4

TEORIAS DE FALLAS O DE COMPARACIÓN

4.1 CONCEPTOS COMPLEMENTARIOS SOBRE ENERGIA ESPECIFICA DE DEFORMACION

4.1.1 Energía total de deformación

La energía específica de deformación en un punto de un sólido sujeto a un estado de tensión cualquiera, es una función tanto de las tensiones actuantes como de las deformaciones. En los capítulos anteriores ya hemos analizado el valor de la energía de deformación por unidad de volumen para algunos casos simples:

$$\textbf{Esfuerzo axial:} \quad u = \frac{1}{2}\sigma\,\varepsilon$$

$$\textbf{Corte puro:} \quad u = \frac{1}{2}\tau\,\gamma$$

Las expresiones anteriores surgen de la consideración del comportamiento del material como elástico lineal, es decir, que vale la Ley de Hooke.

En el caso más general de un estado triple tendremos que considerar la energía específica de deformación correspondiente a cada tensión.

$$u = \frac{1}{2}\sigma_x\,\varepsilon_x + \frac{1}{2}\sigma_y\,\varepsilon_y + \frac{1}{2}\sigma_z\,\varepsilon_z + \frac{1}{2}\tau_{xy}\,\gamma_{xy} + \frac{1}{2}\tau_{xz}\,\gamma_{xz} + \frac{1}{2}\tau_{yz}\,\gamma_{yz}$$

$$u = \frac{1}{2}\sigma_x\left\{\frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right]\right\} + \frac{1}{2}\sigma_y\left\{\frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right]\right\} +$$

$$+\frac{1}{2}\sigma_z\left\{\frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right]\right\} + \frac{1}{2}\tau_{xy}\frac{\tau_{xy}}{G} + \frac{1}{2}\tau_{xz}\frac{\tau_{xz}}{G} + \frac{1}{2}\tau_{yz}\frac{\tau_{yz}}{G} \tag{4.1}$$

$$u = \frac{1}{2E}\left[\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2\right) - 2\mu\left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z\right)\right] + \frac{1}{2G}\left[\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2\right]$$

En el caso particular de un estado doble, la expresión anterior se reduce a la siguiente:

$$u = \frac{1}{2E}\left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\mu\,\sigma_x\sigma_y\right] + \frac{1}{2G}\tau_{xy}^2 \tag{4.2}$$

y en el estado lineal

$$u = \frac{1}{2E}\sigma_x^2 \tag{4.3}$$

4.1.2 Relación entre las constantes elásticas

4.1.2.1 Relación entre E y G

Si en un cuerpo sometido a tensiones consideramos un elemento diferencial en una determinada posición, la energía de deformación por unidad de volumen correspondiente al mismo deberá mantenerse se la suponemos rotado.

Si tenemos un prisma elemental sometido a corte puro, sabemos que a 45º de esa posición nos encontraremos en el elemento sometido a tensiones de tracción y compresión, las que en valor absoluto

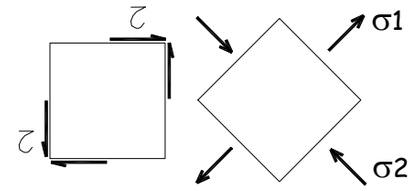
serán iguales entre sí e iguales e la tensión tangencial. Si evaluamos la energía de deformación por unidad de volumen en ambos casos obtendremos:

$$u = \frac{1}{2}\frac{\tau^2}{G}$$

$$u = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\,\mu\,\sigma_1\sigma_2\right] = \frac{1}{2E}\left[2\tau^2 + 2\mu\tau^2\right]$$

$$u = \frac{1+\mu}{E}\tau^2 = \frac{1}{2G}\tau^2 \quad \rightarrow \quad \frac{1+\mu}{E} = \frac{1}{2G}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \qquad (4.4)$$



$|\sigma_1| = |\sigma_2| = |\tau|$ Fig. 4.1

De esta manera hemos encontrado la relación existente entre E, G, y μ, relación de la que ya habíamos hablado anteriormente.

4.1.2.2 Relación entre módulos E y K

Consideramos un cubo inicialmente de lados unitarios, sometido a tensiones normales σ_x, σ_y, σ_z.

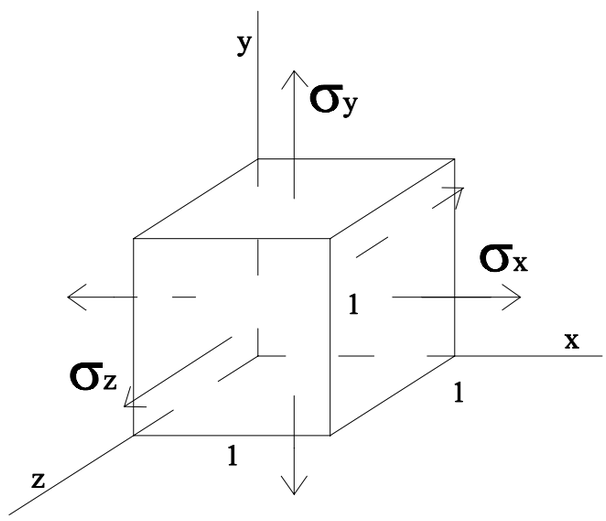


Fig. 4.2

La longitud final de cada lado del cubo será:

lx = (1 + εx)
ly = (1 + ε_y)
lz = (1 + ε_z)

Volumen final **Vf = (1 + ε_x) (1 + ε_y) (1 + ε_z)**

Por Ser ε_i valores pequeños, se desprecian los términos de productos de 2º y 3º orden:

Vf = 1 + ε_x + ε_y + ε_z

Calculando la deformación específica volumétrica

$$\varepsilon_v = \frac{V_f - V_i}{V_i} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

Reemplazando los ε_i en función de las tensiones normales:

$$\varepsilon_v = \frac{1}{E}\left[(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)(1 - 2\mu)\right]$$

Para el caso particular en que $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma p$ (Estado de tensión hidrostática)

$$\varepsilon_v = 3\frac{\sigma p}{E}(1 - 2\mu) = \text{ctte} \times \sigma p$$

Anteriormente llamamos K a la constante que vincula a la tensión con la deformación específica volumétrica.

$$\sigma p = K \cdot \varepsilon_v \rightarrow K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$$ módulo de elasticidad volumétrico

Como $\varepsilon \neq 0$, el valor entre paréntesis: $(1 - 2\mu) > 0$, o sea, $\mu < 0{,}5$

4.1.3 Energía por variación de volumen y por variación de forma

La energía específica de deformación puede considerarse como respuesta de dos partes:

$$u = u_V + u_F \tag{4.5}$$

u_v = energía necesaria para producir el cambio de volumen del elemento diferencial infinitésimo considerado.
u_F = energía que origina el cambio de forma o distorsión del elemento, también llamada "energía de distorsión".

Ya hemos indicado que las distorsiones angulares no provocan cambio de volumen, solo de forma. Por otro lado, las deformaciones especificas producen cambios de volumen y forma.

De la expresión correspondiente a "u" vamos a separar la parte inherente a las tensiones tangenciales y la que depende de las tensiones normales.

$$u_\tau = \frac{1}{2G}\left[\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2\right] = \frac{(1+\mu)}{E}\left[\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2\right] \tag{4.6}$$

$$u_\tau = \frac{1}{2E}\left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2\mu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z)\right] \tag{4.7}$$

Consideramos a continuación un elemento sometido exclusivamente a tensiones normales σ_x, σ_y, σ_z y llamemos:

$$\sigma_p = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \tag{4.8}$$

En la figura 4.3 hemos expresado este caso como suma de los dos estados allí indicados.

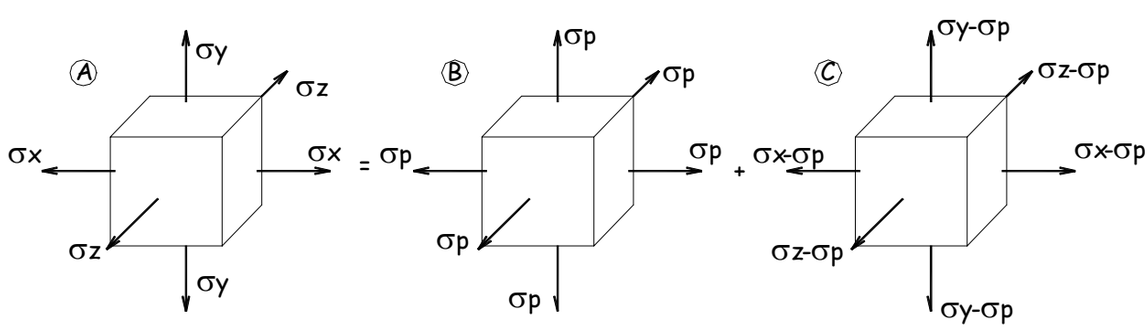


Fig. 4.3

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \\
&\varepsilon_{VB} = 3\varepsilon_p = \frac{3}{E}\left[\sigma_p - 2\mu\,\sigma_p\right] = \frac{3(1-2\mu)}{E}\sigma_p \\
&\varepsilon_{VC} = \frac{1}{E}\left[(\sigma_x - \sigma_p) - \mu(\sigma_Y + \sigma_Z - 2\sigma_p)\right] + \frac{1}{E}\left[(\sigma_Y - \sigma_P) - \mu(\sigma_X + \sigma_Z - 2\sigma_P)\right] + \\
&+ \frac{1}{E}\left[(\sigma_Z - \sigma_P) - \mu(\sigma_X + \sigma_Z - 2\sigma_P)\right] =
\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\varepsilon_{VC} = \frac{1-2\mu}{E}\left[\underbrace{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}_{3\sigma_p} - 3\sigma_p\right] = 0 \;\rightarrow\; \varepsilon_{VB} = \varepsilon_{VA} \tag{4.9}$$

De la ecuación 4.9 puede verse que el estado C no presenta cambio de volumen. El estado B, donde todas las caras están sometidas a la misma tensión, se denomina "estado de tensión hidrostática".

$$\begin{aligned} u_V &= u_{VB} = \frac{1}{2E}\left[3\sigma_p^2 - 6\mu\,\sigma_p^2\right] = \frac{3(1-2\mu)}{2E}\left[\frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}\right]^2 \\ u_V &= \frac{(1-2\mu)}{6E}\left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2\sigma_x\sigma_y + 2\sigma_x\sigma_z + 2\sigma_y\sigma_z\right] \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned} u_F &= u - u_V \\ u_F &= \frac{1}{2E}\left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu\left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z\right)\right] - \\ &\quad - \frac{(1-2\mu)}{6E}\left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2\sigma_x\sigma_y + 2\sigma_x\sigma_z + 2\sigma_y\sigma_z\right] \\ u_F &= \frac{(1-2\mu)}{3E}\left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_x\sigma_z - \sigma_y\sigma_z\right] \end{aligned} \tag{4.11}$$

Para el caso general donde además de tensiones normales existen tensiones tangenciales, resulta:

$$u_F = \frac{(1-2\mu)}{3E}\left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_x\sigma_z - \sigma_y\sigma_z + 3\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2\right)\right] \tag{4.12}$$

La importancia de la energía por cambio de forma estriba en que a ella se le atribuye la fluencia, o sea, el escurrimiento plástico.

4.2 TEORIAS DE RESISTENCIA

4.2.1 Concepto

En primera instancia vamos a tratar de establecer un concepto generalizado de rotura. Podemos decir que un material ha alcanzado la rotura cuando llega a un límite de solicitación tal que las tensiones poseen un valor para el cual el material ya no es utilizable para el fin al que lo destina. En el caso de un material frágil prácticamente puede decirse que la rotura coincide con la rotura física, mientras que en el caso de un material dúctil, la rotura está en correspondencia con el límite de fluencia, ya que para este material allí empiezan las grandes deformaciones.

Hasta este momento hemos estudiado algunos problemas de resistencia de materiales muy sencillos, tales como el estado tensional lineal (tracción o compresión), el estado de corte puro o el efecto de torsión simple. El planteo de las condiciones de resistencia en estos casos no representa no presenta mayores dificultades. En efecto, si consideramos el caso de una barra traccionada, sabemos que es suficiente que la tensión normal máxima no sea mayor que la tensión admisible para que la resistencia esté asegurada. Por otro lado, la tensión admisible se obtiene a partir del límite de fluencia a del límite de rotura, valores éstos que se determinan experimentalmente.

Volviendo nuevamente a pensar en la barra traccionada, podemos advertir que la rotura física puede correlacionarse con el logro de una determinada tensión normal, y sin investigar demasiado sobre las causas físicas reales de colapso, es decir, aún sin conocer exactamente los mecanismos físicos que hacen que se produzca el escurrimiento plástico o la separación de las partículas, podemos poner énfasis en el hecho de haber alcanzado esa tensión como causa aparente de la rotura.

Mas adelante estudiaremos ciertos problemas donde nos encontraremos con estados tensionales muy complicados, en general dobles o triples, para los cuales ya no es tan simple establecer una causa aparente de rotura. Podemos preguntarnos, por ejemplo, bajo que circunstancia sobreviene el colapso de una barra sometida simultáneamente a tracción y torsión. Si la barra estuviese solicitada solamente por tracción o por torsión, el problema se resolvería controlando las tensiones normales en el primer caso o las tangenciales en el segundo, pero la acción simultánea de ambos efectos conduce a la rotura bajo tensiones inferiores a las alcanzadas para cada caso en forma individual. En otras palabras, la tensión normal última para esta situación es menor que la alcanzada en el ensayo de tracción simple, y tanto menor cuanto mayor es el efecto de torsión. La comparación de la tensión normal y de la tangencial en forma separada, con los valores obtenidos de los ensayos de tracción y de corte simple, podría

conducir a errores muy graves en cuanto a la determinación de la capacidad portante de la pieza. En algunos casos especiales, la combinación de estados tensionales simples, dentro de ciertos rangos de carga, mejora la capacidad resistente del material. No obstante, esto es bastante circunstancial y lo dejaremos de lado en este curso.

De acuerdo a lo que hemos mencionado recientemente, la manera más segura para determinar la capacidad resistente de un material parecería ser la de ensayar una probeta sometida a un estado tensional similar al de estudio. Sin embargo, esto es prácticamente imposible dado que puede presentarse numerosas combinaciones de tensiones, y cada una de ellas exigiría un nuevo ensayo. Al mismo tiempo, la realización de estos ensayos requiere del empleo de maquinas y equipos muy complicados.

Si retomamos el caso de la barra sometida a tracción y torsión, el hecho de que las tensiones últimas sean menores que las alcanzadas en los estados simples, nos hace pensar en que la causa de la rotura debe atribuirse a ciertos motivos tales como: alcanzar las máximas tensiones principales, o que se logren las máximas deformaciones especificas, o que se llegue al límite de la energía de deformaciones que puede soportar el material, u otra causa cualquiera donde aparezcan involucradas todas las tensiones. En el caso de la barra traccionada esto no lo habíamos advertido por tratarse de un estado tensional lineal.

Las teorías de Rotura tratan de elaborar hipótesis tendientes a establecer las causas primordiales de la producción de los mecanismos de colapso de los materiales. Aún cuando estas hipótesis pretenden ser lo más exactas posibles, en general no son demostrables y solo pueden justificarse experimentalmente. Por otro lado, no todos los materiales rompen por los mismos motivos, de manera que las distintas teorías sólo son aplicables a determinados casos.

Una teoría podría decir, por ejemplo, que un material llega a la rotura cuando en un punto cualquiera del mismo se alcanza la máxima distorsión angular que éste admite. Esto significa que para asegurar la resistencia de una pieza sometida a un estado tensional cualquiera debería calcularse la máxima distorsión angular y compararla con la admisible.

Lo planteado en el último párrafo nos presenta dos inconvenientes. Por un lado, tendría que hacer algún ensayo donde medir la distorsión angular de rotura, lo cual no es fácil; y por el otro, dado que en la Resistencia de Materiales usualmente calculamos tensiones, la determinación de las distorsiones angulares nos haría más extenso y complicado el cálculo.

En la práctica, las dificultades recientemente mencionadas se resuelven de una manera muy simple:

a) En primera instancia, sólo se realizan ensayos de tracción, ya que son los más fáciles de ejecutar, y además porque cualquier causa que sea establecida como generadora de la rotura puede correlacionarse en forma muy sencilla con la tensión normal última.

Si pensamos en el ejemplo propuesto y suponemos un comportamiento perfectamente elástico del material, tendremos:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{max}}{2} \qquad \text{para un estado de tracción simple}$$

$$\gamma_{max} = \frac{\tau_{max}}{G} = \frac{\sigma_{max}}{2G} \tag{4.13}$$

Podemos ver entonces que midiendo la tensión normal de rotura podemos determinar la distorsión angular de rotura, la que según la teoría que estamos admitiendo, será valida para cualquier estado tensional.

b) En cuanto al tema de no complicar el cálculo, ni tener que abandonar el criterio de trabajo basado en la verificación de tensiones, surge el concepto de la denominada "Tensión de Comparación", definiéndose como tal a aquella que actuando sobre una barra traccionada, origina en ésta un estado tensional igualmente peligroso que el estado tensional real.
La idea de trabajar con una tensión de comparación o equivalente proviene de lo siguiente: si se evalúa la causa que según la teoría provoca la rotura, tanto en el estado real como en el caso de la barra traccionada, las expresiones obtenidas en ambas circunstancias deberán ser iguales, y de esta igualdad puede obtenerse una expresión que relaciona a la tensión de la barra con el estado real.

Veamos a continuación como obtener la tensión de comparación para el ejemplo que estamos analizando. Para ello vamos a suponer que le estado tensional real es un estado plano:

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \qquad \text{para un estado plano de tensiones}$$

$$\gamma_{max} = \frac{1}{2G}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \tag{4.14}$$

Finalmente, dado que las expresiones 4.13 y 4.14 deben ser iguales:

$$\sigma_{max} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sigma_c \tag{4.15}$$

Por otro, siendo que la barra llega a la rotura bajo una cierta tensión (σ_F, σ_R), y debido a que la pieza dimensionada con el material en estudio debe cumplir su cometido con seguridad, entonces:

$$\sigma_c \leq \sigma_{adm} \tag{4.16}$$

Al comienzo de este artículo habíamos planteado el ejemplo de una barra sometida simultáneamente a torsión y tracción, y dijimos que la misma llegaba a la rotura con tensiones normales y tangenciales minores que cuando actuaban la tracción y la torsión separadamente. Si admitimos que la barra se construye con un material que responde a la teoría de rotura que también hemos supuesto como ejemplo, y suponemos:

$$\sigma = 0.7\,\sigma_{adm} \quad \rightarrow \quad \sigma < \sigma_{adm}$$

$$\tau = 0.7\,\tau_{adm} \quad \rightarrow \quad \tau < \tau_{adm}$$

Admitiendo además que $\tau_{adm} = 0.6\,\sigma_{adm}$
Entonces:

$$\sigma_c = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{(0.7\,\sigma_{adm})^2 + (0.7\;0.6\,\sigma_{adm})^2}$$

$$\sigma_c = \sqrt{1.1956}\,\tau_{adm}$$

$$\sigma_c \cong 1.09\,\sigma_{adm} > \sigma_{adm}$$

De esta última expresión puede verse que la pieza estaría en malas condiciones a pesar que tanto σ como τ están por debajo de los valores permitidos.

4.2.2 Enunciado de varias teorías

En lo que sigue vamos a enunciar algunas teorías más conocidas. Solamente daremos las expresiones de las tensiones de comparación correspondientes a los estados dobles, para el caso general y algunas situaciones particulares, según indicamos a continuación:

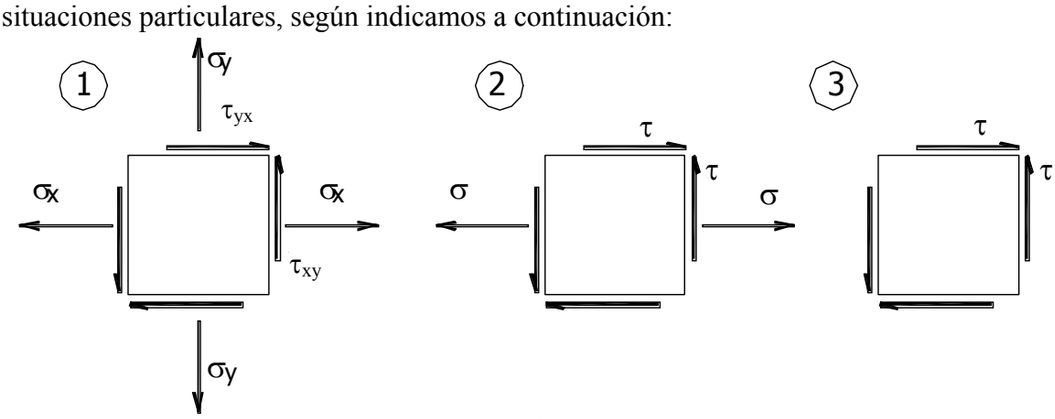


Fig. 4.4

No todas las teorías que veremos se utilizaran en la práctica, sin embargo resulta preferible analizar varias de ellas para tener una noción más claras del alcance de las mismas.

I - Teoría de la máxima tensión normal (Rankine)

"La rotura de un cuerpo ocurre cuando en un punto de un sólido solicitado por un estado cualquiera de tensión, la máxima tensión normal alcanza un valor igual a la máxima tensión normal que ocurre en ensayo de tracción simple".

En un estado plano cualquiera la máxima tensión normal corresponde a la mayor tensión principal. En un estado de tracción simple la tensión normal ya es el valor máximo, en consecuencia:

1) $$\sigma_c = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\,\tau_{xy}^2} \qquad (4.17)$$

2) $$\sigma_c = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\,\tau^2} \qquad (4.18)$$

3) $$\sigma_c = \tau \qquad (4.19)$$

En lo que respecta a los materiales frágiles, la teoría conduce a resultados satisfactorios. Para los materiales dúctiles, los resultados no condicen con las experiencias; en efecto, para el caso de corte puro esta teoría nos dice que la rotura debe acontecer cuando la tensión tangencial alcanza el valor correspondiente a la tensión de fluencia (4.19), mientras que la experiencia demuestra que la tensión tangencial de fluencia es bastante menor que el valor correspondiente a la tensión normal. En base a esto, surge que esta teoría no es aplicable a materiales dúctiles.

II – Teoría de la deformación máxima (Saint Venant)

"La rotura de un cuerpo ocurre cuando la deformación específica en la dirección de la máxima tensión principal alcanza el valor de la máxima deformación específica que corresponde a la rotura por tracción simple".

En un estado plano cualquiera:

$$\varepsilon_{max} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{max} - \mu\,\sigma_{min}\right]$$

$$\varepsilon_{max} = \frac{1}{E}\left[\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2} - \mu\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2}\right)\right]$$

$$\varepsilon_{max} = \frac{1}{E}\left[\frac{(1-\mu)}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{(1-\mu)}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2}\right]$$

Mientras que en el estado de tracción simple: $\varepsilon_{max} = \frac{\sigma_c}{E}$, luego:

1) $$\sigma_c = \frac{(1-\mu)}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{(1-\mu)}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\,\tau_{xy}^2} \qquad (4.19)$$

2) $$\sigma_c = \frac{(1-\mu)}{2}\sigma + \frac{(1-\mu)}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\,\tau^2} \qquad (4.20)$$

3) $$\sigma_c = (1-\mu)\tau \qquad (4.21)$$

Como puede verse, las expresiones anteriores dependen del coeficiente de Poisson, y en consecuencia varían con el material.

Esta teoría presenta en mejoramiento de la primera con respecto a los materiales frágiles pero tampoco sirve par materiales dúctiles.

III – Teoría de la máxima tensión tangencial (Guest – Coulomb)

"La rotura de un material comienza cuando en un punto cualquiera de mismo, sujeto a un estado múltiple de tensiones, la máxima tensión de corte alcanza el valor de la máxima tensión de corte que ocurre en un ensayo de tracción simple"

En un estado plano cualquiera:

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\,\tau_{xy}^2}$$

Mientras que en el estado de tracción simple $\tau_{max} = \frac{\sigma_c}{2}$, luego:

1) $$\sigma_c = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\,\tau_{xy}^2} \qquad (4.23)$$

2) $$\sigma_c = \sqrt{\sigma^2 + 4\,\tau^2} \qquad (4.24)$$

3) $$\sigma_c = 2\,\tau \qquad (4.25)$$

Esta teoría conduce a resultados aceptables para ciertos materiales dúctiles, en especial cuando las tensiones tangenciales son preponderantes. Experimentalmente se comprueba que $\tau_F \cong 0.57\sigma_F$, y según esta teoría $\tau_F = 0.5\,\sigma_F$

IV – Teoría de la máxima energía de deformación (Beltrami – Haigh – Huber)

"En un punto cualquiera de un sólido sujeto a un estado dado de tensión, el comienzo de la plastificación ocurre cuando la energía total de deformación por unidad de volumen, correspondiente al estado de tensión dado, es igual a la energía total de deformación unitaria que corresponde a la solicitación por tracción simple, para el límite de fluencia".

En un estado plano arbitrario:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2E}\left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\mu\,\sigma_x\sigma_y + 2(1+\mu)\tau_{xy}^2\right]$$

Mientras que para el estado de tracción simple, $\mathbf{u} = \frac{1}{2E}\sigma_c^2$, con lo que:

1) $$\sigma_c = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\mu\,\sigma_x\sigma_y + 2(1+\mu)\tau_{xy}^2} \qquad (4.26)$$

2) $$\sigma_c = \sqrt{\sigma^2 + 2(1+\mu)\tau^2} \qquad (4.27)$$

3) $$\sigma_c = \sqrt{2(1+\mu)}\,\tau \qquad (4.28)$$

Los ensayos de Bridgman han demostrado la inexistencia de esta teoría. La naturaleza da un ejemplo de esto, pues si consideramos los trozos de roca en el fondo del mar, éstos están sometidos a tensiones normales muy altas, que producen una energía de deformación mucho mayor que la alcanzada en un ensayo de tracción, y sin embargo permanecen intactos.

V – Teoría de la máxima energía de distorsión (Huber – Hencky – Von Mises)

"En un cuerpo sujeto a un estado cualquiera de tensión, el comienzo de la fluencia en un punto del cuerpo ocurre solamente cuando la energía de distorsión por unidad de volumen correspondiente a dicho estado de tensión, alcanza el valor de la energía de distorsión de la solicitación por tracción simple, cuando se alcanza el límite de fluencia".

Para el estado doble de tensión:

$$\mathbf{u_F} = \frac{(1+\mu)}{3E}\left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2\right]$$

Mientras que en el estado de tracción simple $\mathbf{u_F} = \frac{(1+\mu)}{3E}\sigma_c^2$, con lo que:

1) $$\sigma_c = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\,\tau_{xy}^2} \qquad (4.29)$$

2) $$\sigma_c = \sqrt{\sigma^2 + 3\,\tau^2} \qquad (4.30)$$

3) $$\sigma_c = \sqrt{3}\,\tau \qquad (4.31)$$

Esta teoría se adapta perfectamente a los materiales dúctiles, ya que según ésta $\tau_F \cong 0.577\,\sigma_F$, valor muy próximo a los obtenidos en ensayos. Para el caso particular de tensión hidrostática la energía de distorsión es nula y no hay fluencia, por lo que se interpreta que este fenómeno esta íntimamente ligado a la energía de distorsión.

4.2.3 Teoría de Mohr

"Los límites de fluencia y de rotura de un material quedan definidos por las tensiones que desarrollan en los planos de deslizamientos y fractura. La tensión tangencial en el plano de fractura o escurrimiento alcanza para el estado límite un valor máximo, que es función de la correspondiente tensión normal y de las características del material".

Supongamos un punto sujeto a un determinado estado de tensión y hagamos crecer las tensiones principales σ_1 y σ_2 hasta alcanzar la rotura si se trata de un material frágil, o el comienzo de la fluencia si es dúctil. Alcanzando el estado de rotura dibujemos la circunferencia de Mohr. Repitiendo el concepto para otros estados de tensión obtendremos toda una familia de circunferencias que corresponden a estados de rotura. La curva envolvente se denomina "envolvente de Mohr o curva de resistencia intrínseca".

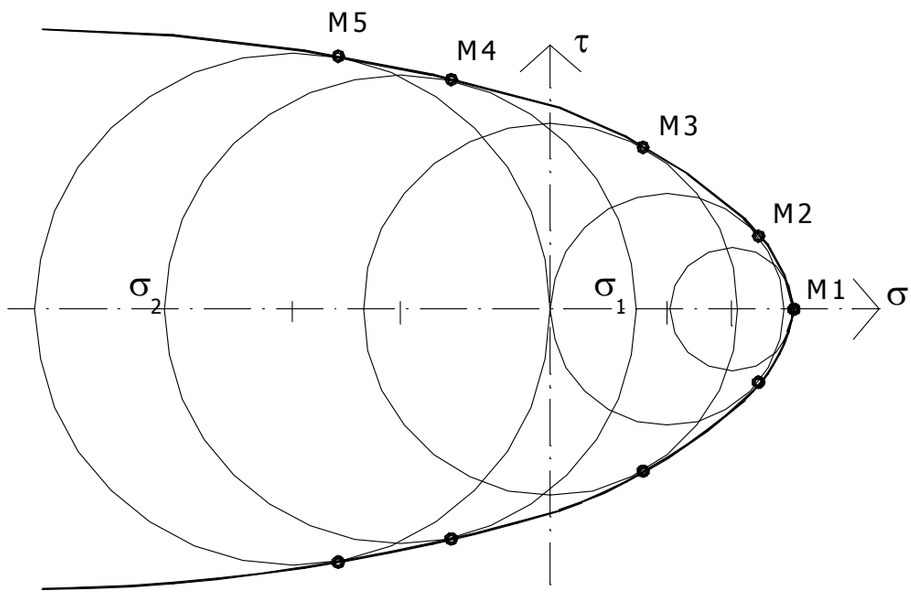


Fig. 4.6

Dado un estado de tensión, el mismo será determinante de la rotura o fluencia si la circunferencia de Mohr corta la curva o es tangente a la misma.

La dificultad de esta teoría radica en que la curva intrínseca puede conocerse en forma experimental. Sin embargo, tiene una ventaja importante en cuanto a que es mas general que las anteriores, siendo aplicable tanto a materiales dúctiles como frágiles, aunque responde más a las características de rotura de los últimos.

Una de las aplicaciones más importantes que tiene la teoría de Mohr es en la Mecánica de Suelos, para el estudio de la capacidad portante de los mismos.

4.2.4. Comparación gráfica de las teorías de rotura

Con el objeto de visualizar las diferencias o similitudes de resultados entre algunas de las teorías enunciadas interpretaremos las expresiones obtenidas según la representación de **Westergaard**. Para ello consideramos un elemento sometido a un estado plano dado por las tensiones principales σ_1 y σ_2. El material de referencia tiene, como tensión de rotura, la tensión σ_{fl}, que toma el mismo valor para tracción y compresión.

a) Teoría de la máxima tensión normal

$$\text{Para } \sigma_1 > \sigma_2 \text{ debe ser } \sigma_1 = \pm\,\sigma_{fl}$$

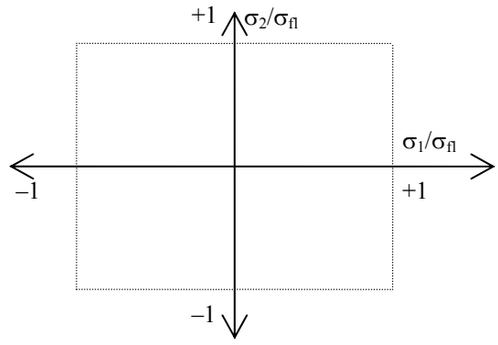
$$\text{Para } \sigma_2 > \sigma_1 \text{ debe ser } \sigma_2 = \pm\,\sigma_{fl} \qquad (4.32)$$

Adoptando un par de ejes coordenados, dónde en abscisas llevamos los valores de σ_1/σ_{fl} y en ordenadas los de σ_2/σ_{fl}, obtenemos cuatro rectas paralelas, dos al eje de abscisas y dos al de ordenadas, a los que cortan en los puntos ±1, por cuanto de las (4.32) resulta:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{fl}} = \pm 1$$

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_{fl}} = \pm 1$$

De satisfacer los resultados experimentales a esta teoría, los puntos representativos deberían coincidir (en la medida de la aproximación lógica para los resultados experimentales) con alguna de las cuatro rectas, lo que en general solo se cumple en ciertos materiales de rotura frágil.



b) Teoría de la máxima tensión tangencial

Para el estado triple de tensiones, las tensiones máximas de corte tienen las siguientes expresiones:

$$\tau_{max} = \pm\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$
$$\tau_{max} = \pm\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \qquad (4.33)$$
$$\tau_{max} = \pm\frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)$$

Para el estado de solicitaciones simple, al alcanzar la fluencia resulta:

$$\tau_{max} = \frac{\pm\sigma_{fl}}{2} \qquad (4.34)$$

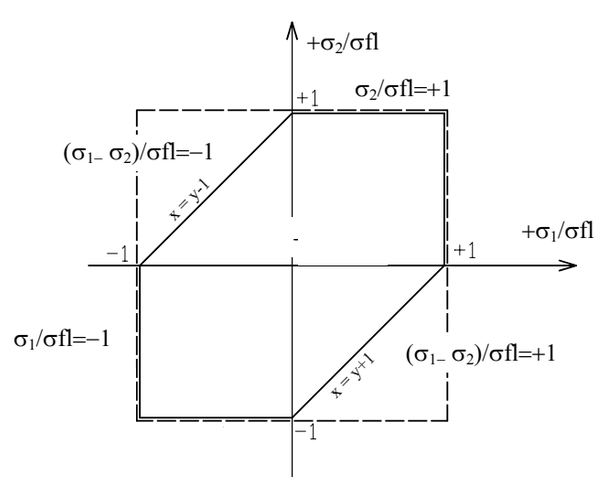
Utilizando la teoría de rotura de **Guest - Coulomb**, en un estado plano de tensiones (suponemos $\sigma_3 = 0$), las expresiones (4.33) se transforman en:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \pm\sigma_{fl}$$
$$\sigma_1 = \pm\sigma_{fl} \qquad (4.35)$$
$$\sigma_2 = \pm\sigma_{fl}$$

Entre estas tres expresiones, la elección de la que define el comienzo de la rotura depende de signo de σ_1 y σ_2. Si ambas son de signo contrario, será determinante la primera de las (4.35). En cambio si el signo es igual para ambas, lo será la ecuación que corresponda a la mayor tensión principal.

En la figura siguiente se realiza la representación de **Westergaard** correspondiente a esta teoría, que responde a las ecuaciones:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{fl}} - \frac{\sigma_2}{\sigma_{fl}} = \pm 1$$
$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{fl}} = \pm 1 \qquad (4.36)$$
$$\frac{\sigma_2}{\sigma_{fl}} = \pm 1$$



Para ciertos materiales dúctiles, y en general cuando las tensiones tangenciales son preponderantes, esta teoría conduce a resultados aceptables.

c) Teoría de la máxima energía de distorsión

Para el estado doble en función de las tensiones principales, la energía de distorsión tiene por expresión:

$$\mathbf{u_f = \frac{1+\mu}{3E}\left[\sigma^2{}_1 + \sigma^2{}_2 - \sigma_1\sigma_2\right]} \qquad (4.37)$$

Para la solicitación axil, al alcanzar la tensión σ_{fl} la energía de distorsión vale:

$$\mathbf{u_f = \frac{1+\mu}{3E}\sigma_{fl}^2} \qquad (4.38)$$

Utilizando la teoría de **Huber - Hencky - Von Misses**, igualando las expresiones anteriores y simplificando se llega a:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = \sigma_{fl}^2$$

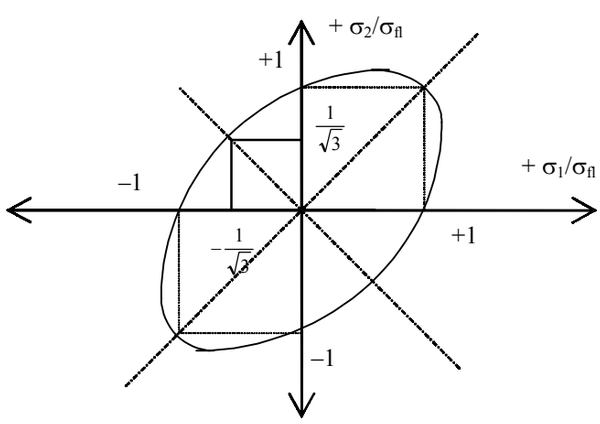
A los efectos de la representación de **Westergaard**, transformamos la expresión anterior:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{fl}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{fl}}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{fl}}\right)\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{fl}}\right) = 1$$

Ecuación que representa a una elipse cuyos ejes están inclinados a 45º respecto de los ejes coordenados. la elipse corta a los ejes coordenados en los puntos:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{fl}} = \pm 1$$

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_{fl}} = \pm 1$$



Esta teoría es la que mejor interpreta los resultados de ensayos de rotura efectuados con materiales dúctiles.