lambda}_{j+1}$
$\nabla^2 (\Delta\lambda_{j+1}) = \mathbf{P}\ \Delta\bar{\lambda}_{j+1}$
$q_{\alpha_{j+1}} = q_{\alpha_0} + \mathrm{g}_{\alpha}^{Q} \Delta\lambda_{j+1}$
$\nabla^2 q_{\alpha_{j+1}} = \nabla^2 q_{\alpha_0} + \mathrm{g}_{\alpha}^{Q} \nabla^2 (\Delta\lambda_{j+1})$
$\boldsymbol{\sigma}^t = \boldsymbol{\sigma}_0 + \mathbf{C}^s : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{j+1} - \mathbf{B}\mathbf{N}_p \Delta\bar{p}_{j+1}$
IF $f\ (\boldsymbol{\sigma}^t, q_\alpha, \nabla^2 q_\alpha)|_{j+1} > 0$
$\boldsymbol{\sigma}_{j+1} = \boldsymbol{\sigma}^t - \Delta\lambda_{j+1} \mathbf{C}^s : \mathbf{g}^s$
ELSE
$\boldsymbol{\sigma}_{j+1} = \boldsymbol{\sigma}^t$
END
5) Verificar la convergencia global. Si no se cumple volver a 1

Cuadro 6.1: Algoritmo de poroplasticidad de gradientes para el elemento finito de continuidad C_1

La diferencia principal y más importante entre esta formulación de elemento finito con continuidad C_1 de las variables internas y las formulaciones de elementos finitos para plasticidad de gradientes en sólidos basadas en funciones clásicas de continuidad C_0 propuestos en [121, 131] radica en el procedimiento de solución. Mientras que la presente formulación requiere solamente la solución del sistema en Ec. (6.21), los modelos de elemento finito

mencionados requieren de la solución de un sistema iterativo global adicional para obtener el multiplicador plástico.

Otra característica significativa de la presente formulación de elemento finito para poroplasticidad de gradiente, en comparación con las formulaciones tradicionales relacionadas con la plasticidad clásicas o local, es que no se requiere de un algoritmo de retorno para el multiplicador de plástico, ya que el mismo se obtiene directamente de la solución de Ec. (6.21).

6.3 Estabilidad y condiciones de borde adicionales del elemento finito

En esta sección se analizan los requerimientos para la estabilidad del elemento finito propuesto.

Según lo discutido previamente, la teoría no local basada en gradientes para medios porosos propuesta en el Capítulo 3 y particularizada en el Capítulo 4 para suelos saturados, incluye en su formulación variacional el Laplaciano del multiplicador plástico. Por lo tanto, se necesitan funciones de forma de continuidad C_1 para describir adecuadamente el campo del multiplicador plástico en el dominio elemento y en su contorno.

Por otro lado, al tratarse de un problema bifásico, sólido-líquido acoplado, se requiere del cumplimiento de la condición de Babuska-Brezzi especialmente cuando puedan presentarse problemas no drenados o de permeabilidad muy baja [109, 74]. En estos casos pueden encontrarse valores nulos en la diagonal principal de la matriz de rigidez lo cual evidentemente puede ocasionar problemas de mal condicionamiento del sistema, en cuyo caso no habrá soluciones reales del sistema Ec. (6.21). La condición de Babuska-Brezzi se cumple aumentando el orden de la función de interpolación del campo cinemático $\mathbf{N}_u$, respecto del orden de la función de interpolación del campo de presiones, $\mathbf{N}_p$.

Uno de los tantos elementos finitos que cumple con estas características, y que ha sido suficientemente probado en problemas de flujo acoplado en medios porosos [43, 67, 60, 109, 94, 25, 74] es el cuadrilátero serendípito de 8 nodos. Mientras que para el modelado mecánico de sólidos homogéneos el elemento cuadrilátero de 4 nodos con continuidad C_1 ha dado muy buenos resultados [85, 28]. Por este motivo, se adopta en el presente trabajo un elemento que combina las ambas propiedades, es decir, se trata de un elemento cuadrilátero de 8 nodos para las variables que requieren solo continuidad C_0, $\mathbf{u}$ y p, superpuesto con el elemento cuadrilátero de 4 nodos y continuidad C_1 para el multiplicador plástico (y sus derivadas primeras y cruzada).

En la Fig. 6.1 se presenta un esquema del elemento finito propuesto con los correspondientes grados de libertad por nodo. Por su parte, en la Fig. 6.2 se representan las funciones de interpolación Hermiticas del multiplicador plástico correspondientes al nodo 1. En el Apéndice F se describen matemáticamente estas funciones de forma.

Los grados de libertad adicionales que se introducen en esta formulación de elemento finito para medios porosos requieren que sus correspondientes condiciones de contorno.

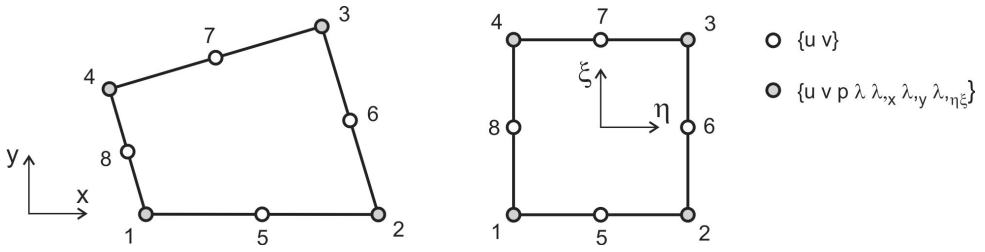

Figura 6.1: Elemento finito cuadrilátero de 8 nodos para poroplasticidad de gradientes

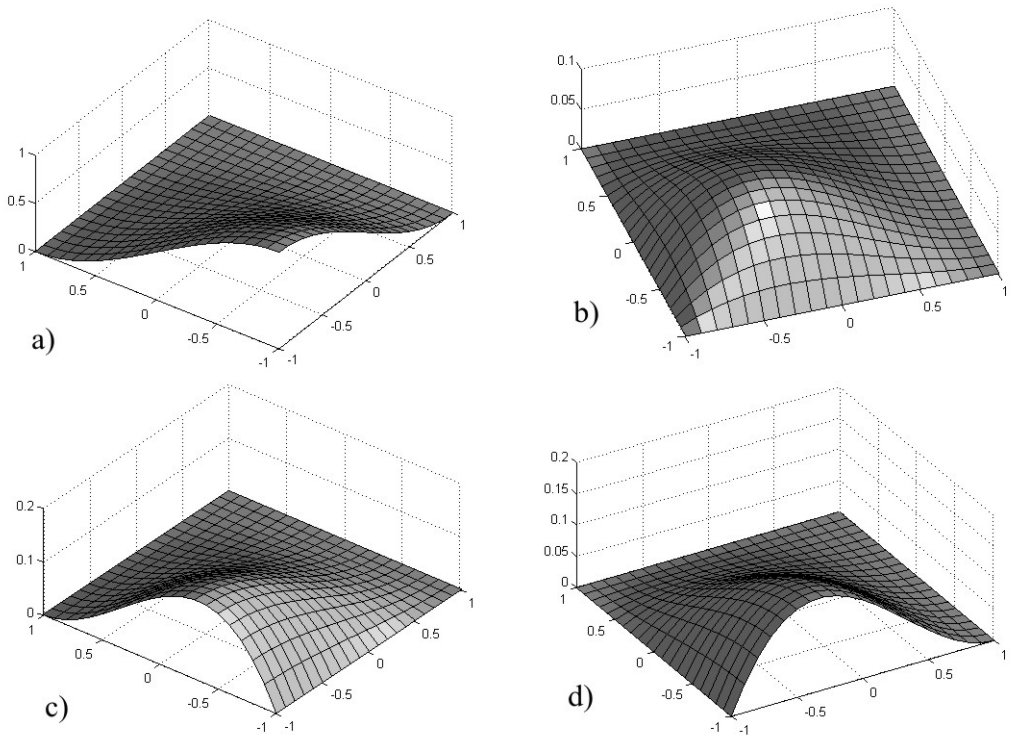

Figura 6.2: Funciones de forma Hermíticas del nodo 1 correspondientes al: a) multiplicador plástico λ: b) $\partial\lambda/\partial xy$; c) $\partial\lambda/\partial x$; d) $\partial\lambda/\partial y$

Para este fin, las condiciones de contorno propuestas en [85, 28] para evitar la singularidad de la matriz de rigidez son

$$\partial_n \lambda = 0 \tag{6.22}$$

$$\partial_{nm} \lambda = 0 \tag{6.23}$$

donde n y m son las direcciones normales y tangenciales al contorno del cuerpo, respectivamente.

CAPÍTULO 7

Problemas de valores de borde

En este capítulo se presentan una serie de ejemplos numéricos empleando el la formulación de elemento finito propuesta en el Capítulo 6, con el fin de realizar una evaluación del algoritmo de solución empleado y la capacidad de predecir las formas de falla localizada y dúctil. Por otro lado, se evalúa la influencia de la longitud interna de gradiente en régimen post pico.

7.1 Análisis de localización en estado plano. Objetividad del mallado.

Sea un espécimen de suelo sometido a un estado biaxial de tensiones con el fin de evaluar y predecir formas de falla localizada en medios porosos. En la Fig. 7.1 se muesta la geomtría y las condiciones de borde del espécimen mientras que los parámetros materiales están resumidos en el Cuadro 7.1. Las dimensiones adoptadas son $B = 60mm$ y $H = 120mm$. Por otro lado, las condiciones de borde hidráulicas consideradas son drenadas.

Parámetros materiales	Valor
Pendiente de la CSL, M	1,00
Presión de preconsolidación, p_{co}	100,00 MPa
Porosidad inicial, ϕ_0	0,4
Coeficiente de compresibilidad volumétrico, K_0	1000,00
Coeficiente de compresibilidad del esqueleto, K_s	1500,00
Coeficiente de compresibilidad del fluido, K_{fl}	500,00
Coeficiente de Biot, $b = 1 - K_0/K_s$	0,33
Módulo de Young, E	20000,0 MPa
Coeficiente de Poisson, ν	0,2
Módulo de endurecimiento local, $H_s^{loc} = H_p^{loc}$	$-0{,}1 * E$

Cuadro 7.1: Parámetros materiales del espécimen de suelo

Para crear un estado de carga inhomogéneo e inducir el modo de falla localizada, se debilita una zona de $d = 10mm$ en la esquina inferior izquierda de la muestra mediante

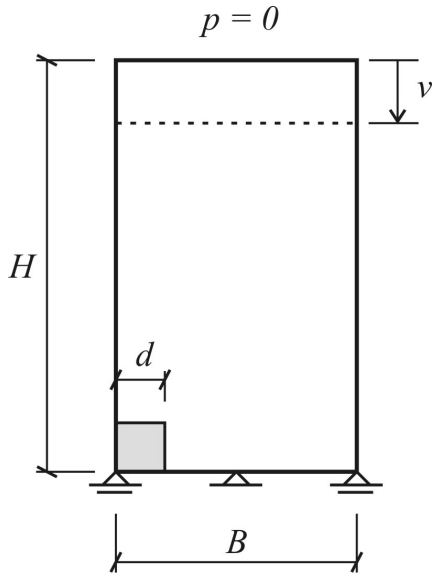

Figura 7.1: Geometría y condiciones de borde

la asignación de un límite de elasticidad (presión de preconsolidación) un 10 % inferior en comparación con el resto del material (ver Fig. 7.1).

Las condiciones de borde adicionales consideradas en este análisis son: $\partial_x \lambda = 0$ en los contornos derecho e izquierdo, $\partial_y \lambda = 0$ en la parte superior e inferior de la muestra, y $\partial_{xy} \lambda = 0$ en todo el perímetro del cuerpo.

Para este análisis se consideraron cuatro mallados de elementos finitos diferentes (tres estructurados, Fig. 7.2a, 7.2c y 7.2d, y una aleatoria, Fig. 7.2b) con el fin de evaluar la sensibilidad de la formulación de elemento finito y del modelo constitutivo no local basado en gradientes a cambios de forma y tamaño del mallado. Por lo tanto, se adopto una longitud interna característica del esqueleto sólido constante $l_s = 3{,}5mm$. Como se observa en la Fig. 7.2 el ancho de banda de localización permanece prácticamente constante en todas las mallas $w = 2\pi l_s \cong 20mm$, al asumir constante la longitud interna característica. Este resultado demuestra la capacidad de la formulación de elemento finito propuesta para captar los efectos no locales a través de los grados de libertad adicionales.

Tanto la objetividad de la malla como la capacidad de regularización en régimen de ablandamiento de las predicciones numéricas se demuestran observando la similitud entre las curvas de carga-desplazamiento de las cuatro diferentes mallas en la Fig. 7.3. La trayectoria tensional del punto material donde se inicia el proceso de plastificación se ilustra en la Fig. 7.4.

7.2 Influencia de la longitud interna característica con los modos de falla

Un segundo set de análisis numérico de este ensayo se realizó con tres longitudes internas características de gradientes diferentes y condiciones de borde hidráulicas totalmente

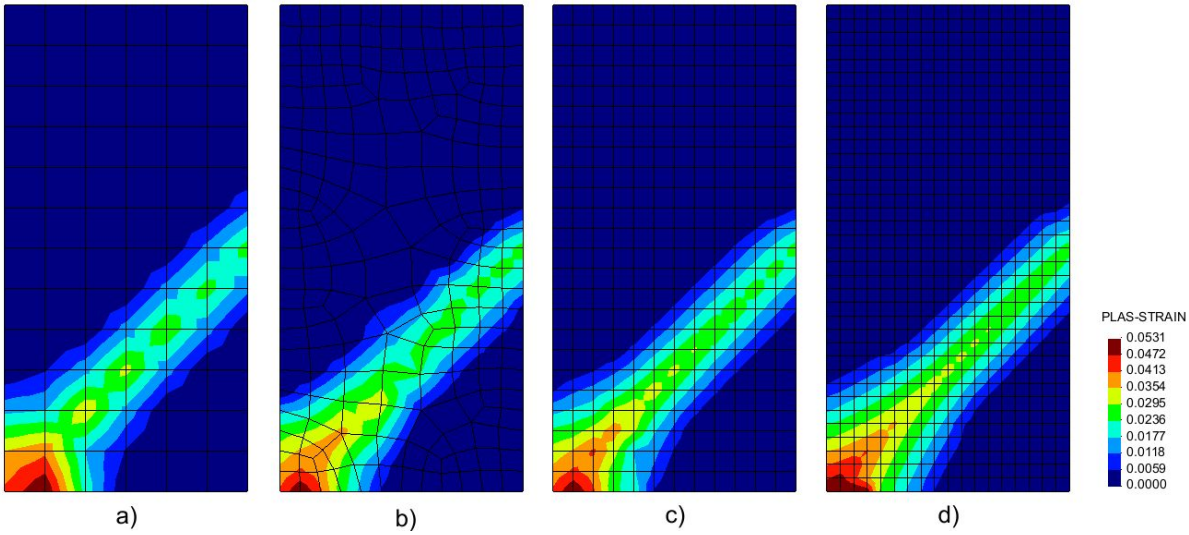

Figura 7.2: Independencia de la malla de elementos finitos

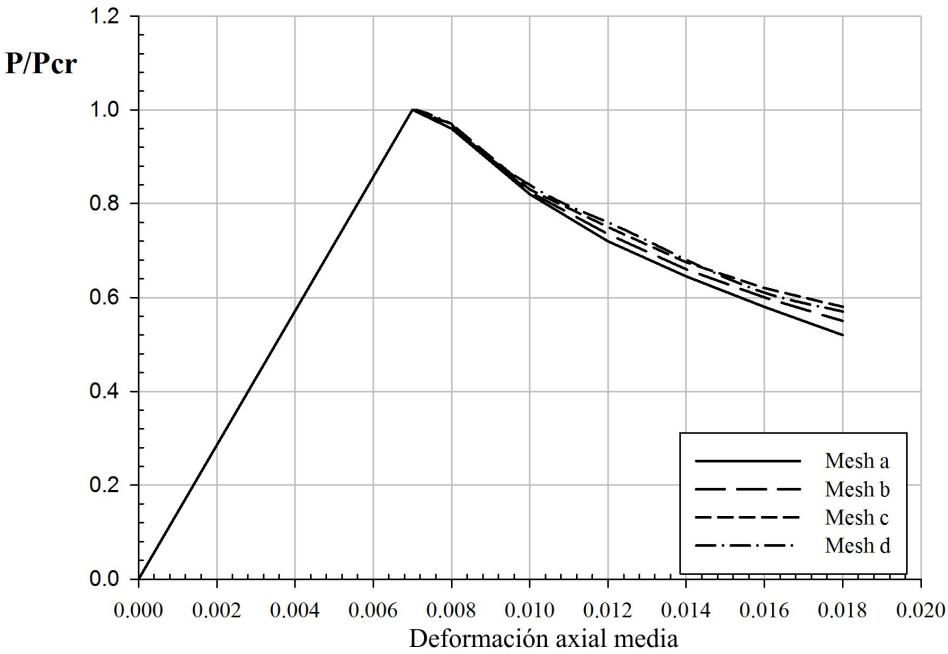

Figura 7.3: Curvas normalizadas carga vs. desplazamiento para diferentes mallados

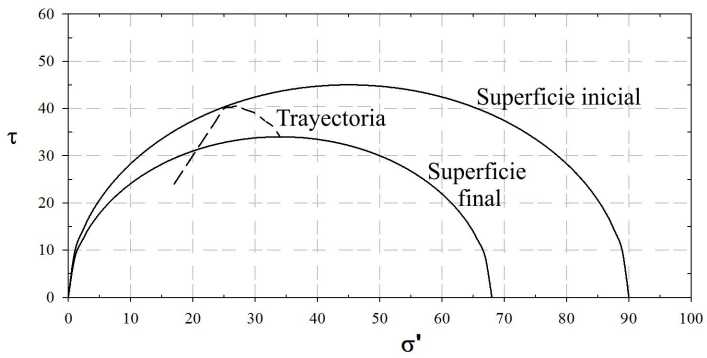

Figura 7.4: Trayectoria de tensiones y evolución de la superficie de fluencia

drenadas. En este caso olo se empleo la malla regular de 12x24 elementos según la Fig. 7.2. En la 7.5 se muestran las predicciones de elemento finito considerando $l_s = 3{,}0mm$, $l_s = 3{,}5mm$ y $l_s = 4mm$, siendo cada ancho de banda correspondiente $w \cong 15mm$, $w \cong 20mm$ y $w \cong 25mm$, respectivamente. Puede observarse claramente en los resultados que la formulación de elemento finito propuesta es capaz de reproducir la sensibilidad del modelo a la longitud interna característica. Así mismo, una mejora significativa de la ductilidad tiene lugar con el aumento de l_s.

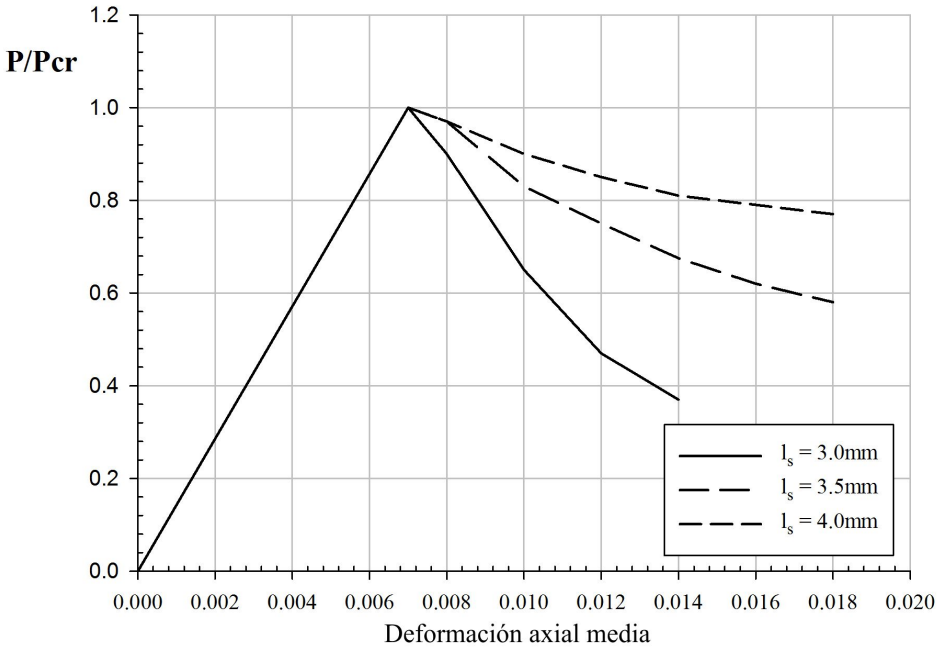

Figura 7.5: Curvas normalizadas carga vs. desplazamiento para valores variables de l_s

En la Fig. 7.6 se presenta la distribución de la deformación plástica equivalente en régimen de resistencia residual del análisis numérico. Se puede observar claramente el incremento de la zona de disipación plástica al aumentar la longitud interna característica.

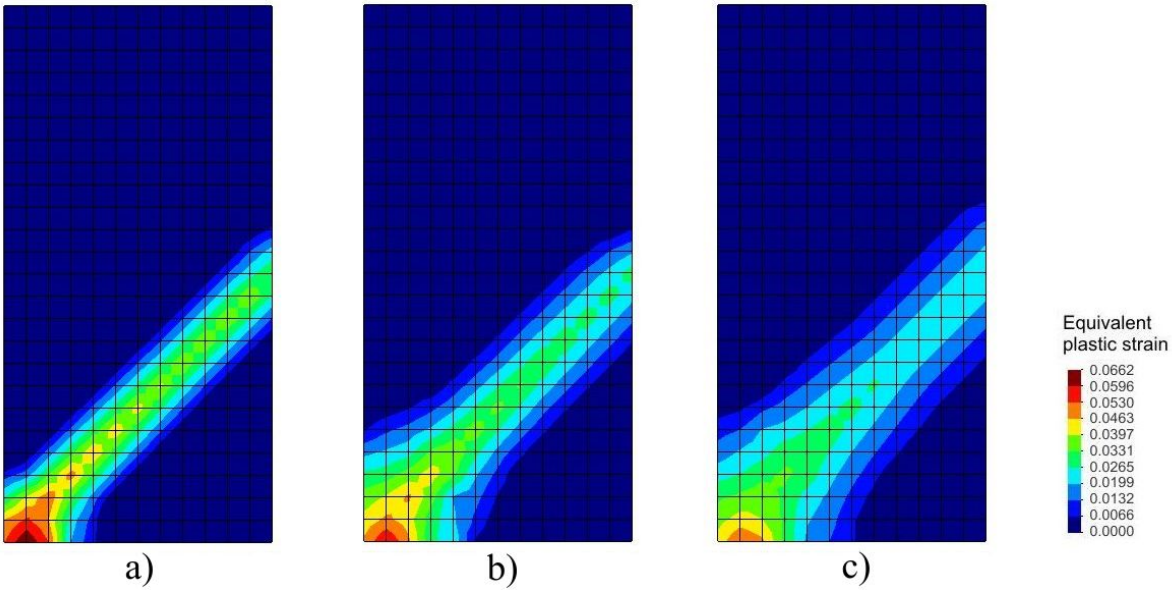

Figura 7.6: Deformación plástica equivalente para valores constantes de: a) $l_s = 3{,}0mm$, b) $l_s = 3{,}5mm$ y c) $l_s = 4mm$

7.3 Influencia de la presión de confinamiento

El tercer conjunto de análisis se llevó a cabo variando la presión de confinamiento en la muestra de suelo. Como se explicó en el Capítulo 4, la longitud interna característica del esqueleto sólido l_s es una función de la presión de confinamiento actuante (ver Fig. 4.5).

En esta tercera serie de análisis se consideran tres presiones de confinamiento diferentes, $\sigma' = 5$, $\sigma' = 13$ y $\sigma' = 21$MPa, siendo además el valor extremo de la longitud interna característica de la fase sólida $l_{s,m} = 7mm$. La 7.7 muestra una transición entre el comportamiento cuasi-frágil y el dúctil de la muestra de suelo considerado a medida que aumenta la presión de confinamiento.

7.4 Influencia de la presión de poro

Por último, se realizó un ensayo numérico de la muestra de suelo anterior teniendo en cuenta tres niveles diferentes de presión de poro inicial: $p = 20$, $p = 40$ y $p = 60$. Considerando además los siguientes coeficientes de la Ec. (4.16) $a = 1{,}0$, $b = 0{,}02$ y el valor extremo de la longitud interna característica de la fase porosa $l_{p,m} = 7mm$. En la Fig. 7.8 se muestra la deformación plástica equivalente de la muestra de suelo considerada. Similar al ejemplo anterior, se puede reconocer fácilmente en este caso la transición entre las formas de falla dúctil a frágil como consecuencia de la reducción en el nivel de presión de poros.

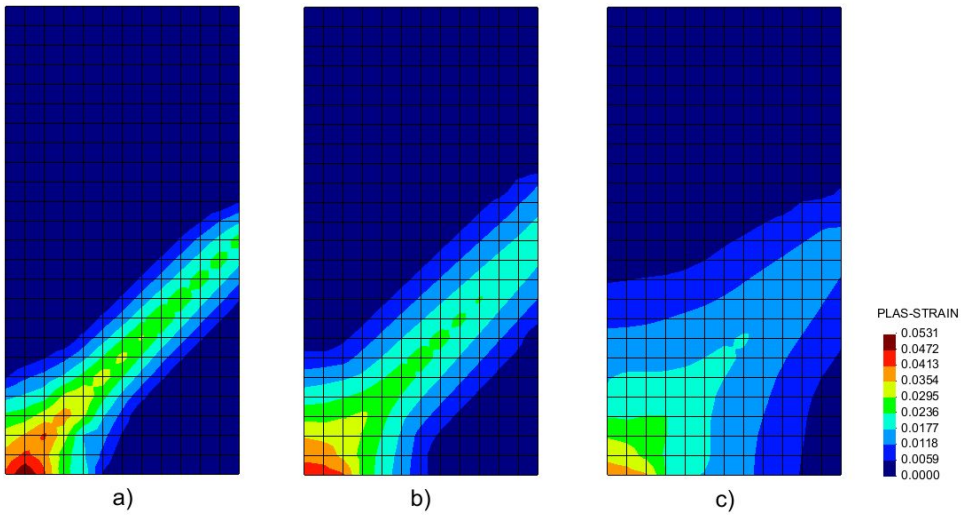

Figura 7.7: Deformación plástica equivalente considerando l_s en función de la presión de confinamiento para: a) $\sigma' = 5$, b) $\sigma' = 13$ y c) $\sigma' = 21$

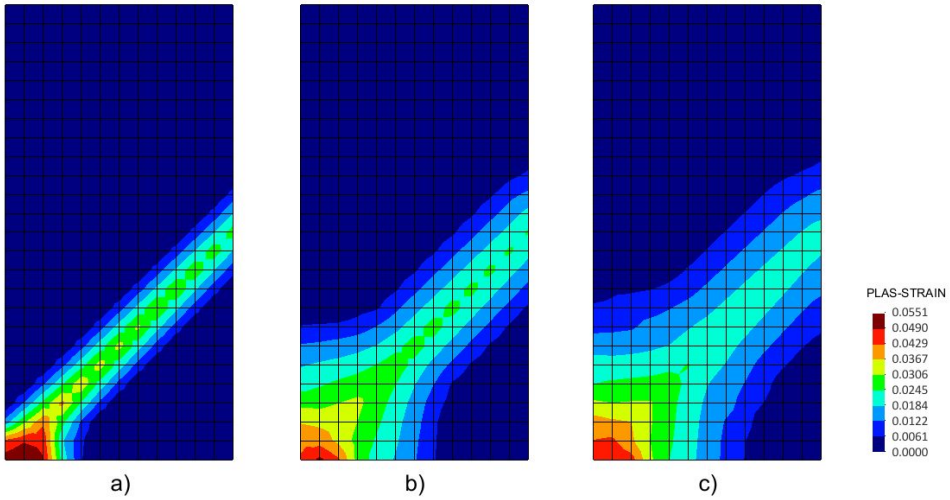

Figura 7.8: Deformación plástica equivalente considerando l_p en función de la presión de confinamiento para: a) $p = 20$, b) $p = 40$ y c) $p = 60$

CAPÍTULO 8

Conclusiones

En este trabajo se propone una teoría constitutiva genérica termodinámicamente consistente basada en gradientes de las variables internas para describir el comportamiento no-local de medios porosos. La propuesta es una extensión de las teorías de gradientes termodinámicamente consistentes propuestas por Svedberg (1999) en [119] para continuos no porosos y Vrech (2007) en [132] para sólidos continuos cuasi-frágiles basado en energía de fractura y gradientes. En la presente teoría se asume que las variables internas son las únicas de carácter no local, mientras que en el marco clásico de la plasticidad de gradientes los términos no locales de gradientes implican al campo cinemático en su conjunto.

En este trabajo la cinemática del medio poroso es modelada a partir de la Teoría Generalizada de Medios Porosos [18], donde se asume que los medios porosos son sistemas termodinámicos abiertos caracterizados por la presencia de sub-regiones ocluidas.

La teoría de bifurcación discontinua se extiende en forma consistente a medios porosos con el fin de predecir modos localizados de falla. En consecuencia, se dedujo la expresión tensorial del indicador de localización para plasticidad regularizada por gradientes en medios porosos, así como también, la expresión analítica del módulo de endurecimiento crítico. Estos indicadores de falla se particularizan para ambas condiciones de borde hidráulicas, drenadas y no drenadas.

Tanto esta teoría termodinámicamente consistente como los indicadores de localización deducidos en este trabajo se pueden aplicar al análisis del comportamiento de falla de diferentes tipos de materiales porosos, como el suelo, los huesos y el hormigón.

Los modelos de material particularizado para la teoría general propuesta en este trabajo son dos modelos ampliamente conocidos en la mecánica de medios porosos, el modelo de plasticidad Cam Clay modificado empleado en la predicción mecánica de suelos arcillosos saturados y parcialmente saturados, y el criterio de Drucker-Prager parabólico comúnmente utilizado en formulaciones constitutiva de materiales cuasi-frágiles como el hormigón. Además, se presenta la definición matemática de ambas longitudes internas características correspondientes al esqueleto sólido y a la fase porosa, así como también la función potencial plástica termodinámicamente consistente.

Con el fin de resolver el problema de valores de borde se propone una nueva formulación de elemento finito para medios porosos basados en la teoría de la plasticidad

de gradientes termodinámicamente consistente. La formulación del elemento incluye funciones de interpolación de clase C_0 tanto para la presión de poro como para los campos de desplazamientos, mientras que para la aproximación de las variables internas se emplean funciones de forma de continuidad C_1. Por lo tanto, se deben considerar funciones hermíticas para aproximar los campos no locales incluidos en el problema variacional, debido a la formulación no local basada en gradientes asumida nivel constitutivo. La inclusión de variables de campo adicionales, es decir, los gradientes del multiplicador de plástico, requiere en consecuencia condiciones de contorno suplementarias en la formulación de elementos finitos.

Una característica distinguida y novedosa del elemento finito propuesto radica en la solución del multiplicador plástico y el laplaciano, los cuales se obtienen en forma directa sin recurrir a un algoritmo iterativo como en otras formulaciones de elementos finitos para plasticidad de gradientes. Esto conduce a soluciones numéricas estables y robustas aun durante régimen de ablandamiento.

Los análisis numéricos presentados en este trabajo permiten demostrar las capacidades predictivas de la teoría constitutiva basada en gradiente propuesta, así como también las cualidades de la formulación de elemento finito para reproducir los comportamientos de falla dúctil y localizada de los medios porosos. En particular, se muestra como el elemento finito propuesto es capaz de reproducir la sensibilidad del modelo con respecto a la longitud interna característica de gradientes, asegurando al mismo tiempo la objetividad de la malla.

APÉNDICE A

Plasticidad de gradientes para deformación finita

La presente teoría fue desarrollada bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones sin embargo puede ser adaptada fácilmente a problemas de deformaciones finitas empleando el concepto de magnitudes corrotadas [11, 99]. El tratamiento de plasticidad de gradientes en termino de tensiones corrotadas no presenta grandes dificultades en virtud de que todas las magnitudes son tomadas en la configuración corrotada (actualizada). Por otro lado, es sabido que dichos modelos conducen a tensores constitutivos no simétricos [11, 113], sin embargo esta parte no simétrica depende en gran medida de tensiones tangenciales y es posible, en determinados casos, despreciarlas [26].

Como es sabido, el tratamiento de problemas con deformaciones finitas requiere de la objetividad de las variables de estado. Es decir, una medida de deformación adecuada para el tratamiento de estos problemas debe anularse ante moviemientos de cuerpo rígido, para evitar la aparición de tensiones inexistentes. El tensor de deformaciones infinitesimales ε no cumple con este postulado y debe ser reemplazado por otra medida de deformación como ser el tensor velocidad de deformación $\mathbf{D}$ que surge de la descomposición aditiva del tensor gradiente espacial de velocidad en su parte simétrica $\mathbf{D}$, y antisimétrica $\mathbf{W}$,

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{L}^e + \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{L}^p \cdot \mathbf{F}^{e^{-1}} \tag{A.1}$$

with $\mathbf{L}^e = \dot{\mathbf{F}}^e \cdot \mathbf{F}^{e^{-1}}$ and $\mathbf{L}^p = \dot{\mathbf{F}}^p \cdot \mathbf{F}^{p^{-1}}$

La hipótesis básica en el análisis de problemas con no linealidad física y geométrica se centra en la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de deformación en su porciones elástica y plástica, $\mathbf{F}^e$ y $\mathbf{F}^p$, respectivamente.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p \tag{A.2}$$

Por otro lado, el tensor velocidad de deformación puede ser expresado de una manera

conveniente a partir del tensor gradiente de deformación y de la tasa del tensor de Green-Lagrange, $\dot{\mathbf{E}}$, de la siguiente manera

$$\mathbf{D} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \tag{A.3}$$

con

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^{p^T} \left[\overset{\circ}{\mathbf{E}}{}^e + \frac{1}{2} \left(\mathbf{L}^{pr^T} \cdot \mathbf{C}^e + \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{L}^{pr} \right) \right] \mathbf{F}^p \tag{A.4}$$

siendo $\overset{\circ}{\mathbf{E}}{}^e = \dot{\mathbf{E}}^e - \omega \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^e \omega$, $\mathbf{L}^{pr} = \mathbf{L}^p - \omega$, $\mathbf{C}^e = \mathbf{F}^{e^T} \cdot \mathbf{F}^e = \mathbf{I} + 2\mathbf{E}^e$ y $\omega = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T$

Así mismo, considerando la relación entre el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff $\mathbf{S}$ y el tensor de tensiones de Cauchy σ,

$$\mathbf{S} = \bar{\rho}\, \mathbf{F}^{e^{-1}} \cdot \sigma \cdot \mathbf{F}^{e^{-T}} \tag{A.5}$$

es posible re-escribir el Segundo Principio de la Termodinámica, Ec. (2.55), para procesos isotérmicos de la siguiente manera

$$\int_\Omega \left[\frac{1}{\bar{\rho}}\, \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^{e^T} : \mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{F}^{-1} + p\dot{m} - \dot{\Psi} \right] \mathrm{d}\Omega \geq 0 \tag{A.6}$$

En este marco conceptual de plasticidad de gradientes, teniendo en cuenta magnitudes corrotadas, la energía libre de Helmholtz se puede descomponer de la siguiente manera

$$\Psi = \Psi^e \left(\hat{\mathbf{E}}^e, m^e \right) + \Psi^{p,loc} \left(q_\alpha \right) + \Psi^{p,nloc} \left(\hat{\nabla} q_\alpha \right) \tag{A.7}$$

donde el operador $\hat{\bullet} = \mathbf{R}^T \cdot \bullet \cdot \mathbf{R}$ implica un cambio de la configuración de la magnitud $\bullet$ pasando de la configuración de referencia, $\mathcal{C}$, a la configuración corrotada $\hat{\mathcal{C}}$. Cabe aclarar que por tratarse de magnitudes escalares las variables m^e y q_α son insensibles a movimientos de cuerpo rígido.

Reemplazando la tasa de la energía libre en Ec. (A.6) y considerando Ec. (A.4) es posible proceder en forma similar a lo realizado en la Ec. (3.2)), luego

$$\int_\Omega \left[\left(\frac{1}{\bar{\rho}} \mathbf{S} - \mathbf{R}^T \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{\mathbf{E}}^e} \mathbf{R} \right) \overset{\circ}{\mathbf{E}}{}^e + \left(p - \frac{\partial \Psi}{\partial m^e} \right) \dot{m} + \frac{1}{2\bar{\rho}} \mathbf{S} \cdot \left(\mathbf{L}^{pr^T} \cdot \mathbf{C}^e + \right.\right.$$
$$\left.\left. \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{L}^{pr} \right) + \frac{\partial \Psi}{\partial m^e} \dot{m}^p + \sum_\alpha \mathbf{Q}_\alpha \dot{q}_\alpha \right] \mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega} \sum_\alpha \mathbf{Q}_\alpha^{(b)} \dot{q}_\alpha \, \mathrm{d}\partial\Omega \geq 0 \tag{A.8}$$

con

$$\mathbf{Q}_\alpha = -\frac{\partial \Psi}{\partial q_\alpha} - \nabla \cdot \left(\mathbf{R}^T \frac{\partial \Psi}{\hat{\nabla} q_\alpha} \right) \qquad \text{in } \Omega \tag{A.9}$$

$$\mathbf{Q}_\alpha^{(b)} = -\mathbf{n} \frac{\partial \Psi}{\hat{\nabla} q_\alpha} \qquad \text{in } \partial\Omega \tag{A.10}$$

Dado que la desigualdad Ec. (A.8) es válida para cualquier mecanismo de deformación elastoplástico, aún cuando sea puramente elástico, todas las variables de deformación plásticas desaparecen [99], y la desigualdad Ec. (A.8) implica

$$\mathbf{S} = \bar{\rho} \mathbf{R}^T \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{\mathbf{E}}^e} \mathbf{R} = \bar{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}^e} \tag{A.11}$$

$$p = \frac{\partial \Psi}{\partial m^e} \tag{A.12}$$

Las cuales son las leyes elásticas correspondientes y la expresión de la disipación en el dominio Ω y sobre el contorno $\partial\Omega$ son

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{2\bar{\rho}} \mathbf{S} \cdot \left(\mathbf{L}^{pr^T} \cdot \mathbf{C}^e + \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{L}^{pr} \right) + p\, \dot{m}^p + \sum_\alpha \mathbf{Q}_\alpha \dot{q}_\alpha \geq 0 \qquad \text{in } \Omega \tag{A.13}$$

$$\mathfrak{D}^{(b)} = \sum_\alpha \mathbf{Q}_\alpha^{(b)} \dot{q}_\alpha \geq 0 \qquad \text{on } \partial\Omega \tag{A.14}$$

APÉNDICE B

Matrices de las Ecs. (3.45) y (3.46)

Las expresiones matriciales de la relación constitutiva para plasticidad de gradientes de la Ec. (3.45) en condiciones drenadas son

$$E_{ijkl}^{ep,sd} = C_{ijkl}^{s} - \frac{C_{ijmn}^{s}\frac{\partial g}{\partial \sigma_{mn}}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}}C_{pqkl}^{s}}{h} \tag{B.1}$$

$$E_{ij}^{ep,pd} = -B_{ij} - \frac{C_{ijkl}^{s}\frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}}\left(\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}}B_{mn}\right)}{h} \tag{B.2}$$

$$E_{ij}^{g,spd} = \frac{C_{ijkl}^{s}\frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}}}{h} \tag{B.3}$$

$$\dot{f}^{g} = l_{\alpha}^{2}\frac{\partial f}{\partial Q_{\alpha}}\frac{\partial g}{\partial Q_{\alpha}}H_{\alpha\, ij}^{nloc}\dot{\lambda}_{,ij} \tag{B.4}$$

Del mismo modo, las expresiones matriciales de la relación constitutiva para plasticidad de gradientes de la Ec. (3.46) en condiciones no drenadas son

$$E_{ijkl}^{ep,su} = C_{ijkl} - \frac{C_{ijmn}\frac{\partial g}{\partial \sigma_{mn}}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}}C_{pqkl}}{h} - \mathrm{M}^{2}\frac{\frac{\partial g}{\partial p}B_{ij}B_{kl}\frac{\partial f}{\partial p}}{h} + \mathrm{M}\left(\frac{C_{ijmn}\frac{\partial g}{\partial \sigma_{mn}}B_{kl}\frac{\partial f}{\partial p}}{h} + \frac{\frac{\partial g}{\partial p}B_{ij}C_{mnkl}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}}}{h}\right) \tag{B.5}$$

$$E_{ij}^{ep,pu} = -\mathrm{M}\left(B_{ij} - \frac{\frac{\partial g}{\partial p}B_{ij}\left(\mathrm{M}\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}}B_{mn}\right)}{h}\right) - \frac{C_{ijkl}\frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}}\left(\mathrm{M}\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}}B_{mn}\right)}{h} \tag{B.6}$$

$$E_{ij}^{g,spu} = \frac{C_{ijkl}\frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} - \mathrm{M}B_{ij}\frac{\partial g}{\partial p}}{h} \tag{B.7}$$

$$\dot{f}^{g} = l_{\alpha}^{2}\frac{\partial f}{\partial Q_{\alpha}}\frac{\partial g}{\partial Q_{\alpha}}H_{\alpha\,ij}^{nloc}\dot{\lambda}_{,ij} \tag{B.8}$$

APÉNDICE C

Reglas de flujo

En este Apéndice, los gradientes de los modelos de material presentados en el Capítulo 4 así como también el gradiente del los potenciales plásticos propuestos en cada modelo de material son presentados.

C.1 Cam Clay modificado

Cuando plasticidad asociada es asumida, $f = g$, los gradientes de la función de fluencia son:

$$\frac{\partial f\left(\sigma,\tau,p,Q_\alpha\right)}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{ij}} \tag{C.1}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \sigma} &= 2\left(\sigma - \beta p\right) - Q_\alpha \\
\frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_{ij}} &= \frac{\delta_{ij}}{3} \\
\frac{\partial f}{\partial \tau} &= \frac{2\tau}{M^2} \\
\frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{ij}} &= \frac{S_{ij}}{2\tau}
\end{aligned} \tag{C.2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\delta_{ij}}{3}\left(2\left(\sigma - \beta p\right) - Q_\alpha\right) + \frac{S_{ij}}{M^2} \tag{C.3}$$

siendo $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$ el tensor de tensiones desviador.

$$\frac{\partial f}{\partial p} = 2\beta\left(\sigma - \beta p\right) - \beta Q_\alpha \tag{C.4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial Q_\alpha} = -\left(\sigma - \beta p\right) \tag{C.5}$$

Por otro lado, cuando la plasticidad es no asociada, $f \neq g$, los gradiente de la función potencial de plástica son:

$$\frac{\partial g\left(\sigma, \tau, p, Q_\alpha\right)}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial g}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial g}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{ij}} \tag{C.6}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \sigma} &= \eta\alpha \\ \frac{\partial g}{\partial J_2} &= 1 \end{aligned} \tag{C.7}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = \eta\alpha\frac{\delta_{ij}}{3} + S_{ij} \tag{C.8}$$

siendo $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$ el tensor de tensiones desviador.

$$\frac{\partial g}{\partial p} = \eta\alpha\beta \tag{C.9}$$

$$\frac{\partial g}{\partial Q_\alpha} = -1 \tag{C.10}$$

C.2 Drucker-Prager parabólico

Si se asume regla de flujo asociado, $f = g$, los gradientes de la función de fluencia son:

$$\frac{\partial f\left(\sigma, J_2, p, Q_\alpha\right)}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial J_2}\frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} \tag{C.11}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \sigma} &= \alpha \\ \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_{ij}} &= \frac{\delta_{ij}}{3} \\ \frac{\partial f}{\partial J_2} &= 1 \\ \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} &= S_{ij} \end{aligned} \tag{C.12}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \alpha\frac{\delta_{ij}}{3} + S_{ij} \tag{C.13}$$

siendo $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$ el tensor de tensiones desviador.

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \alpha\beta \tag{C.14}$$

$$\frac{\partial f}{\partial Q_\alpha} = -1 \tag{C.15}$$

Finalmente, cuando se adopta regla de flujo no asociado, $f \neq g$, los gradientes de la función potencial de plástico son:

$$\frac{\partial g\left(\sigma, J_2, p, Q_\alpha\right)}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial g}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial g}{\partial J_2}\frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} \tag{C.16}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \sigma} &= \eta\alpha \\ \frac{\partial g}{\partial J_2} &= 1 \end{aligned} \tag{C.17}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = \eta\alpha\frac{\delta_{ij}}{3} + S_{ij} \tag{C.18}$$

siendo $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$ el tensor de tensiones desviador.

$$\frac{\partial g}{\partial p} = \eta\alpha\beta \tag{C.19}$$

$$\frac{\partial g}{\partial Q_\alpha} = -1 \tag{C.20}$$

APÉNDICE D

Relación de compatibilidad de Hadamard

Las condiciones de bifurcación discontinua deducidas en el Capítulo 5 fueron basadas en el siguiente teorema fundamental de [48].

Dada la función continua y diferenciable $\phi(\boldsymbol{x}, t)$ en todo el dominio de la superficie de discontinuidad $S(t)$ (ver Fig. D.1) que presenta alguna de sus derivadas discontinuas. Puede probarse que esta discontinuidad (o salto) no es arbitraria y que existe una función $g(\boldsymbol{x}, t)$ tal que

a) $[[\phi_{,i}]] = g\, n_i$

b) $\phi(\boldsymbol{x}, t) = -1/c\, [[\dot{\phi}]]$

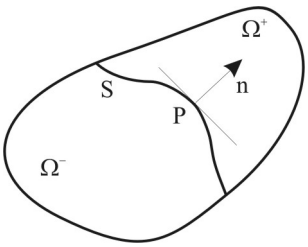

Figura D.1: Superficie de discontinuidad S

Primeramente, con el fin de probar la hipótesis **a)** el operador salto se define de la siguiente manera

$$[[\phi_{,i}]] = \phi^{+}_{,i} - \phi^{-}_{,i} \tag{D.1}$$

Luego, asumiendo la continuidad de la primer derivada de $\phi(\boldsymbol{x}, t)$ en la dirección tangencial a ambos lados de la superficie $S(t)$, se obtiene la siguiente expresión

$$\frac{\mathrm{d}\phi^{+}}{\mathrm{d}l} = \phi^{+}_{,i} t_i \tag{D.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi^-}{\mathrm{d}l} = \phi^-_{,i} t_i \tag{D.3}$$

siendo t_i un vector unitario que se encuentra en el plano tangente a la superficie $S\,(t)$.

$$\frac{\mathrm{d}\phi^+}{\mathrm{d}l} - \frac{\mathrm{d}\phi^-}{\mathrm{d}l} = \left[\left[\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}l}\right]\right] = [[\phi_{,i}]]\, t_i \tag{D.4}$$

Sin embargo, si se impone la continuidad de

$$\left[\left[\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}l}\right]\right] = 0 \Rightarrow [[\phi_{,i}]]\, t_i = 0 \tag{D.5}$$

De esta manera se verifica la condición **a)** dado que

$$[[\phi_{,i}]] = g\, n_i \tag{D.6}$$

Por otro lado, con el fin de probar la hipótesis **b)**, para el instante de tiempo t se asume:

$$\phi = \phi\,(\boldsymbol{x}, t) \tag{D.7}$$

luego, para el instante de tiempo$t + \mathrm{d}t$ el vector posición sufre la siguiente transformación

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + c\,\boldsymbol{n}\mathrm{d}t \tag{D.8}$$

donde c es la velocidad de propagación de la discontinuidad,

$$\phi' = \phi\,(\boldsymbol{x}', t + \mathrm{d}t) \tag{D.9}$$

$$\phi' = \phi\,(\boldsymbol{x}, t) + \phi_{,i}\mathrm{d}x_i + \dot{\phi}\mathrm{d}t \tag{D.10}$$

La continuidad de ϕ requiere que simultáneamente se verifique $[[\phi']] = 0$ y $[[\phi]] = 0$, por lo tanto

$$[[\phi\,(\boldsymbol{x}, t)]] + [[\phi_{,i}]]\,\mathrm{d}x_i + [[\dot{\phi}]]\mathrm{d}t = 0 \tag{D.11}$$

$$[[\phi_{,i}]]\, c\, n_i \mathrm{d}t = -[[\dot{\phi}]]\mathrm{d}t \tag{D.12}$$

$$[[\phi_{,i}]] = -\frac{1}{c}[[\dot{\phi}]] n_i \tag{D.13}$$

Dado que $[[\phi_{,i}]] = g\, n_i$ de la Ec. (D.6),

$$g\,(\boldsymbol{x}, t) = -\frac{1}{c}[[\dot{\phi}]] \tag{D.14}$$

Del mismo modo es posible hacer la demostración para funciones de orden superior:

$$[[\phi_{i,j}]] = g_i n_j \tag{D.15}$$

$$g_i = -\frac{1}{c}[[\dot{\phi}_i]]n_i \tag{D.16}$$

APÉNDICE E

Matrices de rigidez del elemento finito

Las submatrices que forman la matriz d rigidez del elemento finito en la Ec. (6.21) para poroplasticidad basada en gradientes son las siguientes

$$\mathbf{K}_{\mathrm{ss}} = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{B}}^T : \mathbf{C}^s : \bar{\mathbf{B}} \, \mathrm{d}\Omega \tag{E.1}$$

$$\mathbf{K}_{\mathrm{pp}} = \int_{\Omega} \frac{\mathbf{N}_p^T \mathbf{N}_p}{M} \mathrm{d}\Omega \tag{E.2}$$

$$\mathbf{K}_{\lambda\lambda} = \int_{\Omega} \mathbf{H}^T \left[\mathbf{f}^s : \mathbf{C}^s : \mathbf{g}^s + \bar{H}_{\alpha}^{loc} \right] \mathbf{H} + l_{\alpha}^2 \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{H}}_{\alpha}^{nloc} \mathbf{P} \, \mathrm{d}\Omega \tag{E.3}$$

$$\mathbf{H}_{\mathrm{pp}} = \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \cdot \mathbf{k} \cdot \nabla \mathbf{N}_p \mathrm{d}\Omega \tag{E.4}$$

$$\mathbf{Q}_{\mathrm{sp}} = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{B}}^T : \mathbf{B} \mathbf{N}_p \, \mathrm{d}\Omega \tag{E.5}$$

$$\mathbf{Q}_{\mathrm{ps}} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \mathbf{B} : \bar{\mathbf{B}} \, \mathrm{d}\Omega \tag{E.6}$$

$$\mathbf{Q}_{\mathrm{s}\lambda} = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{B}}^T : \mathbf{C}^s : \mathbf{g}^s \mathbf{H} \, \mathrm{d}\Omega \tag{E.7}$$

$$\mathbf{Q}_{\lambda\mathrm{s}} = \int_{\Omega} \mathbf{H}^T \mathbf{f}^s : \mathbf{C}^s : \bar{\mathbf{B}} \, \mathrm{d}\Omega \tag{E.8}$$

$$\mathbf{Q}_{\mathrm{p}\lambda} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[\mathrm{g}^p - \mathbf{B} : \mathbf{g}^s \right] \mathbf{H} \, \mathrm{d}\Omega \tag{E.9}$$

$$\mathbf{Q}_{\lambda\mathrm{p}} = \int_{\Omega} \mathbf{H}^T \left[\mathrm{f}^p - \mathbf{f}^s : \mathbf{B} \right] \mathbf{N}_p \, \mathrm{d}\Omega \tag{E.10}$$

$$\mathbf{F}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{int}} = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{B}}^T : \boldsymbol{\sigma}_j \mathrm{d}\Omega \tag{E.11}$$

$$\mathbf{F}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{ext}} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{N}_u^T \mathbf{t}_{j+1} \mathrm{d}\partial\Omega \tag{E.12}$$

$$\mathbf{F}_{\mathrm{p}} = \Delta t \mathbf{H}_{\mathrm{pp}} \bar{p}_j + \Delta t \int_{\partial\Omega} \mathbf{N}_p^T \mathbf{w}_{j+1} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}\partial\Omega \tag{E.13}$$

$$\mathbf{F}_\lambda = \int_\Omega \mathbf{H}^T \; f\left(\boldsymbol{\sigma}_j, p_j, Q_{\alpha_j}\right) \; \mathrm{d}\Omega \tag{E.14}$$

APÉNDICE F

Funciones de forma hermiticas en dos dimensiones

Con el fin de derivar las funciones de forma hermiticas, $\mathbf{H}$, de la Ec. (6.14) se emplea un sistema de coordenadas naturales (ver Fig. 6.1).

En esta sección se presentan las funciones de forma hermiticas del elemento finito cuadrilátero discutido en el Capítulo 6. Como fue indicado en la Sección 6.2 el multiplicador plástico requiere de funciones de interpolación, $\mathbf{H}$, de continuidad C_1, luego

$$\mathbf{H} = \bar{\mathbf{H}}\mathbf{K} \tag{F.1}$$

donde $\mathbf{H}$ y $\bar{\mathbf{H}}$ son las funciones de forma Hermiticas en los sistemas de coordenadas globales y locales, respectivamente, mientras que $\mathbf{K}$ es la matriz de transformación de coordenadas.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{F.2}$$

Puede observarse que la matriz de transformación de coordenadas $\mathbf{K}$ está formado por elementos de la matriz Jacobiana, $\mathbf{J}$. Así, la matriz $\bar{\mathbf{H}}$ correspondiente al nodo j es

$$\bar{\mathbf{H}} = \begin{Bmatrix} \bar{h}_j \\ \bar{h}_{\xi j} \\ \bar{h}_{\eta j} \\ \bar{h}_{\eta \xi j} \end{Bmatrix} \qquad \text{para el nodo } j = 1, 2, 3, 4 \tag{F.3}$$

con

$$\bar{h}_j\left(\xi, \eta\right) = \frac{1}{16}\left[3\xi_j\xi - \xi_j\xi^3 + 2\right]\left[3\eta_j\eta - \eta_j\eta^3 + 2\right] \tag{F.4}$$

$$\bar{h}_{\xi j}(\xi,\eta) = \frac{1}{16}\left[\xi^3 + \xi_j\xi^2 - \xi - \xi_j\right]\left[3\eta_j\eta - \eta_j\eta^3 + 2\right] \tag{F.5}$$

$$\bar{h}_{\eta j}(\xi,\eta) = \frac{1}{16}\left[3\xi_j\xi - \xi_j\xi^3 + 2\right]\left[\eta^3 + \eta_j\eta^2 - \eta - \eta_j\right] \tag{F.6}$$

$$\bar{h}_{\eta\xi j}(\xi,\eta) = \frac{1}{16}\left[\xi^3 + \xi j\xi^2 - \xi - \xi j\right]\left[\eta^3 + \eta_j\eta^2 - \eta - \eta_j\right] \tag{F.7}$$

Para una mejor comprensión de las expresiones (F.4) - (F.6) se muestra en la Fig. F.1 las funciones de forma hermiticas correspondientes al nodo 1.

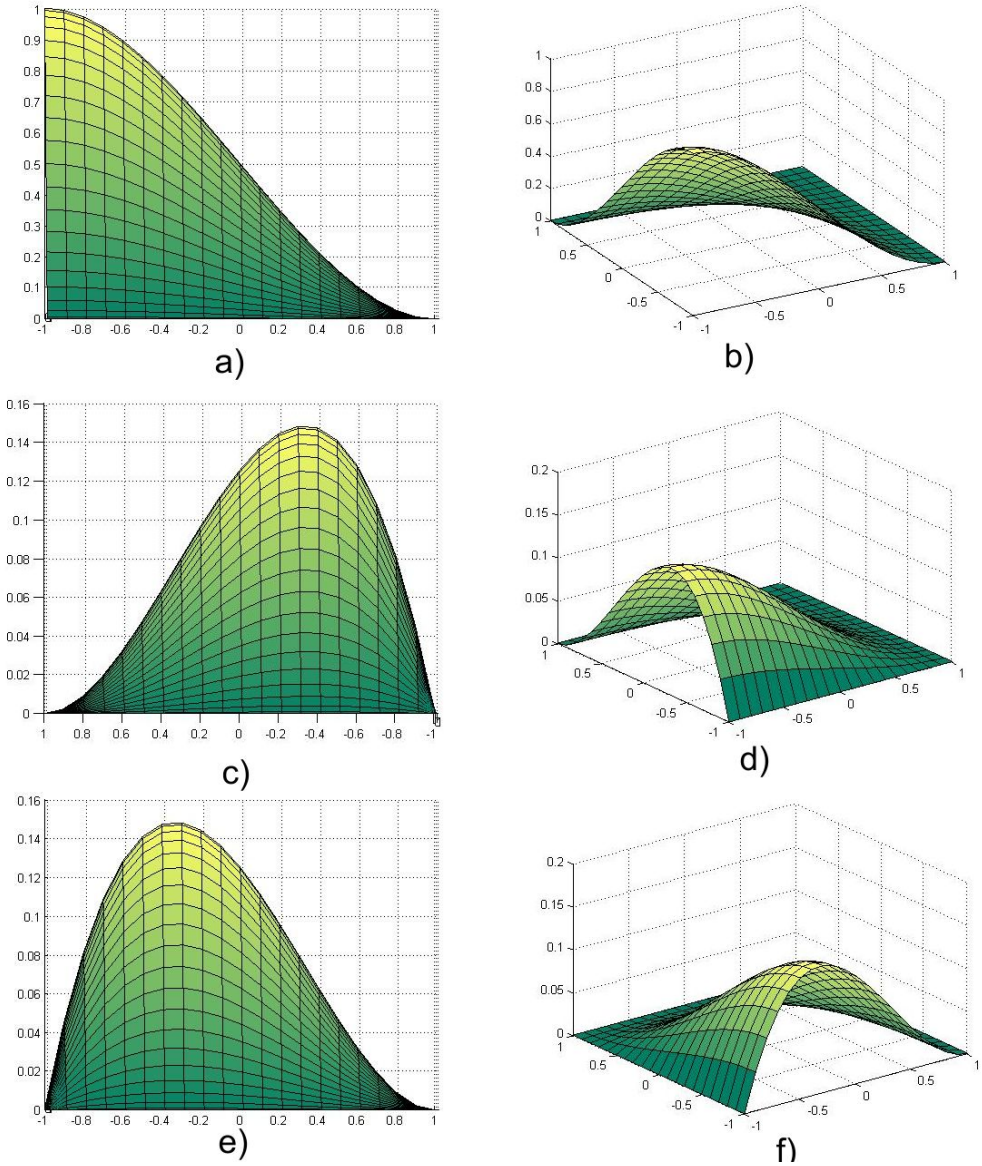

Figura F.1: Funciones de forma de continuidad C_1 para: a) y b) multiplicador plástico λ; c) y d) para $\partial\lambda/\partial x$; e) y f) para $\partial\lambda/\partial y$

Bibliografía

[1] M.-A. Abellan and R. de Borst. Wave propagation and localisation in a softening two-phase medium. *Comput. Meth. Appl. Mech.*, 195:5011–5019, 2006.

[2] R. K. Abu Al-Rub and G. Z. Voyiadjis. A physically based gradient plasticity theory. *Int. J. Plasticity*, 22(4):654–684, 2006.

[3] R. K. Abu Al-Rub, G. Z. Voyiadjis, and D. J. Bammann. A thermodynamic based higher-order gradient theory for size dependent plasticity. *Int. J. Solids Struct.*, 44(9):2888–2923, 2007.

[4] E. C. Aifantis. On scale invariance in anisotropic plasticity, gradient plasticity and gradient elasticity. *Int. J. Eng. Sci.*, 47(11-12):1089–1099, 2009.

[5] E. E. Alonso, A. Gens, and A. Josa. A constitutive model for partially saturated soils. *Geotechnique*, 40(3):405–430, 1990.

[6] J. L. Auriault and C. Boutin. Deformable porous media with double porosity. Quasi-statics. I: Coupling effects. *Transp. Porous Media*, 7(1):63–82, 1992.

[7] A.R. Balmaceda. *Compacted soils, a theoretical and experimental study (in spanish).* Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Catalunya, 1991.

[8] L. Bardella. Some remarks on the strain gradient crystal plasticity modelling, with particular reference to the material length scales involved. *Int. J. Plasticity*, 23(2):296–322, 2007.

[9] L. Bardella. Size effects in phenomenological strain gradient plasticity constitutively involving the plastic spin. *Int. J. Eng. Sci.*, 48(5):550–568, 2010.

[10] B. Bary, J.-P. Bournazel, and E. Bourdarot. Poro-damage approach applied to hydro-fracture analysis of concrete. *J. Eng. Mech.*, 126(9):937–943, 2000.

[11] T. Belytschko, W. K. Liu, and B. Moran. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures.* John Wiley & Sons, England., 2000.

[12] A. Benallal and C. Comi. Material instabilities in inelastic saturated porous media under dynamic loadings. *Int. J. Solids Struct.*, 39(13-14):3693–3716, 2002.

[13] G. Bolzon, B.A. Schrefler, and O.C. Zienkiewicz. Elastoplastic soil constitutive laws generalized to partially saturated states. *Geotechnique*, 46(2):279–289, 1996.

[14] R. I. Borja. Cam-Clay plasticity. Part V: A mathematical framework for three-phase deformation and strain localization analyses of partially saturated porous media. *Comput. Meth. Appl. Mech.*, 193:5301–5338, 2004.

[15] R. I. Borja and A. Koliji. On the effective stress in unsaturated porous continua with double porosity. *J. Mech. Phys. Solids.*, 57(8):1182–1193, 2009.

[16] A. Carosio, K. Willam, and G. Etse. On the consistency of viscoplastic formulations. *Int. J. Solids Struct.*, 37(48-50):7349–7369, 2000.

[17] C. Comi. Non-local model with tension and compression damage mechanisms. *Eur. J. Mech. A-Solid*, 20(1):1–22, 2001.

[18] O. Coussy. *Mechanics of Porous Continua.* John Wiley & Sons., 1995.

[19] O. Coussy. *Poromechanics.* John Wiley & Sons., 2004.

[20] O. Coussy, L. Dormieux, and E. Detournay. From mixture theory to Biot's approach for porous media. *Int. J. Solids Struct.*, 35(34):4619–4635, 1998.

[21] O. Coussy and P. Monteiro. Unsaturated poroelasticity for crystallization in pores. *Comput. Geotech.*, 34(4):279–290, 2007.

[22] R. de Borst and H. B. Mühlhaus. Gradient-dependent plasticity: Formulation and algorithmic aspects. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 35:521–539, 1992.

[23] R. de Borst and J. Pamin. Gradient plasticity in numerical simulation of concrete cracking. *Eur. J. Mech. A-Solid*, 15(2):295–320, 1996.

[24] R. de Borst and J. Pamin. Some novel developments in finite element procedures for gradient-dependent plasticity. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 39(14):2477–2505, 1996.

[25] H. A. Di Rado, P. A. Beneyto, J. L. Mroginski, and A. M. Awruch. Influence of the saturation-suction relationship in the formulation of non-saturated soils consolidation models. *Math. Comput. Model.*, 49(5-6):1058–1070, 2009.

[26] H. A. Di Rado, J. L. Mroginski, P. A. Beneyto, and A. M. Awruch. A symmetric constitutive matrix for the nonlinear analysis of hypoelastic solids based on a formulation leading to a non-symmetric stiffness matrix. *Commun. Numer. Meth. Eng.*, 24(11):1079–1092, 2008.

[27] R. J. Dorgan and G. Z. Voyiadjis. A mixed finite element implementation of a gradient-enhanced coupled damage-plasticity model. *Int. J. Damage Mech.*, 15(3):201–235, 2006.

[28] Robert J. Dorgan. *A nonlocal model for coupled damage-plasticity incorporating gradients of internal state variables at multiscales.* Ph.D. Thesis, Louisiana State University, 2006.

[29] D. C. Drucker and W. Prager. Soil mechanics and plastic analysis of limit design. *Quarterly of Applied Mathematics*, 10:157–165, 1952.

[30] W. Ehlers and P. Blome. A triphasic model for unsaturated soil based on the theory of porous media. *Math. Comput. Model.*, 37:507–513, 2003.

[31] W. Ehlers, T. Graf, and M. Ammann. Deformation and localization analysis of partially saturated soil. *Comput. Meth. Appl. Mech.*, 193(27-29):2885–2910, 2004.

[32] M. Ekh, M. Grymer, K. Runesson, and T Svedberg. Gradient crystal plasticity as part of the computational modelling of polycrystals. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 72(2):197–220, 2007.

[33] I. Ertürk, J. A. W. van Dommelen, and M. G. D. Geers. Energetic dislocation interactions and thermodynamical aspects of strain gradient crystal plasticity theories. *J. Mech. Phys. Solids.*, 57(11):1801–1814, 2009.

[34] G. Etse, A. Caggiano, and S. Vrech. Multiscale failure analysis of fiber reinforced concrete based on a discrete crack model. *Int. J. Fracture*, page (in press), 2012.

[35] G. Etse and J. L. Mroginski. Thermodynamic consistent gradient-poroplasticity theory for porous media. In *Computational Plasticity XI - Fundamentals and Applications, COMPLAS XI*, pages 342–353, 2011.

[36] G. Etse and S. Vrech. Geometrical method for localization analysis in gradient-dependent J2 plasticity. *J. Appl. Mech.*, 73(6):1026–1030, 2006.

[37] G. Etse, S. M. Vrech, and J. L. Mroginski. Analytical and geometrical localization analysis of the elastoplastic leon-drucker-prager model based on gradient theory and fracture energy. In *Computational Plasticity XI - Fundamentals and Applications, COMPLAS X*, 2009.

[38] G. Etse and K. Willam. Assessment of localized failure in plain concrete. *ZAMM (Zeitschrift fuer angewante Mathemathik und Mechanik)*, pages 234–236, 1994.

[39] G. Etse and K. Willam. Fracture energy formulation for inelastic behavior of plain concrete. *J. Eng. Mech.*, 120(9):1983–2011, 1994.

[40] N. A. Fleck and J. W. Hutchinson. A reformulation of strain gradient plasticity. *J. Mech. Phys. Solids.*, 49(10):2245–2271, 2001.

[41] D. G. Fredlund and A. Xing. Equations for the soil-water characteristic curve. *Can. Geotech. J.*, 31:521–532, 1994.

[42] P. Fredriksson, P. Gudmundson, and L. P. Mikkelsen. Finite element implementation and numerical issues of strain gradient plasticity with application to metal matrix composites. *Int. J. Solids Struct.*, 46(22-23):3977–3987, 2009.

[43] D. Gawin, P. Baggio, and B. A. Schrefler. Coupled heat, water and gas flow in deformable porous media. *Int. J. Numer. Meth. Fl.*, 20:969–987, 1995.

[44] A. Gens and D.M. Potts. A theoretical model for describing the behaviour of soils not obeying Rendulic's principle. In Pandes G.N. Studer J.A. Dungar, R., editor, *Int. Sym. on Numerical Models in Geomechanics, Zurich*, pages 24–32, 1982.

[45] P. Gudmundson. A unified treatment of strain gradient plasticity. *J. Mech. Phys. Solids.*, 52:1379–1406, 2004.

[46] P. Guo. Undrained shear band in water saturated granular media: A critical revisiting with numerical examples. *Int. J. Numer. Anal. Met.*, page (in press) doi: 10.1002/nag.1101, 2011.

[47] M. E. Gurtin and L. Anand. Thermodynamics applied to gradient theories involving the accumulated plastic strain: The theories of aifantis and fleck and hutchinson and their generalization. *J. Mech. Phys. Solids.*, 57(3):405–421, 2009.

[48] J. Hadamard. *Propagation des ondes et les equations d'Hydrodynamique.* New York: Chelsea (reprinted 1949), 1903.

[49] K. Hashiguchi and S. Tsutsumi. Gradient plasticity with the tangential-subloading surface model and the prediction of shear-band thickness of granular materials. *Int. J. Plasticity*, 23(5):767–797, 2007.

[50] S. M. Hassanizadeh and W. G. Gray. General conservation equation for multiphase sistems: 1, averaging procedures. *Adv. Water Resour.*, 2:131–144, 1979.

[51] S. M. Hassanizadeh and W. G. Gray. General conservation equation for multiphase sistems: 2, mass momenta, energy and entropy equations. *Adv. Water Resour.*, 2:191–203, 1979.

[52] S. M. Hassanizadeh and W. G. Gray. General conservation equation for multiphase sistems: 3, constitutive theory for porous media flow. *Adv. Water Resour.*, 3:25–40, 1980.

[53] R. Hill. Acceleration waves in solids. *J. Mech. Phys. Solids.*, 10:1–16, 1962.

[54] C. B. Hirschberger and P. Steinmann. Classification of concepts in thermodynamically consistent generalized plasticity. *J. Eng. Mech.*, 135(3):156–170, 2009.

[55] Y. Huang and Y.-K Zhang. Constitutive relation of unsaturated soil by use of the mixture theory (I) - nonlinear constitutive equations and field equations. *Adv. Appl. Mech.*, 24(2):123–137, 2003.

[56] T. Ito. Effect of pore pressure gradient on fracture initiation in fluid saturated porous media: Rock. *Eng. Fract. Mech.*, 75(7):1753–1762, 2008.

[57] M. Jirásek and S. Rolshoven. Localization properties of strain-softening gradient plasticity models. Part I: Strain-gradient theories. *Int. J. Solids Struct.*, 46(11-12):2225–2238, 2009.

[58] K. Kamrin. Nonlinear elasto-plastic model for dense granular flow. *Int. J. Plasticity*, 26(2):167–188, 2010.

[59] N. Khalili and M. H. Khabbaz. On the theory of three-dimensional consolidation in unsaturated soils. In E.E. Alonso and P. Delage, editors, *First International Conference on Unsaturated Soils - UNSAT'95.*, pages 745–750, 1995.

[60] N. Khalili and B. Loret. An elasto-plastic model for non-isothermal analysis of flow and deformation in unsaturated porous media: formulation. *Int. J. Solids Struct.*, 38(46-47):8305–8330, 2001.

[61] O. Kristensson and A. Ahadi. Numerical study of localization in soil systems. *Comput. Geotech.*, 32(8):600–612, 2005.

[62] M. Kuroda and V. Tvergaard. A finite deformation theory of higher-order gradient crystal plasticity. *J. Mech. Phys. Solids.*, 56(8):2573–2584, 2008.

[63] M. Kuroda and V. Tvergaard. On the formulations of higher-order strain gradient crystal plasticity models. *J. Mech. Phys. Solids.*, 56(4):1591–1608, 2008.

[64] M. Kuroda and V. Tvergaard. An alternative treatment of phenomenological higher-order strain-gradient plasticity theory. *Int. J. Plasticity*, 26(4):507–515, 2010.

[65] L. La Ragione, V. C. Prantil, and I. Sharma. A simplified model for inelastic behavior of an idealized granular material. *Int. J. Plasticity*, 24(1):168–189, 2008.

[66] T. Y. Lai, R. I. Borja, B. G. Duvernay, and R. L. Meehan. Capturing strain localization behind a geosynthetic-reinforced soil wall. *Int. J. Numer. Anal. Met.*, 27:425–451, 2003.

[67] R. W. Lewis and B. A. Schrefler. *The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation of Porous Media.* John Wiley & Sons., 1998.

[68] T. Liebe, P. Steinmann, and A. Benallal. Theoretical and computational aspects of a thermodynamically consistent framework for geometrically linear gradient damage. *Comput. Meth. Appl. Mech.*, 190:6555–6576, 2001.

[69] X. Liu and A. Scarpas. Numerical modeling of the influence of water suction on the formation of strain localization in saturated sand. *CMES-Comp. Model Eng.*, 9(1):57–74, 2005.

[70] L.E. Malvern. *Introduction to the mechanics of a Continuous Medium.* Prentice Hall. Englewood Cliffs. New York, 1969.

[71] N. J. Mattei, M. M. Mehrabadi, and H. Zhu. A micromechanical constitutive model for the behavior of concrete. *Mech. Mater.*, 39(4):357–379, 2007.

[72] M. Mokni and J. Desrues. Strain localization measurements in undrained plane-strain biaxial tests on hostun RF sand. *Mech. Cohes-Frict. Mat.*, 4:419–441, 1998.

[73] J. L. Mroginski. *Non linear geomechanics applied to environmental problems in partially saturated porous media (in spanish).* Mg. Thesis., Northeast National University, Argentine, 2008.

[74] J. L. Mroginski, H. A. Di Rado, P. A. Beneyto, and A. M. Awruch. A finite element approach for multiphase fluid flow in porous media. *Math. Comput. Simul.*, 81:76–91, 2010.

[75] J. L. Mroginski and G. Etse. A finite element formulation of gradient-based plasticity for porous media with C1 interpolation of internal variables. *Comput. Geotech.*, accepted, doi:10.1016/j.compgeo.2012.11.003, 2012.

[76] J. L. Mroginski and G. Etse. Discontinuous bifurcation analysis in thermodynamically consistent gradient poroplastic materials. *Int. J. Solids Struct.*, submitted, 2013.

[77] J. L. Mroginski, G. Etse, and S. M. Vrech. A thermodynamical gradient theory for deformation and strain localization of porous media. *Int. J. Plasticity*, 27:620–634, 2011.

[78] K. K. Muraleetharan, C. Liu, C. Wei, T. C. G. Kibbey, and L. Chen. An elastoplatic framework for coupling hydraulic and mechanical behavior of unsaturated soils. *Int. J. Plasticity*, 25(3):473–490, 2009.

[79] V. D. Murty, C. L. Clay, M. P. Camden, and D. B. Paul. Natural convection around a cylinder buried in a porous medium- non-Darcian effects. *Appl. Math. Modell.*, 18:134–141, 1994.

[80] S. Naili, O. Le Gallo, and D. Geiger. Mechanics of biological porous media. theoretical approach and numerical approximation. *J. Biomech.*, 22(10):1062, 1989.

[81] Q. -S. Nguyen and S. Andrieux. The non-local generalized standard approach: A consistent gradient theory. *Comptes Rendus - Mecanique*, 333(2):139–145, 2005.

[82] F. Nicot and F. Darve. A micro-mechanical investigation of bifurcation in granular materials. *Int. J. Solids Struct.*, 44(20):6630–6652, 2007.

[83] F. Nicot, L. Sibille, and F. Darve. Bifurcation in granular materials: An attempt for a unified framework. *Int. J. Solids Struct.*, 46(22-23):3938–3947, 2009.

[84] N. S. Ottosen and K. Runesson. Properties of discontinuous bifurcation solutions in elasto-plasticity. *Int. J. Solids Struct.*, 27(4):401–421, 1991.

[85] J. Pamin. *Gradient-dependent plasticity in numerical simulation of localization phenomena*. PhD. Thesis., TU-Delft, The Netherlands, 1994.

[86] J. Pamin and A. Stankiewicz. Numerical simulation of instabilities in one- and two-phase soil model based on Cam-clay plasticity. *Technical Transactions*, 20:81–91, 2008. Series Environmental Enginnering 3-S/2008.

[87] Y. Pan, X. Wang, and Z. Li. Analysis of the strain softening size effect for rock specimens based on shear strain gradient plasticity theory. *Int. J. Rock Mech. Min.*, 39(6):801–805, 2002.

[88] J. M. Parnás. *Modeling and localized failure analysis in concrete*. Mg. Thesis., National University of Tucuman, Argentine, 2005.

[89] D. M. Pedroso and M. M. Farias. Extended barcelona basic model for unsaturated soils under cyclic loadings. *Comput. Geotech.*, 38(5):731–740, 2011.

[90] R.H.J. Peerlings, R. de Borst, W.A.M. Brekelmans, and M.G.D. Geers. Gradient-enhanced damage modelling of concrete fracture. *Mech. Cohes-Frict. Mat.*, 3(4):323–342, 1998.

[91] R. Peet, T. Svedberg, and K. Runesson. A thermodynamically consistent theory of gradient-regularized plasticity coupled to damage. *Int. J. Plasticity*, 13(6):669–696, 1997.

[92] D. Perić. *Localized deformation and failure analysis of pressure sensitive granular materials.* PhD. Thesis., University of Colorado, CEAE Dept., Boulder, 1990.

[93] D. Perić and H. A. Rasheed. Localized failure of fibre-reinforced elastic-plastic materials subjected to plane strain loading. *Int. J. Numer. Anal. Met.*, 31(7):893–916, 2007.

[94] F. Pesavento, D. Gawin, and B. A. Schrefler. Modeling cementitious materials as multiphase porous media: Theoretical framework and applications. *Acta Mech.*, 201(1-4):313–339, 2008.

[95] F. Pesavento, B. A. Schrefler, and D. Gawin. Modelling of coupled multifield problems in concrete by means of porous media mechanics. In *Proceedings of the 6th International Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures.*, pages 485–493, 2007.

[96] J. Pierre, B. David, H. Petite, and C. Oddou. Mechanics of active porous media: Bone tissue engineering application. *J. Mech. Med. Biol.*, 8(2):281–292, 2008.

[97] C. Polizzotto. Thermodynamics-based gradient plasticity theories with an application to interface models. *Int. J. Solids Struct.*, 45(17):4820–4834, 2008.

[98] C. Polizzotto. A link between the residual-based gradient plasticity theory and the analogous theories based on the virtual work principle. *Int. J. Plasticity*, 25(11):2169–2180, 2009.

[99] C. Polizzotto. A nonlocal strain gradient plasticity theory for finite deformations. *Int. J. Plasticity*, 25(7):1280–1300, 2009.

[100] S. Ramaswamy and N. Aravas. Finite element implementation of gradient plasticity models part I: Gradient-dependent yield functions. *Comput. Meth. Appl. Mech.*, 163(1-4):11–32, 1998.

[101] K.H. Roscoe and J.B. Burland. *On the generalized stress-strain behaviour of wet clay.* In Engineering Plasticity, eds. J. Heyman and F.A. Leckie. Cambridge University Press., 1968.

[102] K.H. Roscoe, A.N. Schofield, and C.P. Wroth. On the yielding of soils. *Geotechnique*, 8:22–53, 1958.

[103] J. Rudnicki and J. Rice. Localization analysis of elastic degradation with application to scalar damage. *J. Eng. Mech.*, 23:371–394, 1975.

[104] K. Runesson, N. S. Ottosen, and P. Dunja. Discontinuous bifurcations of elastic-plastic solutions at plane stress and plane strain. *Int. J. Plasticity*, 7(1-2):99–121, 1991.

[105] K. Runesson, D. Perić, and S. Sture. Effect of pore fluid compressibility on localization in elastic-plastic porous solids under undrained conditions. *Int. J. Solids Struct.*, 33(10):1501–1518, 1996.

[106] P. J. Sabatini and R. J. Finno. Effect of consolidation on strain localization of soft clays. *Comput. Geotech.*, 18(4):311–339, 1996.

[107] R. Schiava and G. Etse. Constitutive modelling and discontinuous bifurcation assessment in unsaturated soils. *J. Appl. Mech.*, 73(6):1039–1044, 2006.

[108] A.N. Schofield and C.P. Wroth. *Critical State Soil Mechanics.* London, England: McGraw-Hill, 1968.

[109] B. A. Schrefler and F. Pesavento. Multiphase flow in deforming porous material. *Comput. Geotech.*, 31:237–250, 2004.

[110] B. A. Schrefler, H. W. Zhang, and L Sanavia. Interaction between different internal length scales in strain localization analysis of fully and partially saturated porous media - The 1-D case. *Int. J. Numer. Anal. Met.*, 30(1):45–70, 2006.

[111] L. Schreyer-Bennethum. Theory of flow and deformation of swelling porous materials at the macroscale. *Comput. Geotech.*, 34(4):267–278, 2007.

[112] J. Y. Shu, W. E. King, and N. A. Fleck. Finite elements for materials with strain gradient effects. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 44(3):373–391, 1999.

[113] J. C. Simo and T. J. R. Hughes. *Computational Inelasticity.* Springer - Verlag, New York, Inc., 1998.

[114] J.C. Simo and C. Miehe. Associative coupled thermoplasticity at finite strains: formulation, numerical analysis and implementation. *Comput. Meth. Appl. Mech.*, 98(1):41–104, 1992.

[115] A. Simone, G. N. Wells, and L. J. Sluys. From continuous to discontinuous failure in a gradient-enhanced continuum damage model. *Comput. Meth. Appl. Mech.*, 192(41-42):4581–4607, 2003.

[116] A. Stankiewicz and J. Pamin. Finite element analysis of fluid influence on instabilities in two-phase cam-clay plasticity model. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Science*, 13(4):669–682, 2006.

[117] A. Stankiewicz and J. Pamin. Gradient-enhanced cam-clay model in simulation of strain localization in soil. *Foundation of Civil and Environmental Engineering*, 7:293–318, 2006.

[118] J. Sulem. Bifurcation theory and localization phenomena. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, 14(1-10):989–1009, 2010.

[119] T. Svedberg. *On the Modelling and Numerics of Gradient-Regularized Plasticity Coupled to Damage.* PhD. Thesis., Chalmers University of Technology. Göteborg, Sweden, 1999.

[120] T. Svedberg and K. Runesson. A thermodynamically consistent theory of gradient-regularized plasticity coupled to damage. *Int. J. Plasticity*, 13(6-7):669–696, 1997.

[121] T. Svedberg and K. Runesson. An algorithm for gradient-regularized plasticity coupled to damage based on a dual mixed fe-formulation. *Comput. Meth. Appl. Mech.*, 161:49–65, 1998.

[122] S. Swaddiwudhipong, J. Hua, K. K. Tho, and Z. S. Liu. C0 solid elements for materials with strain gradient effects. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 64(10):1400–1414, 2005.

[123] I. Tsagrakis, A. Konstantinidis, and E.C. Aifantis. Strain gradient and wavelet interpretation of size effects in yield and strength. *Mech. Mater.*, 35:733–745, 2003.

[124] A. Uchaipichat. An elasto-plastic model for cemented soils under unsaturated condition. *European Journal of Scientific Research*, 60(2):213–218, 2012.

[125] F.-J. Ulm, G. Constantinides, and F. H. Heukamp. Is concrete a poromechanics material? - a multiscale investigation of poroelastic properties. *Mater. Struct.*, 37(265):43–58, 2004.

[126] I. Vardoulakis and E. C. Aifantis. A gradient flow theory of plasticity for granular materials. *Acta Mech.*, 87(3-4):197–217, 1991.

[127] G. Z. Voyiadjis, M. I. Alsaleh, and K. A. Alshibli. Evolving internal length scales in plastic strain localization for granular materials. *Int. J. Plasticity*, 21(10):2000–2024, 2005.

[128] G. Z. Voyiadjis and B. Deliktas. Formulation of strain gradient plasticity with interface energy in a consistent thermodynamic framework. *Int. J. Plasticity*, 25(10):1997–2024, 2009.

[129] G. Z. Voyiadjis, G. Pekmezi, and B. Deliktas. Nonlocal gradient-dependent modeling of plasticity with anisotropic hardening. *Int. J. Plasticity*, 26(9):1335–1356, 2010.

[130] S. Vrech and G. Etse. Geometrical localization analysis of gradient-dependent parabolic Drucker-Prager elatoplasticity. *Int. J. Plasticity*, 22(5):943–964, 2005.

[131] S. Vrech and G. Etse. FE approach for thermodynamically consistent gradient-dependent plasticity. *Latin Am. Appl. Res.*, 37:127–132, 2007.

[132] S. M. Vrech. *Computational simulation of localized failure process based on gradient theory (in spanish).* PhD. Thesis., National University of Tucuman, Argentine, 2007.

[133] S. M. Vrech and G. Etse. Gradient and fracture energy-based plasticity theory for quasi-brittle materials like concrete. *Comput. Meth. Appl. Mech.*, 199(1-4):136–147, 2009.

[134] S. M. Vrech and G. Etse. Discontinuous bifurcation analysis in fracture energy-based gradient plasticity for concrete. *Int. J. Solids Struct.*, 49(10):1294–1303, 2012.

[135] Z. M. Wang, X. A. Zhu, C. T. Tsai, C. L. Tham, and J. E. Beraun. Hybrid-conventional finite element for gradient-dependent plasticity. *Finite Elem. Anal. Des.*, 40(15):2085–2100, 2004.

[136] L. I. Xikui and S. Cescotto. Finite element method for gradient plasticity at large strains. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 39(4):619–633, 1996.

[137] Z. Yin, C. S. Chang, P. Hicher, and M. Karstunen. Micromechanical analysis of kinematic hardening in natural clay. *Int. J. Plasticity*, 25(8):1413–1435, 2009.

[138] H. W. Zhang and B. A. Schrefler. Uniqueness and localization analysis of elastic-plastic saturated porous media. *Int. J. Numer. Anal. Met.*, 25(1):29–48, 2001.

[139] H. W. Zhang and B. A. Schrefler. Analytical and numerical investigation of uniqueness and localization in saturated porous media. *Int. J. Numer. Anal. Met.*, 26(14):1429–1448, 2002.

[140] H. W. Zhang, L. Zhou, and B. A. Schrefler. Material instabilities of anisotropic saturated multiphase porous media. *Eur. J. Mech. A-Solid*, 24(5):713–727, 2005.

[141] Y. Q. Zhang, H. Hao, and M. H. Yu. Effect of porosity on the properties of strain localization in porous media under undrained conditions. *Int. J. Solids Struct.*, 39(7):1817–1831, 2002.

[142] W. Zhen, D. Sun, and Y. Chen. Analytical solution and numerical simulation of shear bands along different stress paths in three-dimensional stress state. *Geotech. Sp.*, 200:192–197, 2010.

[143] Q. Z. Zhu, J. F. Shao, and M. Mainguy. A micromechanics-based elastoplastic damage model for granular materials at low confining pressure. *Int. J. Plasticity*, 26(4):586–602, 2010.