

3

ELEMENTOS DE LA TEORIA DE TENSIONES Y DEFORMACIONES

3.1 DEFINICION DE LOS ESTADOS TRIPLES, DOBLES Y SIMPLES DE TENSIONES

Consideremos el caso de un sólido en equilibrio bajo la acción de cargas exteriores y aislemos del interior del cuerpo un cubo elemental de aristas dx , dy y dz , de manera que las cargas pueden orientarse según el sistema de referencia.

Sobre cada una de las caras existirá un vector tensión total de manera tal que el cubo elemental se encuentre en equilibrio. Estos vectores pueden proyectarse según los ejes de referencia de manera que en cada una de las seis caras tendremos en general una tensión normal y dos tensiones tangenciales perpendiculares entre si. Un estado de tensiones de estas características se dice que es un “estado triple o espacial”.

En determinadas circunstancias las cargas actuantes sobre el cuerpo hacen que las tensiones sobre el cubo elemental queden ubicadas dentro de un plano. Este estado se denomina “doble o plano”.

Cuando los vectores tensión son paralelos a un eje el estado se denomina “simple o lineal”.

En realidad, la definición de un estado como simple, doble o triple no solo depende de estado de cargas actuante sino de la orientación del cubo elemental. Como veremos mas adelante, el estado simple puede pasar a ser un estado doble si el elemento diferencial tiene una rotación, inclusive puede convertirse en un estado triple. El proceso al revés no siempre es factible. Es decir, si tenemos un estado doble, por ejemplo, es probable que no encontremos, por rotación del elemento, una posición para el cual el estado sea lineal.

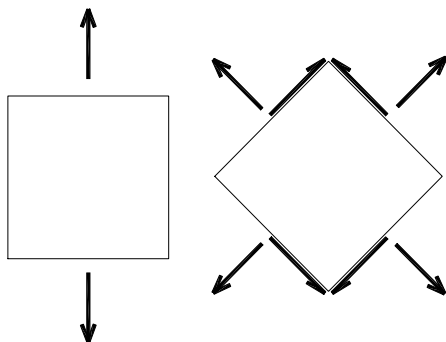


Fig. 3.2

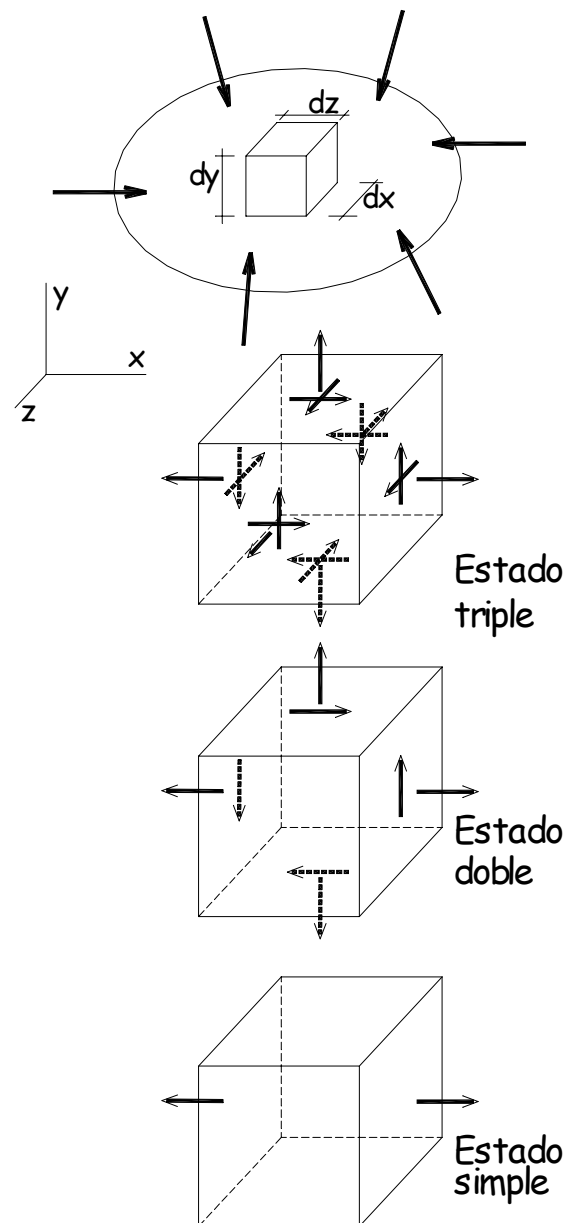


Fig. 3.1

Para poder entendernos con claridad el referirnos a las tensiones, vamos a establecer ciertas convenciones:

σ_i : el subíndice i indicará al eje respecto del cual las tensiones normales son paralelas (σ_x , σ_y , σ_z). Serán positivas cuando produzcan tracción.

τ_{ij} : el subíndice i indicará el vector normal al plano donde actúan las tensiones tangenciales, y el subíndice j indicará el eje al que resultan paralelas ($\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{yx}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$).

Tanto las tensiones normales como la tangenciales varían punto a punto en el interior de un cuerpo, por lo tanto, debemos tener presente que las tensiones quedan expresadas como funciones:

$$\sigma = \sigma_{(x,y,z)} \quad \tau = \tau_{(x,y,z)}$$

3.2 EQUILIBRIO DE UN PRISMA ELEMENTAL

Consideremos, como en la figura 3.3, un punto A correspondiente a un sólido sujeto a tensiones, punto que hacemos coincidir con el origen de coordenadas; y tres planos perpendiculares que pasan por el punto, coincidentes con los planos coordenados. Supongamos además un segundo punto B del mismo sólido, de coordenadas dx, dy y dz.

Admitiremos que las funciones que definen las tensiones en los puntos del sólido son continuas y derivables. Las tensiones que actúan en los planos que pasan por B pueden definirse como las que actúan en los planos paralelos pasantes por A mas el correspondiente incremento. Así tendremos, por ejemplo, σ_x y $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$ tomando como incremento el primer termino del desarrollo en serie de Taylor.

El prisma elemental estará sometido a fuerzas actuantes en sus caras como consecuencia de las tensiones, además existirá una fuerza de masa que supondremos aplicada en el baricentro. Llamaremos X, Y, Z a las componentes de dicha fuerza por unidad de volumen.

Si planteamos el equilibrio del prisma elemental tendremos:

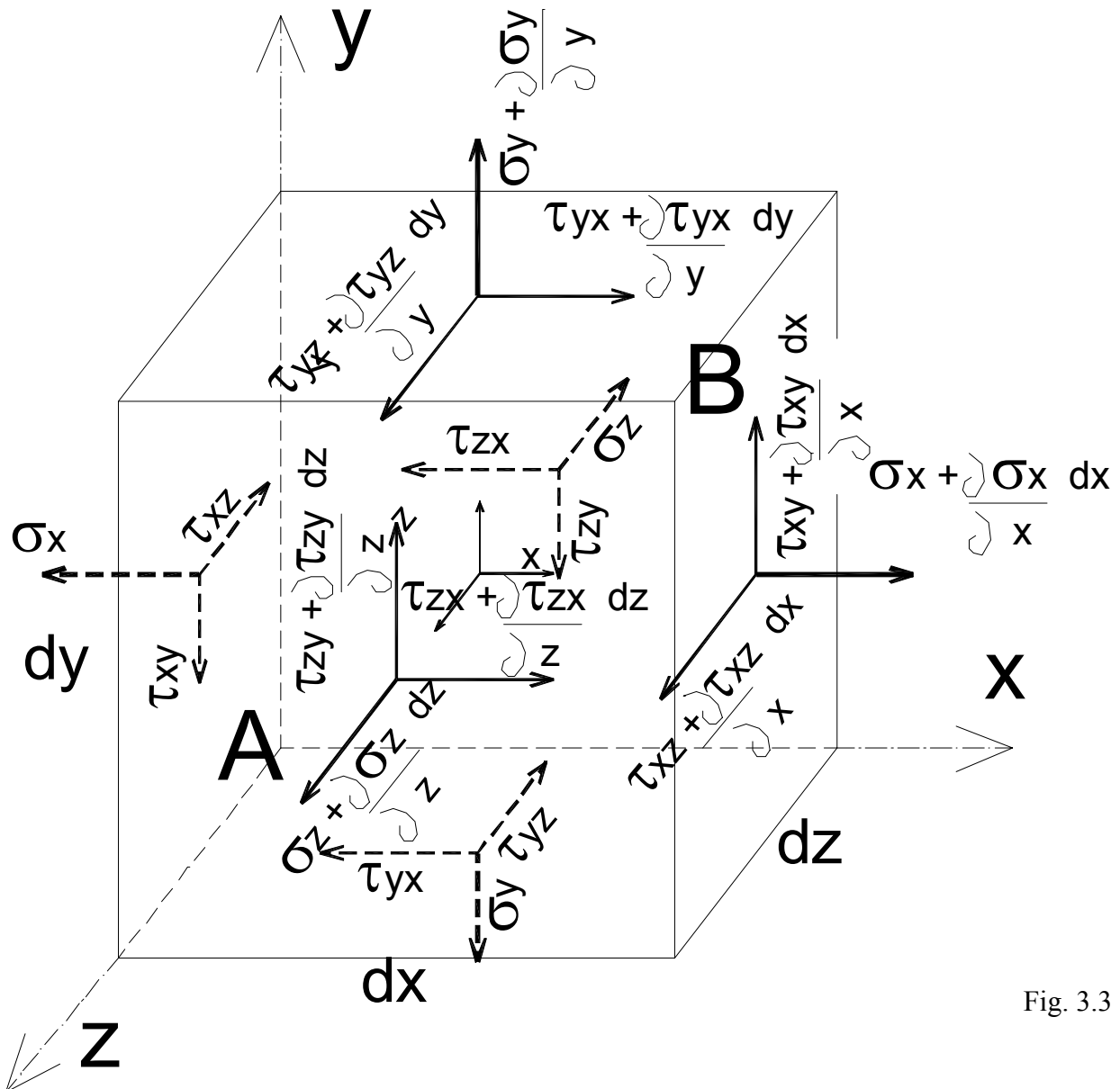


Fig. 3.3

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\rightarrow \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz - \sigma_x dy dz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zx} dx dy + \\ &+ \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{yx} dx dz + X dx dy dz = 0 \\ &\rightarrow \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X \right) dx dy dz = 0 \end{aligned}$$

Planteando además $\Sigma F_y=0$ y $\Sigma F_z=0$ se llega a:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0 \quad \text{ECUACIONES DIFERENCIALES DEL EQUILIBRIO (3.1)}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0$$

Continuando con las ecuaciones de momento, donde suponemos trasladada la terna de ejes al bari-centro del elemento, tendremos:

$$\begin{aligned} \sum M_x = 0 &\rightarrow \left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy \right) dx dz \frac{dy}{2} + \tau_{yz} dx dz \frac{dy}{2} - \\ &- \left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz \right) dx dy \frac{dz}{2} - \tau_{zy} dx dy \frac{dz}{2} = 0 \end{aligned}$$

Despreciando diferenciales de orden superior nos queda:

$$\tau_{yz} dx dy dz - \tau_{zy} dx dy dz = 0 \rightarrow \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Idénticamente

$$\sum M_y = 0 \rightarrow \tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\sum M_z = 0 \rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

(3.2)

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Estas últimas ecuaciones reciben el nombre de “LEY DE CAUCHY o LEY DE RECIPROCI-DAD DE LAS TENSIONES TANGENCIALES”, cuyo enunciado es: “En dos planos normales cua-lesquiera, cuya intersección define una arista, las componentes normales a ésta de las tensiones tan-genciales que actúan en dichos planos, son de igual intensidad y concurren o se alejan de la arista”.

Las ecuaciones diferenciales del equilibrio tienen nueve incógnitas, las que considerando la ley de Cauchy se reducen a seis. Ahora bien, siendo que sólo disponemos de tres ecuaciones, el nume-ro de incógnitas excede el número de ecuaciones, con lo que concluimos que este problema resulta ESTATICAMENTE INDETERMINADO. Las ecuaciones que faltan pueden obtenerse sólo si se estu-dian las CONDICIONES DE DEFORMACION y se tienen en cuenta las propiedades físicas del cuer-po dado (por ejemplo la ley de Hooke).

La determinación del estado tensional de un cuerpo siempre resulta indeterminado por condi-ción interna e implica la consideración de ecuaciones de compatibilidad, las cuales establecen relacio-nes entre las deformaciones, en forma similar como las ecuaciones diferenciales del equilibrio relacio-nan a las tensiones entre sí.

Hay dos ciencias que tratan de resolver este problema:

- La Teoría de la Elasticidad
- La Resistencia de Materiales

En la primera aparecen otras ecuaciones diferenciales aparte de las de equilibrio, se agregan ecuaciones de contorno y se trata de obtener la solución mediante la integración de las ecuaciones diferenciales. El proceso es complejo y en muchos casos es muy difícil de encontrar la solución rigurosa del problema, recurriendo a métodos numéricos. En el ámbito de la Resistencia de Materiales, en cambio, se hacen hipótesis aproximadas, aplicables a distintos casos particulares, y que se verifican experimentalmente.

Cuando resolvimos el problema de la sollicitación normal, sin haberlo mencionado específicamente, hemos utilizado una ecuación de compatibilidad: la Ley de Bernoulli. En efecto, esta ley nos permitió establecer que las deformaciones específicas debían permanecer constantes, con lo que debido a la Ley de Hooke resultó que las tensiones normales también debían ser constante en la sección transversal.

$$\sigma = \frac{P}{\Omega} \rightarrow \int_{\Omega} \sigma \, d\Omega = \int_{\Omega} \frac{P}{\Omega} \, d\Omega = \frac{P}{\Omega} \int_{\Omega} d\Omega = P \quad (3.3)$$

Si hubiésemos intentado resolver el problema sólo a partir de las tensiones, se podrían haber encontrado numerosas leyes de variación $\sigma_{(x,y)}$ cuya integral en el área de la sección transversal diera como resultado el valor P. Sin embargo, ninguna de estas leyes daría $\epsilon = \text{cte.}$, que es lo que se observa experimentalmente.

Para resolver otros problemas como los de torsión, flexión, etc., deberemos seguir un camino similar al indicado, ya que como hemos visto, las ecuaciones de la Estática no resultan suficiente para determinar el estado tensional de un cuerpo.

3.3 DEFORMACIONES EN EL ESTADO TRIPLE

La experiencia demuestra que cuando se produce el estiramiento de una barra, el alargamiento longitudinal va acompañado de acortamientos transversales que son proporcionales al longitudinal. Si en un cubo diferencial actúa solamente σ_x tendremos:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

si además actúa σ_y tendremos un valor adicional:

$$\epsilon'_x = -\mu \epsilon_y = -\mu \frac{\sigma_y}{E}$$

y lo mismo si actúa σ_z . En consecuencia podemos establecer las siguientes leyes:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (3.4)$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

Puede demostrarse que las tensiones tangenciales no provocan alargamiento ni acortamientos, sólo cambios de forma, de modo tal que puede establecerse:

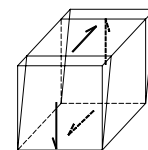


Fig. 3.4

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad (3.5)$$

Más adelante veremos que las tres constantes elásticas E , μ y G no son independientes sino que están relacionadas:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (3.6)$$

Las seis leyes anteriores, que vienen dadas por las ecuaciones 3.4 y 3.5, constituyen la denominada "Ley Generalizada de Hooke".

3.4 ESTADO DOBLE

3.4.1 Variación de las tensiones en el punto según la orientación del plano.

Un elemento definido por tres planos normales entre sí, está sometido a un estado plano, cuando las tensiones en dos de sus caras son nulas.

Analicemos el elemento de la figura:

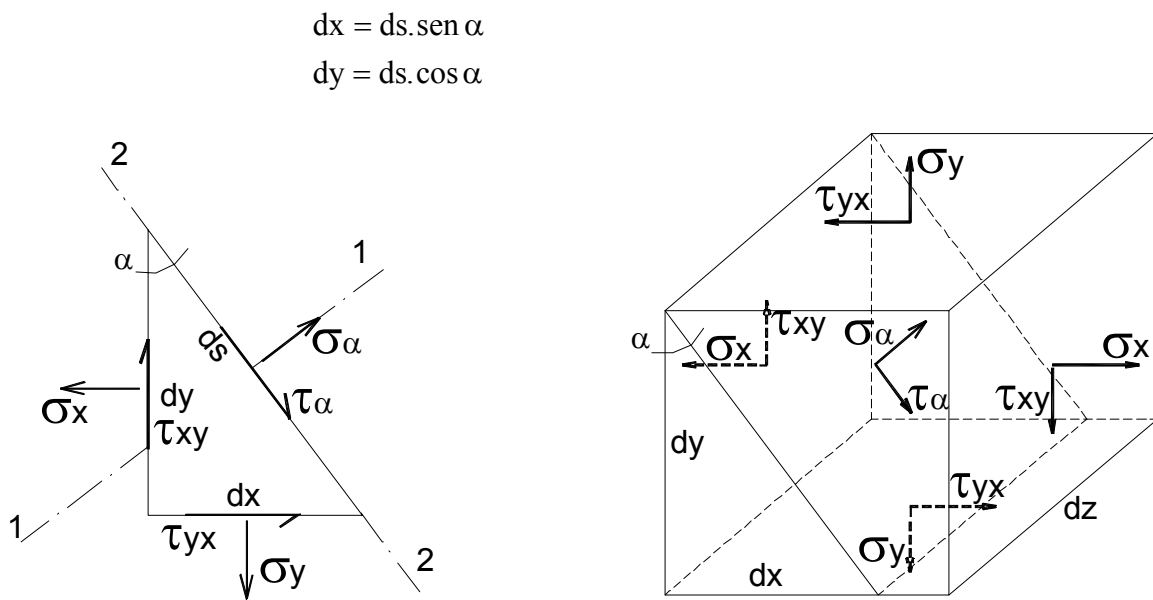


Fig. 3.5

Adoptamos las siguientes convenciones de signos:

Tensiones normales: serán positivas cuando produzcan tracción.

Tensiones tangenciales: serán positivas cuando produzcan un giro de momento con sentido horario con respecto a un punto interior del prisma.

Angulo α : El ángulo se mide a partir del plano vertical y se considera positivo cuando es antihorario.

El plano definido mediante el ángulo α es paralelo al eje z . Los tres planos determinados por los ejes x , y , y el ángulo α pasan por el mismo punto; de allí que no tenemos en cuenta fuerzas de masa sobre dicho elemento.

Recordamos por Cauchy:

$$|\tau_{xy}| = |\tau_{yx}| \quad (3.7)$$

Planteando proyecciones de fuerzas sobre la dirección 1, por razones de equilibrio tenemos:

$$\sum F s / \text{direc } 1 = 0$$

$$\sigma_{\alpha} ds - \sigma_x dy \cos \alpha + \tau_{xy} dy \operatorname{sen} \alpha - \sigma_y dx \operatorname{sen} \alpha + \tau_{yx} dx \cos \alpha = 0$$

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \operatorname{sen}^2 \alpha - 2\tau_{xy} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} -$$

$$- \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x}{2} (2 \cos^2 \alpha - 1) + \frac{\sigma_y}{2} (2 \operatorname{sen}^2 \alpha - 1) -$$

$$- \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x}{2} (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) + \frac{\sigma_y}{2} (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) - \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha$$

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha \quad (3.8)$$

Similar a lo anterior, proyectamos fuerzas sobre la dirección 2:

$$\sum F s / \text{direc } 2 = 0$$

$$\tau_{\alpha} ds - \sigma_x dy \operatorname{sen} \alpha - \tau_{xy} dy \cos \alpha + \sigma_y dx \cos \alpha + \tau_{yx} dx \operatorname{sen} \alpha = 0$$

$$\tau_{\alpha} = (\sigma_x - \sigma_y) \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha + \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha)$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \operatorname{sen} 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \quad (3.9)$$

Las tensiones vinculadas a dos planos perpendiculares se denominan tensiones complementarias. Para calcularlas podemos reemplazar en las ecuaciones anteriores, que son válidas para cualquier ángulo α , por $(\alpha + 90^\circ)$.

$$\begin{aligned} \sigma'_{\alpha} &= \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} (-\cos 2\alpha) - \tau_{xy} (-\operatorname{sen} 2\alpha) \end{aligned}$$

Si analizamos la siguiente suma:

$$\sigma_{\alpha} + \sigma'_{\alpha} = \sigma_x + \sigma_y = \text{cte.} \quad \leftarrow \text{Invariante de tensiones} \quad (3.10)$$

podemos ver que la suma de las tensiones normales correspondientes a dos planos ortogonales se mantienen constantes, por lo que a esta suma se la denomina invariante de tensiones.

3.4.2 Valores máximos y mínimos

En el ítem anterior hemos visto la manera de poder calcular el valor de las tensiones cuando el prisma elemental tiene una rotación, ahora vamos a tratar de determinar la rotación que debería tener para que las tensiones alcancen valores extremos.

$$\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = -(\sigma_x - \sigma_y) \operatorname{sen} 2\alpha - 2\tau_{xy} \cos 2\alpha = 0 \quad (\text{Idem 3.9})$$

$$\operatorname{tg}2\alpha_{\sigma} = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (3.11)$$

Observando esta última ecuación, podemos ver que la misma queda satisfecha por dos valores de α , los cuales difieren entre sí 90° . Reemplazando entonces en la ecuación 3.8 por estos valores llegamos a obtener las expresiones correspondientes a las tensiones normales máxima y mínimas. Para ello nos apoyamos en la construcción gráfica de la figura, de donde resulta muy simple obtener los valores de $\cos 2\alpha_{\sigma}$ y $\sin 2\alpha_{\sigma}$.

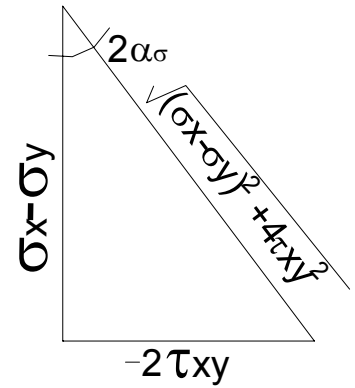


Fig. 3.6

$$\cos 2\alpha_{\sigma} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \quad \sin 2\alpha_{\sigma} = \frac{-2\tau_{xy}}{\pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}$$

$$\sigma_{\alpha\sigma} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \pm 2 \frac{\tau_{xy}}{2} \frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \quad (3.12)$$

$$\sigma_{\alpha\sigma} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}{2\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}$$

$$\sigma_{\max}^{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

Si calculamos el valor de τ_{α} para α_{σ}

$$\tau_{\alpha\sigma} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \frac{-2\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} + \tau_{xy} \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{\pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} = 0$$

podemos ver que las tensiones máximas y mínimas, no sólo se producen simultáneamente en planos ortogonales, sino que al mismo tiempo en dichos planos las tensiones tangenciales son nulas. Las tensiones máximas y mínimas se denominan “tensiones principales” y los ejes perpendiculares a los planos donde actúan, “ejes principales”.

A continuación vamos a tratar de determinar las tensiones tangenciales máximas y mínimas.

$$\frac{d\tau_{\alpha}}{d\alpha} = (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha - 2\tau_{xy} \sin 2\alpha = 0$$

$$\operatorname{tg}2\alpha_{\tau} = +\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \quad (3.13)$$

$$\operatorname{tg}2\alpha_{\tau} = -\frac{1}{\operatorname{tg}2\alpha_{\sigma}} \rightarrow 2\alpha_{\sigma} \text{ difiere } 90^\circ \text{ de } 2\alpha_{\tau}$$

Los planos donde se producen las tensiones principales difieren 45° de aquellos donde las tensiones tangenciales son máximas y mínimas.

$$\tau_{\max/\min} = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \pm \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} + \frac{\tau_{xy} (+2\tau_{xy})}{\pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \quad (3.14)$$

$$\tau_{\max/\min} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

Calculemos el valor de $\sigma_{\alpha\tau}$ para $\tau_{\alpha\tau}$

$$\sigma_{\alpha\tau} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \frac{(2\tau_{xy})}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} - \frac{\tau_{xy} (\sigma_x - \sigma_y)}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$$

$$\sigma_{\alpha\tau} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (3.15)$$

3.5 CIRCULO DE MOHR PARA TENSIONES

3.5.1 Trazado y justificación en el estado doble

Si consideramos las ecuaciones 3.8 y 3.9, y las reordenamos, elevamos al cuadrado y sumamos miembro a miembro tendremos:

$$\sigma_{\alpha} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{sen} 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

$$\left[\sigma_{\alpha} - \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) \right]^2 + \tau_{\alpha}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \quad (3.16)$$

Esta última expresión resulta ser la ecuación de una circunferencia con centro sobre un eje asociado a las tensiones normales σ , y de abscisa $(\sigma_x + \sigma_y)/2$. El radio de la circunferencia es:

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (3.17)$$

La propiedad fundamental de esta circunferencia es que cada punto de ella está asociado a un par de valores (σ, τ) correspondiente a un plano.

Desde el punto de vista práctico el trazado de la circunferencia es muy simple:

- Ubicamos los puntos A y B de coordenadas:

$$A (\sigma_x, \tau_{xy})$$

$$B (\sigma_y, \tau_{yx})$$

- La circunferencia con centro en C, pasante por A y B define el llamado "Circulo de Mohr", cuyo radio coincide con el indicado en la ecuación 3.17

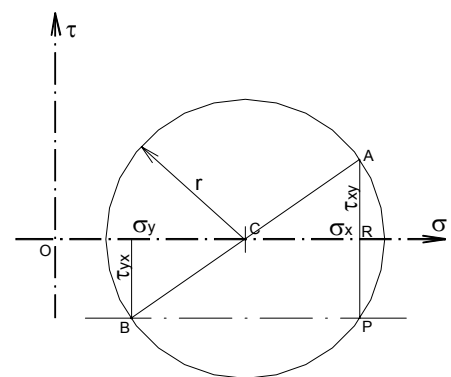


Fig. 3.7

$$\overline{OC} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$\overline{RC} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$$

$$r = \sqrt{\overline{RC}^2 + \overline{RA}^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Si por los puntos A y B trazamos dos rectas paralelas a los planos de actuación de las tensiones que definen los puntos, dichas rectas se cortan en el punto P, el cual presenta propiedades muy importantes. Este punto P se denomina “punto principal de Mohr”.

Si por el punto principal de Mohr trazamos una recta paralela al plano respecto del cual deseamos evaluar las tensiones actuantes, la misma corta a la circunferencia en el punto M.

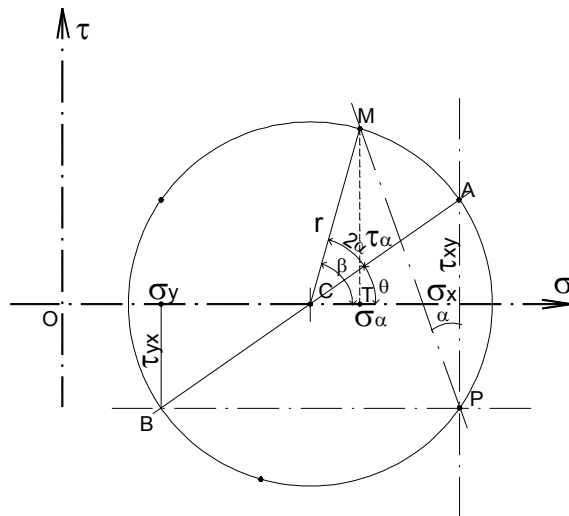


Fig. 3.8

A continuación vamos a demostrar que las coordenadas de ese punto (OT;MT) se corresponden con los valores de σ_α y τ_α .

$$\beta = 2\alpha + \theta$$

$$\overline{OT} = \overline{OC} + \overline{CT} = \overline{OC} + r \cos\beta = \overline{OC} + r \cos(2\alpha + \theta)$$

$$\overline{OT} = \overline{OC} + r(\cos 2\alpha \cos \theta - \text{sen} 2\alpha \text{sen} \theta)$$

$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + r \cos 2\alpha \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2r} - r \text{sen} 2\alpha \frac{\tau_{xy}}{r}$$

$$\overline{OT} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \text{sen} 2\alpha = \sigma_\alpha$$

$$\overline{TM} = r \text{sen} \beta = r \text{sen}(2\alpha + \theta)$$

$$= r \text{sen} 2\alpha \cos \theta + r \cos 2\alpha \text{sen} \theta$$

$$\overline{TM} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \text{sen} 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha = \tau_\alpha$$

El círculo de Mohr no sólo resulta práctico para determinar las tensiones presentes en un plano cualquiera, sino que a partir del mismo pueden obtenerse las tensiones principales y sus planos principales, o las tensiones tangenciales máxima y mínima. En el círculo de la figura 3.9 hemos representado las tensiones recientemente mencionadas y sus correspondientes planos de actuación. En el mismo también puede verse que en correspondencia con las tensiones principales existen tangenciales nulas.

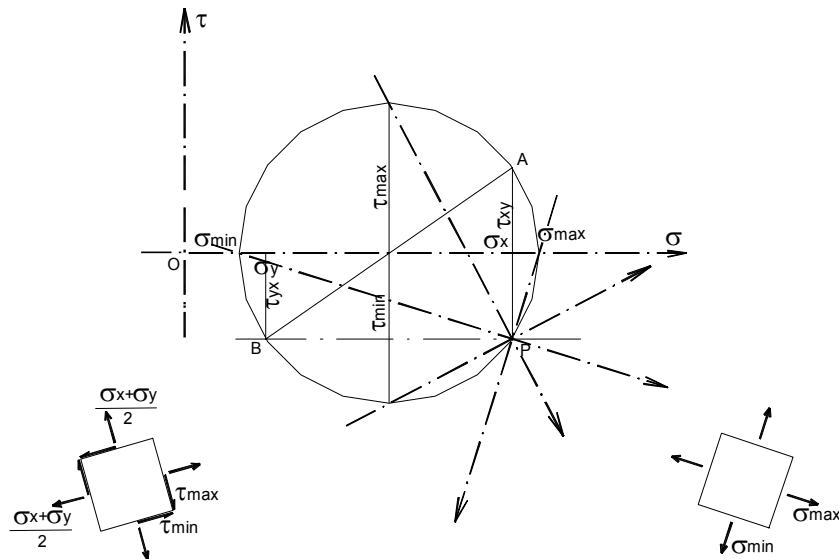


Fig. 3.9

A través del círculo de Mohr podemos analizar algunos casos particulares que nos interesan.

a) Corte puro

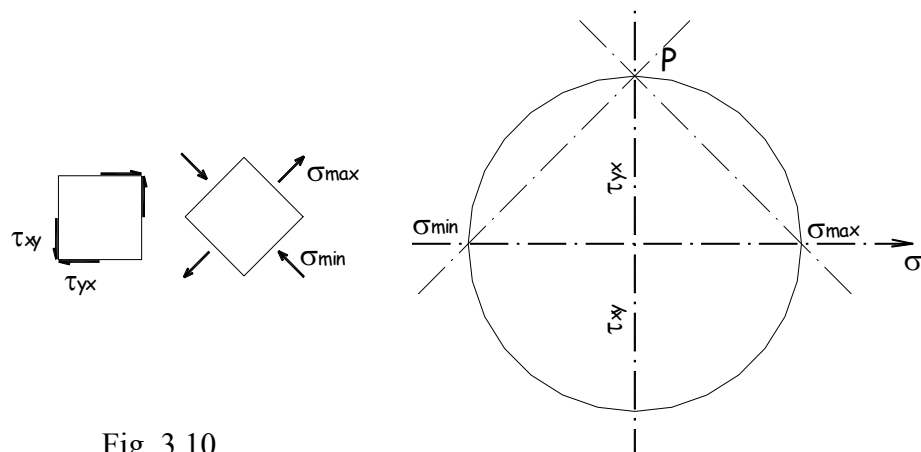


Fig. 3.10

En este estado vemos que existe un elemento girado a 45° con respecto al solicitado por corte puro, tal que sus caras están sometidas a tensiones normales de tracción y compresión, iguales en valor absoluto y numéricamente iguales a la tensión tangencial.

b) Tracción simple

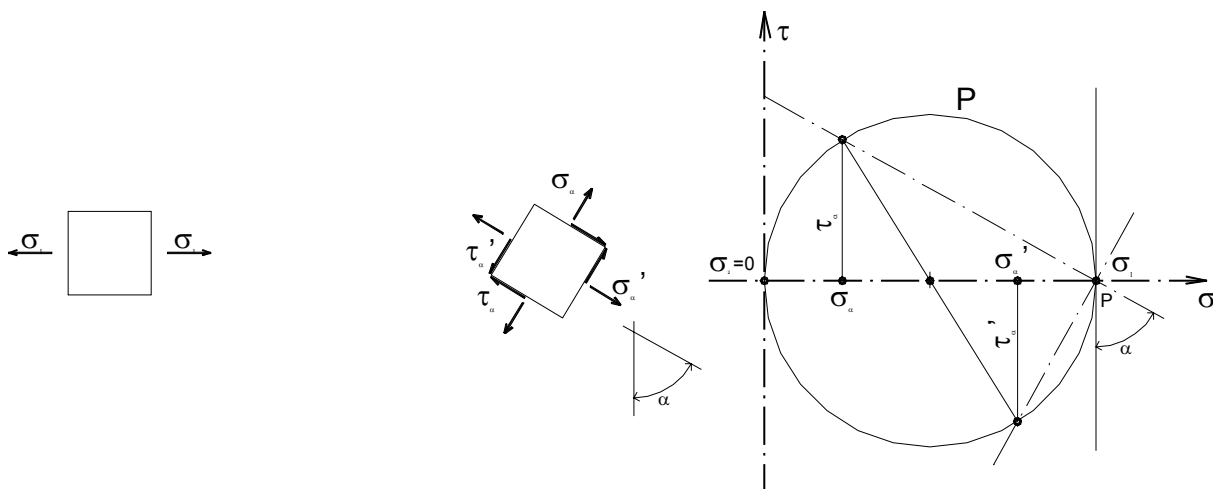


Fig. 3.11

3.5.2 Trazado en el estado triple

Así como es posible determinar las tensiones principales en un estado doble, éstas también pueden calcularse en un estado triple. Si suponemos que estas tensiones son conocidas, es posible demostrar que el par de tensiones (σ, τ) correspondiente a un plano inclinado cualquiera se corresponde con las coordenadas de cierto punto ubicado dentro del área rayada indicada en la figura 3.13, encerrada por los círculos, definidos, en este caso por las tres tensiones principales.

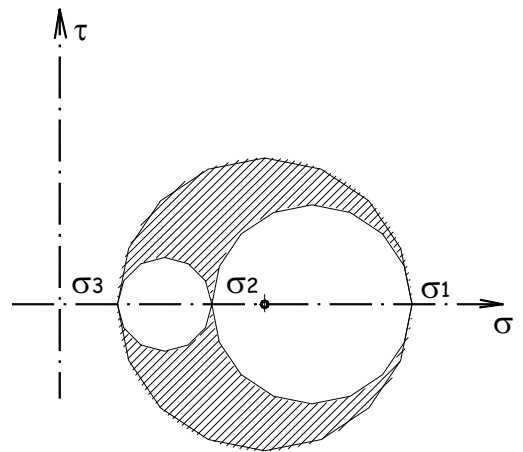


Fig. 3.12

Un hecho importante a destacar es el que se observa en el círculo de la fig. 3.13. Allí tenemos un estado triple donde $\sigma_3=0$, y puede verse que la tensión tangencial máxima resulta mayor que la que correspondería al estado plano correlacionado con las tensiones principales σ_1 y σ_2 exclusivamente.

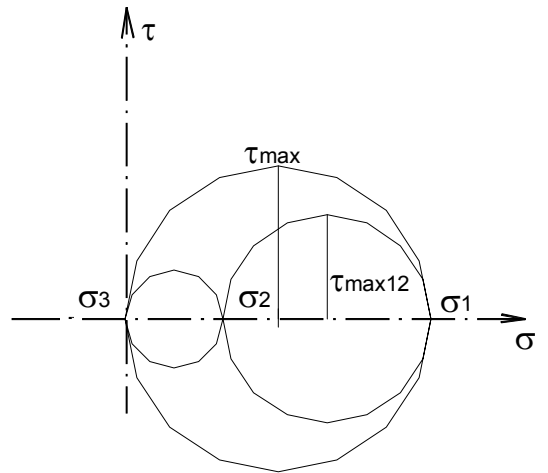


Fig.3.13

3.2.a Estado de tensiones en el espacio

Consideremos un punto A interior de un cuerpo sometido a cargas. En dicho punto aplicamos una terna de ejes ortogonales x, y, z . Suponemos conocidos los valores de las componentes de las tensiones σ y τ que actúan en los planos definidos por dichos ejes.

$$\text{plano } \perp x \begin{cases} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{cases} \quad \text{plano } \perp y \begin{cases} \sigma_y \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yz} \end{cases} \quad \text{plano } \perp z \begin{cases} \sigma_z \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{cases}$$

Supongamos ahora un plano inclinado respecto de los ejes adoptados, que contiene al punto A. El trazado del plano oblicuo lo haremos desplazado con el objeto de facilitar la representación gráfica. Generamos un tetraedro sobre el cual haremos nuestras consideraciones. Al plano inclinado lo definiremos por su normal η que forma ángulo $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$, con respecto a los ejes. Los cosenos directores de dicha normal los designaremos: l, m, n .

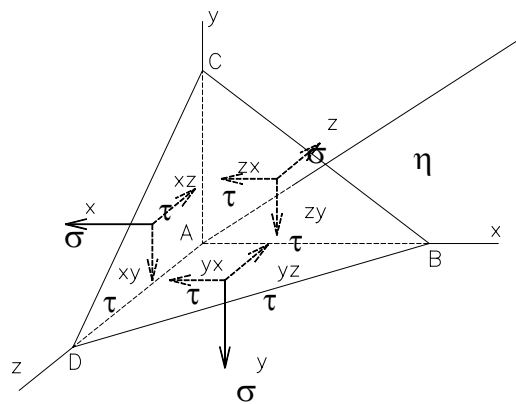
$$\mathbf{h} \begin{cases} \cos \alpha_x = l \\ \cos \alpha_y = m \\ \cos \alpha_z = n \end{cases}$$

$$\text{Sup } \triangle BCD = \Omega$$

$$\text{Sup } \triangle ACD = \Omega l$$

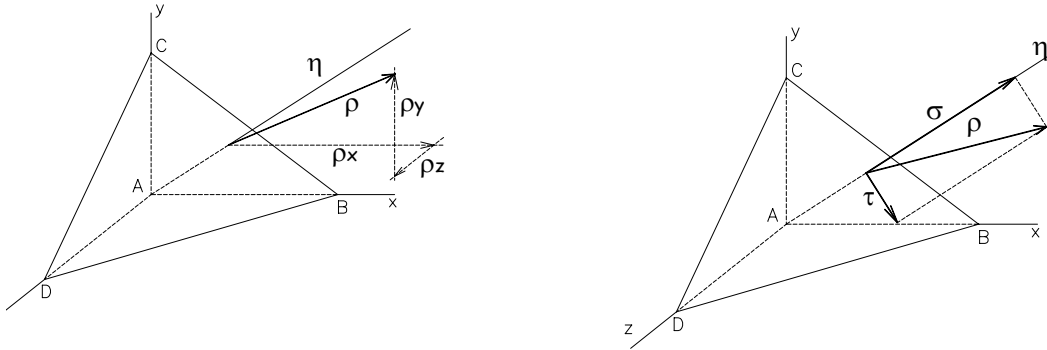
$$\text{Sup } \triangle ABD = \Omega m$$

$$\text{Sup } \triangle ABC = \Omega n$$



El problema que analizaremos a continuación consiste en establecer las relaciones que permitan vincular la tensión total ρ , y sus componentes σ y τ que actúan sobre la superficie inclinada con las tensiones existentes en los planos definidos por la terna de ejes adoptados.

Primeramente consideremos la tensión ρ descompuesta en tres componentes paralelas a los ejes coordenados: ρ_x, ρ_y, ρ_z .



Por condición de equilibrio del tetraedro debe cumplirse:

$$\sum F_x \rightarrow \rho_x \Omega - \sigma_x \Omega_x - \tau_{xy} \Omega_y - \tau_{zx} \Omega_z = 0$$

$$\sum F_y \rightarrow \rho_y \Omega - \tau_{xy} \Omega_x - \sigma_y \Omega_y - \tau_{zy} \Omega_z = 0$$

$$\sum F_z \rightarrow \rho_z \Omega - \tau_{xz} \Omega_x - \tau_{yz} \Omega_y - \sigma_z \Omega_z = 0$$

Operando queda:

$$\rho_x = \sigma l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n$$

$$\rho_y = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \quad (**)$$

$$\rho_z = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n$$

Expresiones que vinculan las tensiones conocidas, que actúan en las caras ortogonales, con la tensión incógnita ρ .

Conocidas estas componentes podemos hallar el valor de $\rho = \sqrt{\rho_x^2 + \rho_y^2 + \rho_z^2}$.

También podemos calcular la componente de tensión normal: $\sigma = \rho_x l + \rho_y m + \rho_z n$, a su vez la componente tangencial: $\tau = \sqrt{\rho^2 - \sigma^2}$.

Se puede apreciar que al cambiar la orientación del plano considerado, varía la tensión resultante aplicada al mismo, y consecuentemente sus componentes. Entre los infinitos planos que pasan por ese punto, habrá planos para los cuales la componente $\tau = 0$. Para esas direcciones la tensión normal σ adquiere sus valores algebraicos máximos y mínimos (en nuestra materia lo demostramos para el caso de estado plano de tensiones).

Cuando $\rho \equiv \sigma$, tales planos se denominan planos principales, las tensiones que ocurren en los mismos tensiones principales y las direcciones de estas últimas, direcciones principales.

En este caso:

$$\rho_x = \sigma l \quad \rho_y = \sigma m \quad \rho_z = \sigma n$$

Reemplazando en (**) y agrupando

$$\mathbf{0} = (\sigma_x - \sigma)\mathbf{l} + \tau_{yx}\mathbf{m} + \tau_{zx}\mathbf{n}$$

$$\mathbf{0} = \tau_{xy}\mathbf{l} + (\sigma_y - \sigma)\mathbf{m} + \tau_{zy}\mathbf{n}$$

$$\mathbf{0} = \tau_{xz}\mathbf{l} + \tau_{yz}\mathbf{m} + (\sigma_z - \sigma)\mathbf{n}$$

Los valores de l , m y n que satisfacen el sistema de ecuaciones, nos dan posiciones de planos para los cuales las tensiones son principales. La condición para que l , m y n tengan valores distintos de cero, es que el determinante del sistema sea nulo.

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante y reemplazando los datos conocidos (σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz}) se obtiene una ecuación de tercer grado en σ , que nos dará tres valores de tensión normal: σ_1 , σ_2 , σ_3 , que son las tensiones principales en el espacio.

Es decir que en el punto A, existirán tres direcciones para las cuales en sus planos respectivos solo se producen tensiones normales.

Las direcciones principales son normales entre si y σ toma valores que son: máximo, mínimo y el restante intermedio.

En materias de cursos superiores se ampliará el tratamiento de este tema.

