

ANALISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS POR EL METODO DE LA RIGIDEZ

Introducción

Los métodos clásicos de análisis estructural desarrollados a fines del siglo XIX, tienen las cualidades de la generalidad, simplicidad lógica y elegancia matemática. Desgraciadamente, conducían a menudo a cálculos muy laboriosos cuando se los aplicaba en casos prácticos, y en aquella época, esto era un gran defecto.

Por esta razón sucesivas generaciones de ingenieros se dedicaron a tratar de reducir el conjunto de cálculos. Muchas técnicas ingeniosas de gran valor práctico fueron apareciendo (Método de Cross), pero la mayoría de las mismas eran aplicable sólo a determinados tipos de estructuras.

La principal objeción a los primeros métodos de análisis fue que los mismos conducían a sistemas con un gran número de ecuaciones lineales, difíciles de resolver manualmente.

Con los computadores, capaces de realizar el trabajo numérico, esta objeción no tiene ahora sentido, mientras que la generalidad de los métodos permanece. Esto explica por qué los métodos matriciales deben en su tratamiento básico de las estructuras más al siglo XIX que al XX.

El empleo de la notación matricial presenta dos ventajas en el cálculo de estructuras. Desde el punto de vista teórico, permite utilizar métodos de cálculo en forma compacta, precisa y, al mismo tiempo, completamente general. Esto facilita el tratamiento de la teoría de estructuras como unidad, sin que los principios fundamentales se vean oscurecidos por operaciones de cálculo, por un lado, o diferencias físicas entre estructuras, por otro.

Desde el punto de vista práctico, proporciona un sistema apropiado de análisis de estructuras y determina una base muy conveniente para el desarrollo de programas de computación.

En contraste con estas ventajas, debe admitirse que los métodos matriciales se caracterizan por una gran cantidad de cálculo sistemático

Las virtudes del cálculo con computadora radican en la eliminación de la preocupación por las operaciones rutinarias, el ingenio necesario para preparar el modelo con que se pretende representar la realidad y el análisis crítico de los resultados.

Se debe ser consciente que sin un modelo adecuado o sin una interpretación final, el refinamiento en el análisis carece de sentido.

Método de la Rigidez

Hipótesis: Estructura lineal- Todos los movimientos y esfuerzos son funciones lineales de las cargas- Pequeñas deformaciones (ecuaciones de equilibrio en la estructura no distorsionada).

Las barras son rectas y de sección constante.

Para estudiar una estructura por el método de la rigidez, al igual que en cualquier otro problema elástico, disponemos de tres conjuntos de ecuaciones que deben cumplirse.

Ecuaciones de compatibilidad

Ecuaciones constitutivas

Ecuaciones de equilibrio

Las ecuaciones de compatibilidad relacionan las deformaciones de barras con los desplazamientos nodales. Introduciendo estas relaciones en las ecuaciones constitutivas, relacionamos las fuerzas en los extremos de barras con los desplazamientos nodales

Introduciendo estas últimas relaciones en las ecuaciones de equilibrio se obtiene un conjunto de ecuaciones de fuerzas nodales en función de desplazamientos nodales, que pueden ser consideradas como Ecuaciones de Equilibrio de la estructura en función de desplazamientos.

La resolución de este sistema de ecuaciones nos permite obtener el valor de las incógnitas (desplazamientos nodales), a partir de los cuales se obtienen las solicitaciones de las barras de la estructura, así como las reacciones.

Cuando se van a calcular las relaciones esfuerzos de extremo de barra - desplazamientos, es natural escoger un sistema de coordenadas que haga estas ecuaciones lo más sencillas posible.

Tomaremos por lo tanto como eje x el que coincide con el eje geométrico de la pieza y los ejes y y z coincidentes con los ejes principales de la sección transversal.

Tal sistema pertenece a la barra, y no depende de la orientación de la misma en la estructura y lo denominaremos sistemas de ejes locales.

Por el contrario, cuando las piezas se unen entre sí para formar la estructura, es necesario tener un sistema de coordenadas común para todos los movimientos y esfuerzos de extremo de barras para poder aplicar las condiciones de equilibrio y compatibilidad. A dicho sistema lo denominaremos sistema de ejes globales.

Dichos esfuerzos de extremos de barras y desplazamientos dependerán del tipo de estructura que estamos resolviendo, para barras de:

a) Reticulado Plano: tendremos dos desplazamientos por nudo

b) Reticulado Espacial: tres desplazamientos por nudo.

En ambos casos sólo tendremos esfuerzos normales.

c) Pórtico Plano: tres desplazamientos por nudo. (una rotación en el plano del pórtico y dos traslaciones), como solicitaciones de extremo de barra una fuerza axial, un esfuerzo de corte y un momento flector.

d) Pórtico Espacial: seis desplazamientos por nudo, tres traslaciones y tres rotaciones. como solicitaciones de extremo de barra una fuerza axial, dos esfuerzos de corte dos momentos flectores y un momento torsor.

e) Emparrillado de vigas: tres desplazamientos nodales (un corrimiento normal al plano de la grilla) y dos rotaciones alrededor de los ejes contenidos en el plano mencionado). Los esfuerzos son un cortante y dos momentos (un torsor y un flector).

Método de la Rigidez utilizando una computadora

Una de las características más importantes del método de la rigidez es la forma en que las propiedades elásticas de las piezas, y su orientación dentro de la estructura, son introducidas en el cálculo antes de que se efectúe ninguna consideración sobre el equilibrio o la compatibilidad de los nudos.

Esto nos permite establecer relaciones entre las fuerzas de extremo de barras y los desplazamientos de nudo. Estas relaciones expresadas en forma matricial se denomina o conforma la *matriz de rigidez de barra*.

Al considerar la interrelación de cada barra con las demás se obtiene un sistema global de ecuaciones que define el comportamiento de toda la estructura y nos conduce a la solución del problema.

Podemos considerar seis etapas fundamentales en la solución de un problema:

- 1) Identificación estructural
- 2) Cálculo de la matriz de rigidez de barra y del vector de cargas nodales equivalentes
- 3) Cálculo de la matriz de rigidez global y del vector de cargas global de la estructura.
- 4) Introducción de las condiciones de borde
- 5) Solución del sistema de ecuaciones
- 6) Cálculo de solicitaciones en los extremos de barras y reacciones nodales.

Identificación estructural.

Esta etapa consiste en definir a través de números y datos las barras de la estructura.

a) Definir un sistema de ejes globales para la estructura. Las coordenadas de los nudos se refieren a dicho sistema.

b) Conectividad de los elementos, identificando para cada barra el nudo inicial y el final. A cada barra está asociado un sistema de ejes locales al cual se refieren todas las dimensiones y características de la barra. El mismo queda definido automáticamente por el orden establecido para la numeración de los nudos de la barra.

El eje x local coincide con el eje geométrico de la barra, siendo el sentido positivo el que va del nudo inicial (nudo de menor numeración) al final (nudo de mayor numeración). Los otros ejes locales deberán coincidir con los ejes principales de Inercia de la sección transversal de la barra formando un triedro directo.

c) Propiedades de la sección transversal de cada barra. Dependiendo del tipo de estructura (reticulado, pórtico plano, pórtico espacial, emparrillado) se debe dar el área de la sección transversal, los momentos de inercia en relación a los ejes principales y la inercia a la torsión.

d) Propiedades del material. Se debe indicar, para cada barra, el módulo de elasticidad longitudinal y/o el módulo de elasticidad transversal.

e) Especificación de los vínculos: se debe indicar el nombre del nudo que tiene una o más restricciones y cuales son las mismas.

f) Descripción de la carga: se da el nombre del nudo y los componentes de globales de las cargas externas y las reacciones de empotramiento perfecto en relación a los ejes locales de la barra, si hay cargas en el tramo.

Matriz de Rigidez y Vector de Cargas Nodales Equiv.

a) Barra de reticulado plano

Consideremos una barra de reticulado plano, supongamos que la misma esté arbitrariamente orientada con relación a un sistema de ejes globales X e Y.

Supondremos que la barra es recta, de sección transversal constante y que el material responde a la ley de Hooke.

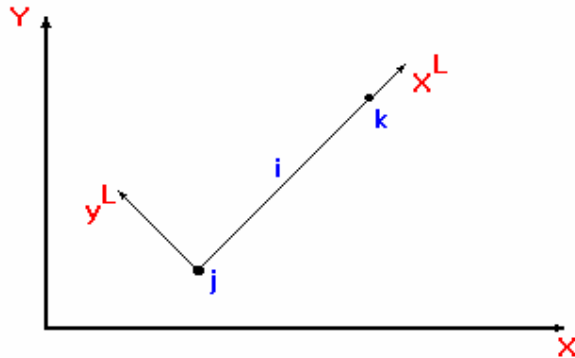


Fig. nº 1-Sistema local de ejes

En la barra i de la figura el nudo inicial es el j y el final es el k , quedando definida la orientación de los ejes locales x e y .

Considerando que no existen deformaciones iniciales y que la deformación es elástica el alargamiento de la barra i estará dado por:

$$\Delta L_i = D_{x_k}^L - D_{x_j}^L \quad (1)$$

Donde $D_{x_k}^L$ y $D_{x_j}^L$ son los desplazamientos del nudo k y j respectivamente en la dirección local x^L .

Para una barra de reticulado existe una sola sollicitación posible que es el esfuerzo axial o normal.

Suponiendo un material elástico lineal sometido a esfuerzo de tracción tendremos para los nudos j y k respectivamente:

$$F_{x_j} = -\frac{EA}{L} \Delta L_i \quad F_{x_k} = \frac{EA}{L} \Delta L_i \quad (2)$$

$$F_{x_j} = -\frac{EA}{L} (D_{x_k}^L - D_{x_j}^L) \quad (3)$$

$$F_{x_k} = \frac{EA}{L} (D_{x_k}^L - D_{x_j}^L) \quad (4)$$

Donde:

E = Módulo de elasticidad

L = Longitud de la barra

A = Area de la sección transversal de la barra.

Como en la dirección y^L para barras de reticulado no existen sollicitaciones podemos expresar las ecuaciones anteriores en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} F_{X_j} \\ F_{Y_j} \\ F_{X_k} \\ F_{Y_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{X_j}^L \\ D_{Y_j}^L \\ D_{X_k}^L \\ D_{Y_k}^L \end{bmatrix} \quad (5)$$

La expresión (5) corresponde a la ecuación matricial de la barra i en coordenadas locales y expresa las Fuerzas de extremo de barra \mathbf{F}^L en función de los desplazamientos de nudos

\mathbf{D}^L

A la Matriz que relaciona \mathbf{F}^L y \mathbf{D}^L se la denomina matriz de Rigidez de barra de reticulado en coordenadas locales \mathbf{S}^L . Expresando en forma compacta o simbólica:

$$\mathbf{F}^L = \mathbf{S}^L \cdot \mathbf{D}^L \quad (6)$$

La ecuación (6) define las fuerzas de extremo F_j y F_k para cualquier pareja de corrimientos D_j , D_k dados. Estas ecuaciones son simétricas, como podíamos esperar a partir del teorema de reciprocidad. No es posible, sin embargo, "resolverlas" y obtener los desplazamientos (D) en términos de las fuerzas (F), puesto que la matriz S es singular. Esto refleja el hecho de que la pieza puede sufrir un movimiento arbitrario de conjunto, sin afectar las fuerzas que actúan en sus extremos.

Interpretación física de la Matriz de Rigidez de barra

Si en la ecuación (5), hacemos nulos todos los desplazamientos excepto $D_{x_j}^L$ que es igual a la unidad, entonces los esfuerzos en los extremos de la barra serán los indicados en la figura

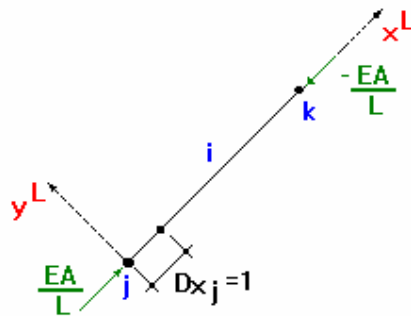


Fig.nº2 - Corrimiento unitario D_{x_j}

$$F_{X_j} = \frac{EA}{L} \quad \text{y} \quad F_{X_k} = -\frac{EA}{L} \quad (7)$$

que corresponden a la primera columna de S.

De la misma forma podemos hacer $D_{yj}^L=1$ y el resto de los corrimientos nulos, siendo en este caso nulos los esfuerzos en los extremos de barra, ya que se considera una barra doblemente articulada y pequeños desplazamientos. Por esta razón los cuatro valores de la segunda columna son nulos.

Si en cambio hacemos $D_{xk}^L=1$ y el resto de los desplazamientos nulos, los esfuerzos serán:

$$F_{X_j} = -\frac{EA}{L} \quad \text{y} \quad F_{X_k} = \frac{EA}{L} \quad (8)$$

$$F_{Y_j} = 0 \quad \text{y} \quad F_{Y_k} = 0 \quad (9)$$

que corresponden a la tercera columna de la matriz de rigidez de la barra i

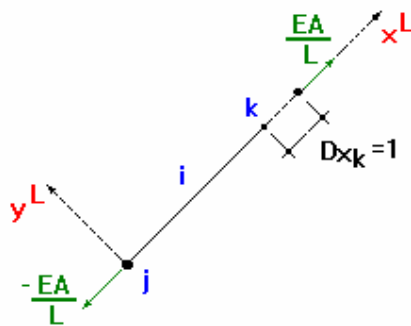
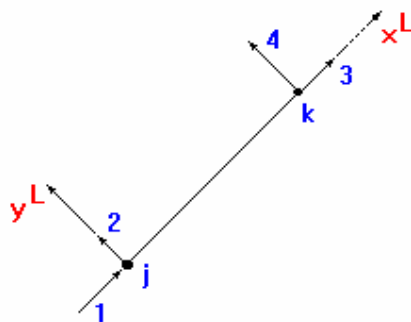


Fig. nº3 - Corrimiento unitario D_{xk}

En forma análoga se puede analizar la cuarta columna aplicando un desplazamiento $D_{yk}=1$

Asociando los desplazamientos y reacciones de nudos en las direcciones indicadas en la figura, podemos deducir el significado físico de la matriz de rigidez de la barra.



Con lo cual podemos observar que los elementos S_{ij} de la matriz de rigidez, representan las fuerzas que se generan en i al aplicar un desplazamiento unitario en j, permaneciendo fijos los restantes.

Además para un desplazamiento del nudo k obtenemos una reacción en j que es la misma que la obtenida en k para un desplazamiento en j , lo cual nos es expresado por la simetría de la matriz de rigidez.

$$\mathbf{S}^L = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

También podemos ver que una columna j está formada por las reacciones debidas a un desplazamiento unitario impuesto en la dirección j , y una fila i no es más que las reacciones en i debido a corrimientos unitarios impuestos en las distintas direcciones.

b) Barra de Pórtico Plano

En base al significado físico de los elementos de la matriz de rigidez, deduciremos la Matriz de Rigidez para una barra de Pórtico Plano en coordenadas locales.

Para este tipo de elemento corresponden tres desplazamientos por nudo (2 traslaciones y una rotación en el plano).

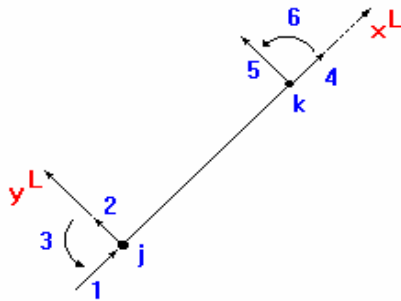


Fig. nº 4

La matriz de rigidez se obtiene dando desplazamientos unitarios de a uno por vez en las direcciones de la figura mientras los otros permanecen nulos.

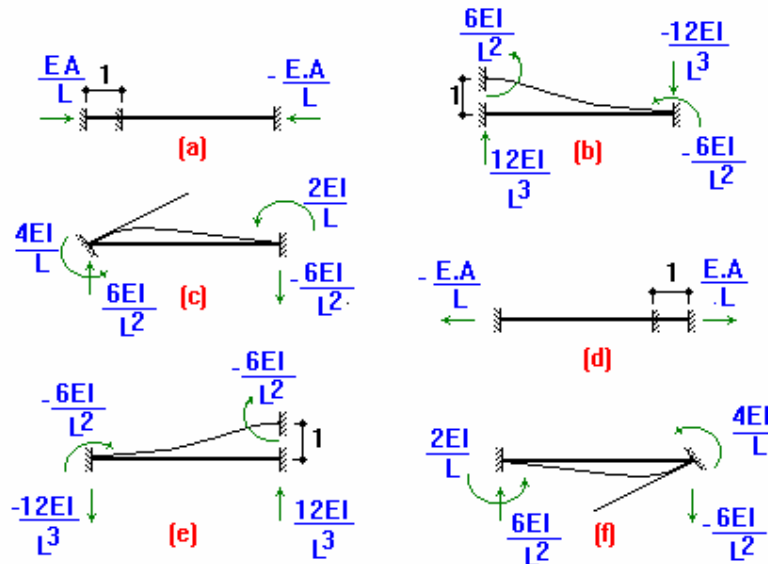


Fig. nº 5 - Desplazamientos unitarios p/ pórtico plano

Las reacciones mostradas en la figura nº5 constituyen las respectivas columnas de la matriz de rigidez de la barra de Pórtico Plano de la ecuación (11)

$$\begin{bmatrix} F_{Xj}^L \\ F_{Yj}^L \\ F_{Zj}^L \\ F_{kj}^L \\ F_{yk}^L \\ F_{Zk}^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{Xj}^L \\ D_{Yj}^L \\ D_{Zj}^L \\ D_{Xk}^L \\ D_{yk}^L \\ D_{Zk}^L \end{bmatrix} \quad (11)$$

Escribiendo en forma compacta:

$$\tilde{F}I^L = \tilde{S}I^L \cdot \tilde{D}I^L \quad (12)$$

Esta matriz relaciona las fuerzas de extremo de barra con los desplazamientos nodales en ejes locales.

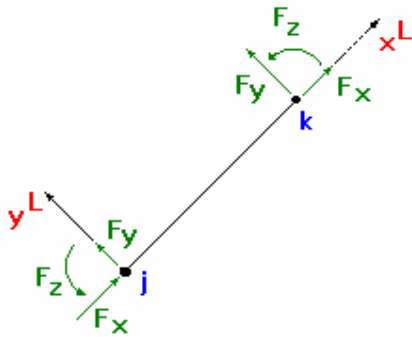


Fig.nº 6 - Solicitaciones para barra de Pórtico Plano

Cargas nodales equivalentes

Hasta ahora hemos supuesto que las cargas estaban aplicadas en los nudos, y por lo tanto existe una correspondencia biunívoca entre los puntos de aplicación de las cargas y los desplazamientos que están siendo calculados. Si esto no ocurriera, por ejemplo tuviéramos cargas en el tramo de las barras, en forma distribuida o concentrada, debemos sustituir las cargas en las mismas por un sistema de cargas equivalentes aplicadas en los nodos que produzca en la estructura el mismo efecto que las cargas originales.

Aplicando el principio de superposición, que es válido por haber supuesto que el sistema es lineal, podemos descomponer las cargas tal como se indica en la figura:

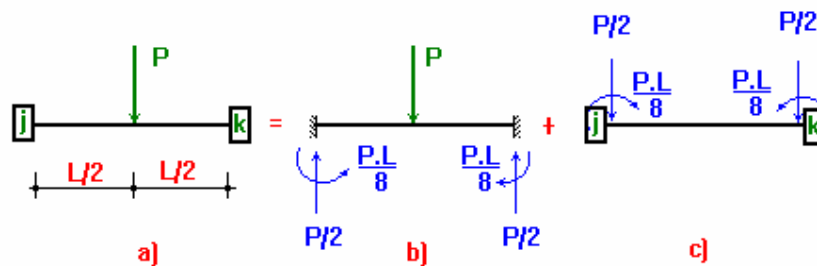


Fig.nº 7 - Barra de pórtico con cargas en el tramo

Como podemos observar las cargas, reacciones y deformaciones de la estructura a) serán equivalentes a la suma de los dos estados b) y c).

Como las deformaciones de nudos en b) son nulas, serán iguales las deformaciones de los casos c) y a). O sea que las cargas de c) producen la misma respuesta estructural en lo referente a desplazamientos de nudos que las cargas originales. Estas serán entonces las cargas equivalentes en los nudos, que no son más que las reacciones de empotramiento perfecto cambiadas de signo.

Los esfuerzos en los extremos de barra se obtienen por la suma de los casos (b) y (c).

$$\tilde{\mathbf{F}}^a = \tilde{\mathbf{F}}^b + \tilde{\mathbf{F}}^c \quad \tilde{\mathbf{D}}^a = \tilde{\mathbf{D}}^c$$

Por lo tanto a la ecuación (12) habrá que adicionarle las fuerzas de empotramiento perfecto del caso b).

$$\tilde{\mathbf{F}}\mathbf{I}^L = \tilde{\mathbf{S}}\mathbf{I}^L \cdot \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{I}^L + \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{I}^L \quad (13)$$

$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{I}^L$ representa el vector de fuerzas de empotramiento perfecto de la barra en coordenadas locales.

Rotación de ejes en el plano

Hasta el momento expresamos la matriz de rigidez del elemento barra, tanto de reticulado plano como de pórtico plano, según un sistema de ejes locales, estando los desplazamientos y esfuerzos de extremo de barra referidos a los mismos.

No obstante, según ya lo mencionamos, antes de poder aplicar las condiciones de equilibrio en los nudos y de compatibilidad de desplazamientos es necesario transformar las fuerzas y corrimientos a un sistema de ejes globales.

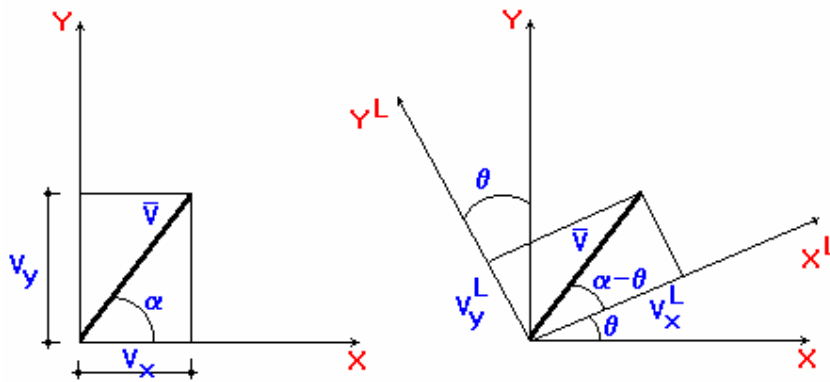


Fig. nº 8 - Rotación de un vector

Supongamos el vector V de la figura referido al sistema de ejes X e Y .

Las componentes del mismo serán

$$\mathbf{V}_x = \mathbf{V} \cdot \cos \alpha \quad \mathbf{V}_y = \mathbf{V} \cdot \sin \alpha \quad (14)$$

En el sistema de ejes x^L e y^L , las componentes serán

$$\mathbf{V}_x^L = \mathbf{V} \cdot \cos(\alpha - \theta) \quad \mathbf{V}_y^L = \mathbf{V} \cdot \sin(\alpha - \theta) \quad (15)$$

Luego:

$$\mathbf{V}_x^L = \mathbf{V} \cdot \cos \alpha \cdot \cos \theta + \mathbf{V} \cdot \sin \alpha \cdot \sin \theta \quad (16)$$

$$\mathbf{V}_y^L = \mathbf{V} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \theta - \mathbf{V} \cdot \cos \alpha \cdot \sin \theta \quad (17)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (14) y escribiendo en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_x^L \\ \mathbf{V}_y^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_x \\ \mathbf{V}_y \end{bmatrix} \quad (18)$$

o en forma compacta:

$$\underset{\sim}{\mathbf{V}}^L = \underset{\sim}{\mathbf{R}} \cdot \underset{\sim}{\mathbf{V}} \quad (19)$$

A la matriz de cosenos directores $\underset{\sim}{\mathbf{R}}$ la llamaremos matriz de rotación.

Si queremos el pasaje del sistema local al global, en este caso la matriz de rotación es la traspuesta de $\underset{\sim}{\mathbf{R}}$.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_x \\ \mathbf{V}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_x^L \\ \mathbf{V}_y^L \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{V}} = \underset{\sim}{\mathbf{R}}^T \underset{\sim}{\mathbf{V}}^L \quad (21)$$

Premultiplicando la ecuación (19) por $\underset{\sim}{\mathbf{R}}^{-1}$

$$\underset{\sim}{\mathbf{V}} = \underset{\sim}{\mathbf{R}}^{-1} \underset{\sim}{\mathbf{V}}^L \quad (22)$$

Lo que implica que $\underset{\sim}{\mathbf{R}}$ es una matriz ortogonal (su inversa es igual a su traspuesta):

$$\underset{\sim}{\mathbf{R}}^{-1} = \underset{\sim}{\mathbf{R}}^T \quad (23)$$

Ecuación fundamental de la barra en el sistema global

Tanto las solicitaciones como los desplazamientos pueden expresarse como vectores en el plano, podemos entonces aplicar la transformación lineal antes vista para llevar los esfuerzos y desplazamientos de extremos de barra del sistema local al global.

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\mathbf{D}}_J^L &= \underset{\sim}{\mathbf{R}} \cdot \underset{\sim}{\mathbf{D}}_J \\ \underset{\sim}{\mathbf{D}}_K^L &= \underset{\sim}{\mathbf{R}} \cdot \underset{\sim}{\mathbf{D}}_K \end{aligned} \quad (24)$$

Donde $\underset{\sim}{\mathbf{D}}_J^L$ y $\underset{\sim}{\mathbf{D}}_K^L$ representan respectivamente los desplazamientos de los nudos j y k en coordenadas locales y $\underset{\sim}{\mathbf{D}}_J$, $\underset{\sim}{\mathbf{D}}_K$ representan los mismos desplazamientos en coordenadas globales.

Escribiendo en forma compacta:

$$\underset{\sim}{\mathbf{D}}I^L = \underset{\sim}{\mathbf{R}}T \cdot \underset{\sim}{\mathbf{D}}I \quad (25)$$

Siendo:

$$\underset{\sim}{\mathbf{R}}T = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\mathbf{R}} & \underset{\sim}{\mathbf{0}} \\ \underset{\sim}{\mathbf{0}} & \underset{\sim}{\mathbf{R}} \end{bmatrix} \quad (26)$$

La matriz de rotación de la barra por incluir ambos nudos de la misma.

$\underset{\sim}{\mathbf{D}}I^L$ contiene los desplazamientos de los dos nudos de la barra en coordenadas locales y $\underset{\sim}{\mathbf{D}}i$ los desplazamientos de los mismos en coordenadas globales.

Para las solicitaciones tendremos:

$$\underset{\sim}{\mathbf{F}}I^L = \underset{\sim}{\mathbf{R}}T \cdot \underset{\sim}{\mathbf{F}}I \quad (27)$$

$\underset{\sim}{\mathbf{F}}I^L$ contiene las solicitaciones de los dos extremos de la barra en coordenadas locales y $\underset{\sim}{\mathbf{F}}I$ en coordenadas globales.

La inversa de la matriz de rotación de la barra será:

$$\underset{\sim}{\mathbf{R}}T^{-1} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\mathbf{R}}^{-1} & \underset{\sim}{\mathbf{0}} \\ \underset{\sim}{\mathbf{0}} & \underset{\sim}{\mathbf{R}}^{-1} \end{bmatrix} \quad (28)$$

Pero como $\underset{\sim}{\mathbf{R}}^{-1} = \underset{\sim}{\mathbf{R}}^T$ será $\underset{\sim}{\mathbf{R}}T^{-1} = \underset{\sim}{\mathbf{R}}T^T$

$$\underset{\sim}{\mathbf{F}}I^L = \underset{\sim}{\mathbf{S}}I^L \cdot \underset{\sim}{\mathbf{D}}I^L + \underset{\sim}{\mathbf{A}}I^L \quad (29)$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{F}}I = \underset{\sim}{\mathbf{R}}T^T \cdot \underset{\sim}{\mathbf{F}}I^L \quad (30)$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{F}}I = \underset{\sim}{\mathbf{R}}T^T \cdot \underset{\sim}{\mathbf{S}}I^L \cdot \underset{\sim}{\mathbf{D}}I^L + \underset{\sim}{\mathbf{R}}T^T \cdot \underset{\sim}{\mathbf{A}}I^L \quad (31)$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{F}}I = \underset{\sim}{\mathbf{R}}T^T \cdot \underset{\sim}{\mathbf{S}}I^L \cdot \underset{\sim}{\mathbf{R}}T \cdot \underset{\sim}{\mathbf{D}}I + \underset{\sim}{\mathbf{R}}T^T \cdot \underset{\sim}{\mathbf{A}}I^L \quad (32)$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{F}}I = \underset{\sim}{\mathbf{S}}I \cdot \underset{\sim}{\mathbf{D}}I + \underset{\sim}{\mathbf{A}}I \quad (33)$$

$$\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{I} = \tilde{\mathbf{R}}\mathbf{T}^T \cdot \tilde{\mathbf{S}}\mathbf{I}^L \cdot \tilde{\mathbf{R}}\mathbf{T} \quad (34)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{I} = \tilde{\mathbf{R}}\mathbf{T}^T \cdot \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{I}^L \quad (35)$$

Matriz de rotación para barra de reticulado plano

$$\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 & 0 \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta \\ 0 & 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{i} = \begin{bmatrix} c^2 & c.s & -c^2 & -c.s \\ c.s & s^2 & -c.s & -s^2 \\ -c^2 & -c.s & c^2 & c.s \\ -c.s & -s^2 & c.s & s^2 \end{bmatrix} \cdot EA/L \quad (37)$$

Matriz de rotación para barra de pórtico plano

$$\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

Matriz de Rigidez de barra de Pórtico Plano

$$\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{I} = \begin{pmatrix} (\mathbf{EAc}^2 / \mathbf{L} + 12\mathbf{EIs}^2 / \mathbf{L}^3) & (\mathbf{EAcs} / \mathbf{L} - 12\mathbf{EIcs} / \mathbf{L}^3) & -6\mathbf{EIs} / \mathbf{L}^2 & (-\mathbf{EAc}^2 / \mathbf{L} - 12\mathbf{EIs}^2 / \mathbf{L}^3) & (-\mathbf{EAcs} / \mathbf{L} + 12\mathbf{EIcs} / \mathbf{L}^3) & -6\mathbf{EIs} / \mathbf{L}^2 \\ (\mathbf{EAcs} / \mathbf{L} - 12\mathbf{EIcs} / \mathbf{L}^3) & (\mathbf{EAs}^2 / \mathbf{L} - 12\mathbf{EIc}^2 / \mathbf{L}^3) & 6\mathbf{EIc} / \mathbf{L}^2 & (-\mathbf{EAcs} / \mathbf{L} + 12\mathbf{EIcs} / \mathbf{L}^3) & (\mathbf{EAs}^2 / \mathbf{L} - 12\mathbf{EIc}^2 / \mathbf{L}^3) & 6\mathbf{EIc} / \mathbf{L}^2 \\ -6\mathbf{EIs}^2 / \mathbf{L}^2 & 6\mathbf{EIc}^2 / \mathbf{L}^2 & 4\mathbf{EI} / \mathbf{L} & 6\mathbf{EIs} / \mathbf{L}^2 & 6\mathbf{EIc}^2 / \mathbf{L}^2 & 2\mathbf{EI} / \mathbf{L} \\ (-\mathbf{EAc}^2 / \mathbf{L} - 12\mathbf{EIs}^2 / \mathbf{L}^3) & (-\mathbf{EAcs} / \mathbf{L} + 12\mathbf{EIcs} / \mathbf{L}^3) & 6\mathbf{EIs} / \mathbf{L}^2 & (\mathbf{EAc}^2 / \mathbf{L} + 12\mathbf{EIs}^2 / \mathbf{L}^3) & (\mathbf{EAcs} / \mathbf{L} - 12\mathbf{EIcs} / \mathbf{L}^3) & 6\mathbf{EIs} / \mathbf{L}^2 \\ (-\mathbf{EAcs} / \mathbf{L} + 12\mathbf{EIcs} / \mathbf{L}^3) & (-\mathbf{EAs}^2 / \mathbf{L} - 12\mathbf{EIc}^2 / \mathbf{L}^3) & -6\mathbf{EIc} / \mathbf{L}^2 & (\mathbf{EAcs} / \mathbf{L} - 12\mathbf{EIcs} / \mathbf{L}^3) & (\mathbf{EAs}^2 / \mathbf{L} + 12\mathbf{EIc}^2 / \mathbf{L}^3) & -6\mathbf{EIc} / \mathbf{L}^2 \\ -6\mathbf{EIs} / \mathbf{L}^2 & 6\mathbf{EIc} / \mathbf{L}^2 & 2\mathbf{EI} / \mathbf{L} & 6\mathbf{EIs} / \mathbf{L}^2 & -6\mathbf{EIc} / \mathbf{L}^2 & 4\mathbf{EI} / \mathbf{L} \end{pmatrix}$$

Tabla nº 1

Matriz de Rigidez y Vector de Cargas Global de la Estruct.

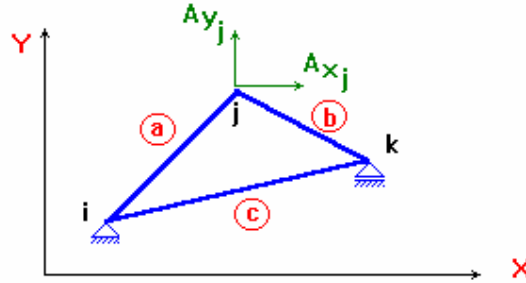


Fig.º 9 - Reticulado Plano

Las ecuaciones de equilibrio exigen que las cargas externas aplicadas en los nudos deben ser iguales a la suma de las solicitaciones de extremo de las barras que concurren al nudo.

Siendo el vector de cargas externas aplicadas en j :

$$\underset{\sim}{\bar{\mathbf{A}}}\mathbf{j} = \begin{bmatrix} - \\ \mathbf{A} \\ X_j \\ - \\ \mathbf{A} \\ Y_j \end{bmatrix} \quad (39)$$

Las ecuaciones matriciales de las barras a) y b) son:

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\mathbf{F}}\mathbf{i}^a &= \underset{\sim}{\mathbf{S}}\mathbf{i}^a \cdot \underset{\sim}{\mathbf{D}}\mathbf{i}^a + \underset{\sim}{\mathbf{A}}\mathbf{i}^a \\ \underset{\sim}{\mathbf{F}}\mathbf{j}^a &= \underset{\sim}{\mathbf{S}}\mathbf{j}^a \cdot \underset{\sim}{\mathbf{D}}\mathbf{j}^a + \underset{\sim}{\mathbf{A}}\mathbf{j}^a \end{aligned} \quad (40)$$

Que pueden representarse en función de los nudos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\mathbf{F}}\mathbf{i}^a \\ \underset{\sim}{\mathbf{F}}\mathbf{j}^a \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\mathbf{S}}\mathbf{i}^a & \underset{\sim}{\mathbf{S}}\mathbf{j}^a \\ \underset{\sim}{\mathbf{S}}\mathbf{j}^a & \underset{\sim}{\mathbf{S}}\mathbf{j}^a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\mathbf{D}}\mathbf{i}^a \\ \underset{\sim}{\mathbf{D}}\mathbf{j}^a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\mathbf{A}}\mathbf{i}^a \\ \underset{\sim}{\mathbf{A}}\mathbf{j}^a \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\mathbf{F}}\mathbf{j}^b \\ \underset{\sim}{\mathbf{F}}\mathbf{k}^b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\mathbf{S}}\mathbf{j}^b & \underset{\sim}{\mathbf{S}}\mathbf{k}^b \\ \underset{\sim}{\mathbf{S}}\mathbf{k}^b & \underset{\sim}{\mathbf{S}}\mathbf{k}^b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\mathbf{D}}\mathbf{j}^b \\ \underset{\sim}{\mathbf{D}}\mathbf{k}^b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\mathbf{A}}\mathbf{j}^b \\ \underset{\sim}{\mathbf{A}}\mathbf{k}^b \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (41)$$

dónde:

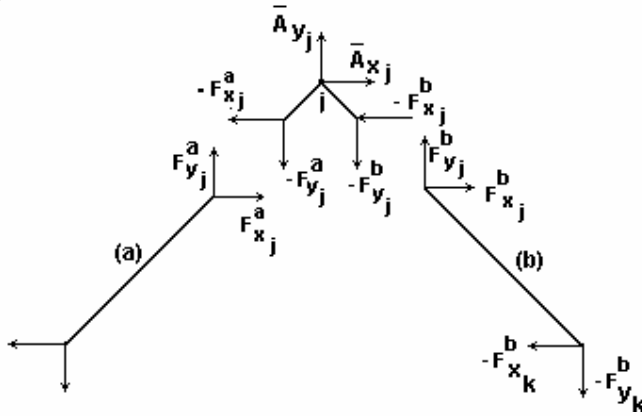
$\underset{\sim}{\mathbf{F}}\mathbf{i}^a$ = vector sollicitación en el extremo i de la barra (a)

$\underset{\sim}{\mathbf{D}}\mathbf{i}^a$ = vector deformación en el extremo i de la barra (a)

$\underset{\sim}{\mathbf{A}}\mathbf{i}^a$ = vector fuerza de empotramiento perfecto en el extremo i de la barra (a)

\tilde{S}_{ij}^a = submatriz conteniendo los coeficientes de rigidez del nudo i que provienen de un desplazamiento unitario del nudo j de la barra (a)

Las condiciones de equilibrio para el reticulado de la figura en el nudo j resultan:



$$\tilde{A}_j - \tilde{F}_j^a - \tilde{F}_j^b = 0$$

$$\tilde{A}_j = \tilde{F}_j^a + \tilde{F}_j^b \quad (42)$$

$$\tilde{A}_j = \tilde{S}_{ji}^a \cdot \tilde{D}_i^a + \tilde{S}_{jj}^a \cdot \tilde{D}_j^a + \tilde{A}_j^a + \tilde{S}_{jj}^b \cdot \tilde{D}_j^b + \tilde{S}_{jk}^b \cdot \tilde{D}_k^b + \tilde{A}_j^b \quad (43)$$

Por condición de compatibilidad de desplazamientos:

$$\tilde{D}_j^a = \tilde{D}_j^b = \tilde{D}_j \quad ; \quad \tilde{D}_i^a = \tilde{D}_i^c = \tilde{D}_i \quad ; \quad \tilde{D}_k^b = \tilde{D}_k^c = \tilde{D}_k \quad (44)$$

Reemplazando la (44) en la (43) y extendiendo el razonamiento a los nudos restantes:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_j &= \tilde{S}_{ji}^a \cdot \tilde{D}_i + (\tilde{S}_{jj}^a + \tilde{S}_{jj}^b) \cdot \tilde{D}_j + \tilde{S}_{jk}^b \cdot \tilde{D}_k + \tilde{A}_j^a + \tilde{A}_j^b \\ \tilde{A}_i &= \tilde{S}_{ij}^a \cdot \tilde{D}_j + (\tilde{S}_{ii}^a + \tilde{S}_{ii}^c) \cdot \tilde{D}_i + \tilde{S}_{ik}^c \cdot \tilde{D}_k + \tilde{A}_i^a + \tilde{A}_i^c \\ \tilde{A}_k &= \tilde{S}_{ki}^c \cdot \tilde{D}_i + (\tilde{S}_{kk}^b + \tilde{S}_{kk}^c) \cdot \tilde{D}_k + \tilde{S}_{kj}^b \cdot \tilde{D}_j + \tilde{A}_k^b + \tilde{A}_k^c \end{aligned} \quad (45)$$

Si la organizamos en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_i \\ \bar{\mathbf{A}}_j \\ \bar{\mathbf{A}}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{S}}_{ii}^a + \tilde{\mathbf{S}}_{ii}^c & \tilde{\mathbf{S}}_{ij}^a & \tilde{\mathbf{S}}_{ik}^c \\ \tilde{\mathbf{S}}_{ji}^a & \tilde{\mathbf{S}}_{jj}^a + \tilde{\mathbf{S}}_{jj}^b & \tilde{\mathbf{S}}_{jk}^b \\ \tilde{\mathbf{S}}_{ki}^c & \tilde{\mathbf{S}}_{kj}^b & \tilde{\mathbf{S}}_{kk}^b + \tilde{\mathbf{S}}_{kk}^c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_i \\ \tilde{\mathbf{D}}_j \\ \tilde{\mathbf{D}}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_i^a + \tilde{\mathbf{A}}_i^c \\ \tilde{\mathbf{A}}_j^a + \tilde{\mathbf{A}}_j^b \\ \tilde{\mathbf{A}}_k^b + \tilde{\mathbf{A}}_k^c \end{bmatrix} \quad (46)$$

Que representa el sistema global de ecuaciones de la estructura, escribiendo en forma compacta:

$$\bar{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{A}}_{eq} = \tilde{\mathbf{S}} \cdot \tilde{\mathbf{D}} \quad (47)$$

Dónde:

$\bar{\mathbf{A}}$ = vector de acciones externas aplicadas en los nudos.

$\tilde{\mathbf{S}}$ = matriz de rigidez global de la estructura

$\tilde{\mathbf{D}}$ = vector deformación de nudos

$\tilde{\mathbf{A}}_{eq}$ = vector de cargas nodales equivalentes (fuerzas de empotramiento perfecto cambiadas de signo) debido a las cargas aplicadas en los tramos de barras.

Haciendo:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{A}}_{eq} \quad (48)$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{S}} \cdot \tilde{\mathbf{D}} \quad (49)$$

El vector $\tilde{\mathbf{A}}$ representa las cargas nodales equivalentes más las cargas aplicadas en los nudos.

La ecuación (49) no puede ser resuelta (la matriz $\tilde{\mathbf{S}}$ es singular) si no se aplican las condiciones de contorno o de borde de la estructura.

Esquema de la formación de la matriz de rigidez global y del vector de cargas

Consideremos el reticulado de la figura nº 9. La matriz de rigidez global del reticulado tendrá 6 filas y 6 columnas ya que son 3 nudos y cada uno tiene 2 grados de libertad (un desplazamiento según el eje x y uno según el eje y). La contribución de cada nudo deberá ser colocada en las posiciones que se indican en la figura nº10.

Los nudos i,j,k definen las filas y columnas de la matriz (submatrices)

		l	j	k		
S =	i	a+c	a+c	a	a	
		a+c	a+c	a	a	
	j	a	A	a+b	a+b	b
		a	A	a+b	a+b	b
	k	c	C	b	b	b+c
		c	C	b	b	b+c

Fig. nº 10: Esquema Formación Matriz Reticulado

		i	j	k
S =	i	$\mathbf{S}^a + \mathbf{S}^c$	\mathbf{S}^a	\mathbf{S}^c
		$\sim_{ii} \quad \sim_{ii}$	\sim_{ij}	\sim_{ik}
	j	\mathbf{S}^a	$\mathbf{S}^b + \mathbf{S}^a$	\mathbf{S}^b
\sim_{ji}		$\sim_{jj} \quad \sim_{jj}$	\sim_{jk}	\sim_{jk}
k	\mathbf{S}^a	\mathbf{S}^b	$\mathbf{S}^b + \mathbf{S}^c$	$\mathbf{S}^b + \mathbf{S}^c$
	\sim_{ki}	\sim_{kj}	$\sim_{kk} \quad \sim_{kk}$	$\sim_{kk} \quad \sim_{kk}$

Las submatrices tendrán tantas filas y columnas como grados de libertad tenga cada nudo. En el caso del reticulado este número es 2.

Analicemos la posición en figura nº 10 de las submatrices de la matriz de rigidez de la barra **b** de la figura nº 9.

$$\underset{\sim}{\mathbf{S}}\mathbf{1}^a = \begin{bmatrix} \mathbf{S}^a & \mathbf{S}^a \\ \sim_{ii} & \sim_{ij} \\ \mathbf{S}^a & \mathbf{S}^a \\ \sim_{ji} & \sim_{jj} \end{bmatrix} \quad \underset{\sim}{\mathbf{S}}\mathbf{1}^b = \begin{bmatrix} \mathbf{S}^b & \mathbf{S}^b \\ \sim_{jj} & \sim_{jk} \\ \mathbf{S}^b & \mathbf{S}^b \\ \sim_{kj} & \sim_{kk} \end{bmatrix} \quad \underset{\sim}{\mathbf{S}}\mathbf{1}^c = \begin{bmatrix} \mathbf{S}^c & \mathbf{S}^c \\ \sim_{ii} & \sim_{ik} \\ \mathbf{S}^c & \mathbf{S}^c \\ \sim_{ki} & \sim_{kk} \end{bmatrix} \tag{50}$$

Las submatrices son de orden 2x2. La posición $\underset{\sim}{\mathbf{S}}\mathbf{1}^b$ en la matriz $\underset{\sim}{\mathbf{S}}$ está indicada en al figura nº 10 a partir del siguiente esquema:

$\underset{\sim}{\mathbf{S}}\mathbf{1}^b$ = indica fila j columna j

$\underset{\sim}{\mathbf{S}}\mathbf{1}^b$ = indica fila j columna k

$\underset{\sim}{\mathbf{S}}\mathbf{1}^b$ = indica fila k columna j

$\underset{\sim}{\mathbf{S}}\mathbf{1}^b$ = indica fila k columna k

Nótese que en las posiciones dónde ya existen valores provenientes de otras barras, estos son sumados a aquellos.

Generalizando, debemos considerar una barra de reticulado que une los nudos j y k según la figura nº11.

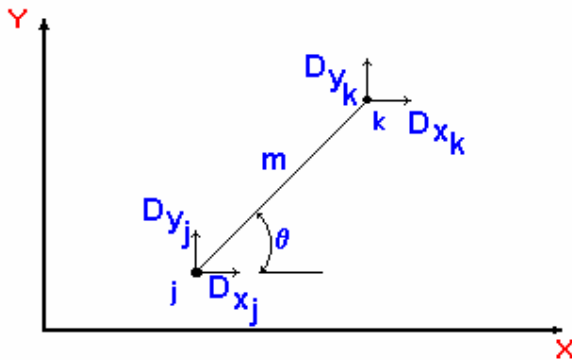


Figura nº 11

Las posiciones ocupadas por la matriz de rigidez de la barra (m) en la matriz de rigidez global son las siguientes:

	1	2	3	$2(j-1)+1$	$2(j-1)+2$	$2(k-1)+1$	$2(k-1)+2$
1							
2							
⋮							
$2(j-1)+1$				X	X		
$2(j-1)+2$				X	X		
⋮							
$2(k-1)+1$				X	X		
$2(k-1)+2$				X	X		

Figura nº 12 - Posiciones ocupadas por una barra de Reticulado Plano en la matriz de Rigidez Global

Para un pórtico plano o estructuras con 3 grados de libertad por nudo tendríamos la siguiente configuración:

Formación de la MATRIZ de RIGIDEZ GLOBAL en forma de matriz banda-simétrica.

La Matriz de Rigidez Global de la estructura es simétrica respecto de la diagonal principal y tiene normalmente características de matriz de bandas. Por ello no es necesario almacenar todos los elementos de la matriz toda vez que esto implica tiempo de procesamiento para el computador y además mayor memoria de almacenamiento. Bastará entonces almacenar los elementos del triángulo superior (o el inferior) de la matriz. También esta parte triangular superior (o el inferior) puede sufrir una racionalización del arreglo matricial de números. Esto se corrige aprovechando la característica de banda de la matriz y previniendo su reorganización para un arreglo bidimensional de dimensión $NGL \times B$ dónde:

NGL = es el número de grados de libertad total de la estructura.

B = es el semi largo de banda del sistema.

Sea el ejemplo de la figura nº 15. La Matriz de Rigidez de la estructura en su forma de almacenamiento convencional representada en la figura nº 16-a y en la forma de banda simétrica en la figura nº 16-b.

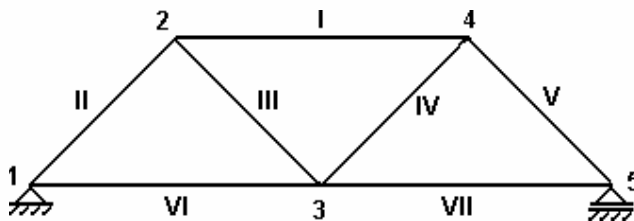


Figura nº 15: Ejemplo de Reticulado Plano.

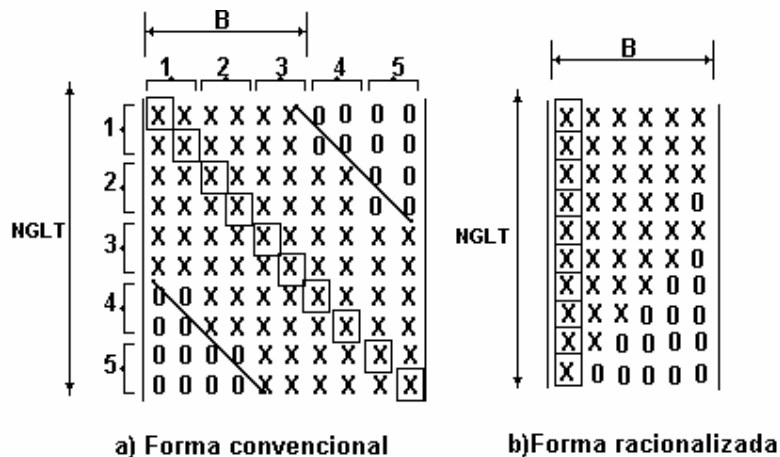


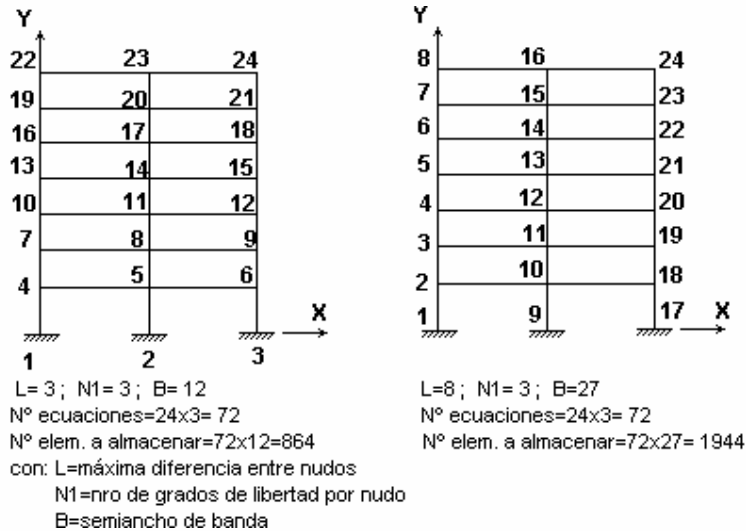
Figura nº 16: Formas de almacenamiento de la Matriz de Rigidez

Nótese que el semi-ancho de banda está vinculado a la mayor diferencia de numeración entre nudos que están unidos por una barra. En el caso de la figura nº 15, la mayor diferencia entre dos nudos de una barra es 2 y el semi-ancho de banda es 6. De modo general el semi-ancho de banda es obtenida por $B=(L+1)*N1$. Dónde L es la mayor diferencia entre nudos que

concurrer a una misma barra y $N1$ es el número de grados de libertad del nudo. En el caso del Reticulado Plano $N1=2$, y entonces el semi ancho de banda es $B=(2+1)x2=6$.

Influencia de la Numeración de nudos sobre el ancho de Banda

En el ejemplo que sigue se puede apreciar como varían tanto la cantidad de elementos a almacenar como el semiancho ancho de banda con la forma de numerar los nudos de la estructura.



Condiciones de Contorno o de Borde

Un sistema de ecuaciones : $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{S} \cdot \underset{\sim}{D}$ correspondiente a una estructura completa antes de aplicar las condiciones de contorno es INDETERMINADO, pues $\underset{\sim}{S}$ es singular. La razón de esta singularidad es el resultado de no haber considerado las vinculaciones o apoyos de la estructura con el exterior. Al introducir las condiciones de vínculo desaparece la indeterminación (o singularidad de la matriz de rigidez), siempre que el número de vínculos sea por lo menos el mínimo necesario para eliminar los movimientos de cuerpo rígido de la estructura.

El conocimiento de determinados corrimientos nodales, disminuye el número de incógnitas, tornándose innecesarias las ecuaciones correspondientes a estos corrimientos.

La eliminación de la ecuación de un desplazamiento implica la destrucción de la banda de la matriz, lo cual exigiría un reacomodamiento de las incógnitas del problema.

Al sistema de ecuaciones

$$\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{S} \cdot \underset{\sim}{D} \quad (51)$$

Podemos expresarlo de la siguiente forma:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{A}_{\sim I} \\ \mathbf{A}_{\sim II} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{S}_{\sim I,I} & \mathbf{S}_{\sim I,II} \\ \mathbf{S}_{\sim II,I} & \mathbf{S}_{\sim II,II} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \phi \\ \mathbf{D}_{\sim II} \end{Bmatrix} \quad (52)$$

Dónde:

$\mathbf{A}_{\sim I}$ = reacciones de apoyo con desplazamiento impedido. $\mathbf{D}_{\sim I} = 0$, reacciones que por el momento desconocemos.

$\mathbf{A}_{\sim II}$ = agrupa las fuerzas externas sobre nodos con desplazamientos $\mathbf{D}_{\sim II}$ desconocidos.

$\mathbf{S}_{\sim II,II}$ = Matriz de rigidez (cuadrada) que relaciona fuerzas conocidas (cargas externas $\mathbf{A}_{\sim II}$) con desplazamientos desconocidos $\mathbf{D}_{\sim II}$.

Técnica número 1:

Suprimir o eliminar de la Matriz de Rigidez del sistema las columnas correspondientes a desplazamientos impedidos y las filas correspondientes a reacciones exteriores.

Ventaja: reduce el tamaño del sistema de ecuaciones a resolver (en un orden determinado por los grados de libertad eliminados por los apoyos). Dicha reducción es importante en el caso de pocas barras y muchos vínculos externos, fácilmente aplicable en forma manual, es la técnica que emplearemos en el curso.

Desventaja: no podemos resolver así desplazamientos prescriptos.

Técnica número 2:

Un artificio usado normalmente para introducir un desplazamiento conocido en la dirección i , consiste en hacer el elemento de la diagonal principal de la matriz \mathbf{S} de la línea i igual a 1 y anular todas las restantes posiciones pertenecientes a esa línea y columna. Luego debe ser colocado el valor del corrimiento conocido $\bar{\mathbf{d}}_i$ en la posición anteriormente ocupada por a_i , y también pasar al vector \mathbf{A} los coeficientes $\mathbf{S}_{ij} \cdot \bar{\mathbf{d}}_i$ con el signo cambiado.

$$\begin{cases} \mathbf{S}_{11} \cdot \mathbf{d}_1 + \mathbf{S}_{12} \cdot \mathbf{d}_2 + \dots + \mathbf{S}_{1i} \cdot \mathbf{d}_i + \dots + \mathbf{S}_{1n} \cdot \mathbf{d}_n = \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{S}_{21} \cdot \mathbf{d}_1 + \mathbf{S}_{22} \cdot \mathbf{d}_2 + \dots + \mathbf{S}_{2i} \cdot \mathbf{d}_i + \dots + \mathbf{S}_{2n} \cdot \mathbf{d}_n = \mathbf{a}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{S}_{i1} \cdot \mathbf{d}_1 + \mathbf{S}_{i2} \cdot \mathbf{d}_2 + \dots + \mathbf{S}_{ii} \cdot \mathbf{d}_i + \dots + \mathbf{S}_{in} \cdot \mathbf{d}_n = \mathbf{a}_i \\ \cdot \\ \mathbf{S}_{n1} \cdot \mathbf{d}_1 + \mathbf{S}_{n2} \cdot \mathbf{d}_2 + \dots + \mathbf{S}_{ni} \cdot \mathbf{d}_i + \dots + \mathbf{S}_{nn} \cdot \mathbf{d}_n = \mathbf{a}_n \end{cases} \quad (53)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{11} \cdot d_1 + S_{12} \cdot d_2 + \dots + 0 + \dots + S_{1n} \cdot d_n = a_1 - S_{1i} \cdot \bar{d}_i \\ S_{21} \cdot d_1 + S_{22} \cdot d_2 + \dots + 0 + \dots + S_{2n} \cdot d_n = a_2 - S_{2i} \cdot \bar{d}_i \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 + 0 + \dots + \bar{d}_i + \dots + 0 = \bar{d}_i \\ \cdot \\ S_{n1} \cdot d_1 + S_{n2} \cdot d_2 + \dots + 0 + \dots + S_{nn} \cdot d_n = a_n - S_{ni} \cdot \bar{d}_i \end{array} \right. \quad (54)$$

En forma matricial

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & 0 & \dots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & 0 & \dots & S_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n1} & S_{n2} & \dots & 0 & \dots & S_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{d}_i \\ \cdot \\ \cdot \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - S_{1i} \cdot \bar{d}_i \\ a_2 - S_{2i} \cdot \bar{d}_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{d}_i \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n - S_{ni} \cdot \bar{d}_i \end{pmatrix} \quad (55)$$

Como caso particular, cuando un corrimiento di sea nulo, o sea, cuando exista un vínculo en la dirección i, la ecuación anterior toma la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & 0 & \dots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & 0 & \dots & S_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n1} & S_{n2} & \dots & 0 & \dots & S_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{d}_i \\ \cdot \\ \cdot \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix} \quad (56)$$

Es importante mencionar, que con esta forma de aplicación de las condiciones de borde, las cargas que están aplicadas en la dirección i del apoyo quedarían sin considerar.

Ventaja: No destruye la organización simétrica y banda del sistema de ecuaciones. Es fácilmente implementable en computador.

Técnica número 3:

Modificar los coeficientes de la diagonal principal en la matriz de rigidez del sistema que correspondan a desplazamientos impedidos.

Siendo una ecuación cualquiera en el sistema:

$$a_i = \sum S_{ij} \cdot d_j + S_{ii} \cdot d_i \quad \Rightarrow \quad d_i = \frac{a_i - \sum S_{ij} \cdot d_j}{S_{ii}} \quad (57)$$

Luego, haciendo S_{ii} suficientemente grande (por ejemplo multiplicarlo por 10^{20}) obtenemos un d_i próximo a cero.

Ventajas: no altera la organización del sistema de ecuaciones, ni tampoco reduce el orden del sistema.

Desventaja: puede provocar problemas numéricos.

Solución del sistema global de ecuaciones

Una vez introducidas las condiciones de borde o contorno en el sistema de ecuaciones, podemos resolverlo mediante cualquier método conocido (Gauss, Cholesky, Gauss Jordan, etc.)

Existen en la literatura métodos eficientes de cálculo teniendo en cuenta la simetría, banda y forma específica de archivo. La solución de la ecuación 55 nos provee los corrimientos o desplazamientos de los nudos de la estructura.

Muchas veces existe más de un estado de carga. Para esta situación se pueden desarrollar algoritmos de solución que trabajando con más de un vector de cargas (término independiente) nos dan como respuesta más de un vector desplazamiento (uno para cada estado de cargas).

Cálculo de solicitaciones en extremos de barras

La ecuación matricial de una barra (m) con conexiones i,j se expresa en forma particionada de acuerdo a la ecuación 41:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\sim i}^m &= \mathbf{S}_{\sim ii}^m \cdot \mathbf{D}_{\sim i} + \mathbf{S}_{\sim ij}^m \cdot \mathbf{D}_{\sim j} + \mathbf{A}_{\sim i}^m \\ \mathbf{F}_{\sim j}^m &= \mathbf{S}_{\sim ji}^m \cdot \mathbf{D}_{\sim i} + \mathbf{S}_{\sim jj}^m \cdot \mathbf{D}_{\sim j} + \mathbf{A}_{\sim j}^m \end{aligned} \quad (58)$$

Los desplazamientos $\mathbf{D}_{\sim i}$, $\mathbf{D}_{\sim j}$ son obtenidos del vector desplazamiento de nudos de la estructura, solución del sistema de ecuaciones (54). Particionada la matriz de rigidez de la barra "m" ($\mathbf{S}_{\sim i,i}^m, \mathbf{S}_{\sim i,j}^m, \mathbf{S}_{\sim j,j}^m$) y el vector de empotramiento perfecto ($\mathbf{A}_{\sim i}^m, \mathbf{A}_{\sim j}^m$), deben ser almacenadas al confeccionar la matriz de rigidez global y el vector de cargas global. Entretanto, dependiendo de la capacidad de memoria del procesador, puede ser más aconsejable recalcular la matriz de rigidez y el vector de reacción de empotramiento perfecto de cada barra, para después obtener con el término (58) las solicitaciones de extremo de barra ($\mathbf{F}_{\sim i}^m$ y $\mathbf{F}_{\sim j}^m$).

Las solicitaciones de barras nos interesan referirlas al sistema de ejes de coordenadas locales, ya que en esta forma tendremos los esfuerzos normales, cortantes, etc. Para esto debemos hacer una rotación de ejes sobre las solicitaciones obtenidas por (58), para lo cual:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\sim i}^{m,L} &= \mathbf{R}_{\sim i} \cdot \mathbf{F}_{\sim i}^m \\ \mathbf{F}_{\sim j}^{m,L} &= \mathbf{R}_{\sim j} \cdot \mathbf{F}_{\sim j}^m \end{aligned} \quad (59)$$

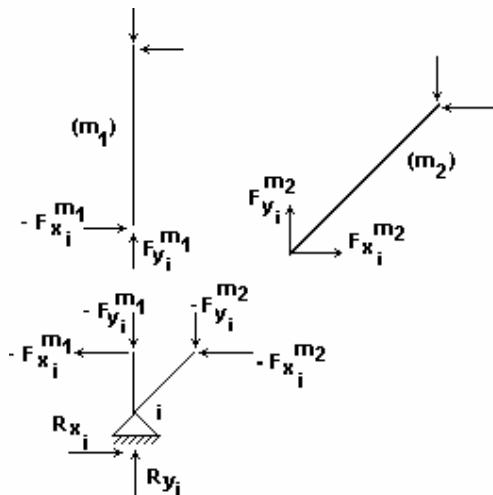
Esta no es la única forma de obtener las solicitaciones de las barras. Podemos obtener los corrimientos $\mathbf{D}_{\sim i}$ y $\mathbf{D}_{\sim j}$ y transformarlos a coordenadas locales mediante el producto con \mathbf{R}_{\sim} .

Entonces tendríamos las ecuaciones (58), todas en coordenadas locales para así obtener las solicitaciones en las mismas coordenadas.

Cálculo de las reacciones de nudos

Para un nudo sobre un apoyo, podemos obtener las acciones de todas las barras que concurren a un nudo y sumarlas.

El resultado de esta suma será el vector reacción del nudo.



$$\mathbf{R}_{\sim i} - \sum_{m=1}^p \mathbf{F}_{\sim i}^m = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \mathbf{R}_{\sim i} = \sum_{m=1}^p \mathbf{F}_{\sim i}^m$$

$$\mathbf{R}_{\sim i} = \sum_{m=1}^p \mathbf{F}_{\sim i}^m \quad (60)$$

dónde p es el número de barras ligadas al nudo i y $\mathbf{R}_{\sim i}$ es la reacción del nudo i .

Si hacemos esta misma suma para un nudo que no sea apoyo, tendremos como resultado las cargas aplicadas al nudo. Es importante que las solicitaciones del extremo de barra sean referidas a un sistema global de coordenadas.

TOPICOS ESPECIALES EN ANALISIS MATRICIAL

Efectos Térmicos

Lo analizamos en forma similar al caso de cargas aplicadas en el tramo.

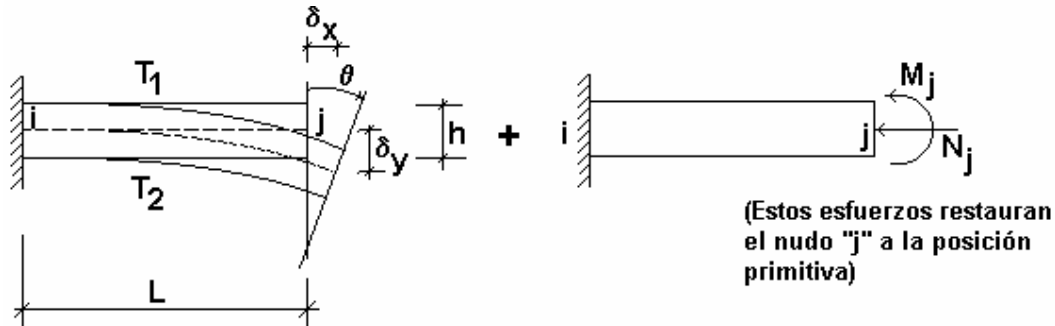


Fig. nº 17

$$\delta_{x_j} = \alpha_t \frac{(T_1 + T_2)}{2} \cdot L \quad ; \quad \theta_j = -\alpha_t \frac{(T_1 - T_2)}{h} \cdot L \quad (61)$$

El giro $d\theta$ de un tramo de viga dx será:

$$d\theta = -\alpha_t \frac{(T_1 - T_2)}{h} \cdot dx \quad (62)$$

teniendo en cuenta que: $\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{E.I}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\alpha_t \frac{(T_1 - T_2)}{h} \quad (63)$$

integrando dos veces y particularizando para el nudo j.

$$dy_j = -\alpha_t \frac{(T_1 - T_2)}{2 \cdot h} \cdot L^2 \quad (64)$$

Las fuerzas de empotramiento necesarias para restaurar el extremo de la barra a su posición primitiva serán: (para pórtico plano).

$$\begin{Bmatrix} N_j^L \\ Q_j^L \\ M_j^L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E.A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12.E.I}{L^3} & -\frac{6.E.I}{L^2} \\ 0 & -\frac{6.E.I}{L^2} & \frac{4.E.I}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_t \cdot \frac{(T_1 + T_2)}{2} \cdot L \\ -\alpha_t \cdot \frac{(T_1 - T_2)}{2 \cdot h} \cdot L^2 \\ -\alpha_t \cdot \frac{(T_1 - T_2)}{h} \cdot L \end{Bmatrix} \quad (65)$$

$$\underset{\sim}{P}_j = \underset{\sim}{S}_{jj} \cdot \underset{\sim}{\delta}_j \quad (66)$$

Cómo estas fuerzas son de empotramiento perfecto, y además están en coordenadas locales, hay que llevarlas al sistema global y restarlas (cargas nodales equivalentes) al vector de cargas en los nudos.

$$\begin{Bmatrix} N_j^L \\ Q_j^L \\ M_j^L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_t \cdot (T_1 + T_2) \cdot \frac{E \cdot A}{2} \\ 0 \\ -\alpha_t \cdot (T_1 - T_2) \cdot \frac{E \cdot A}{h} \end{Bmatrix} \quad (67)$$

Apoyos elásticos

Un apoyo elástico se caracteriza por el hecho de que el desplazamiento que sufre es proporcional a la fuerza que recibe, definida por su constante de resorte k (fuerza necesaria para producir un desplazamiento unitario)

Un desplazamiento δ genera una fuerza $k \cdot \delta$ en la misma dirección.

Siendo una ecuación cualquiera en el sistema:

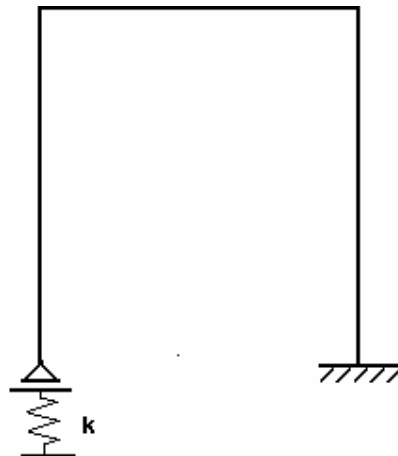


Fig. nº 18

$$a_i = \sum S_{ij} \delta_j + S_{ii} \cdot \delta_i \quad (68)$$

Si establecemos ahora el equilibrio en el nudo "i" teniendo en cuenta la fuerza del resorte:

$$-k \cdot \delta_i + a_i = \sum S_{ij} \delta_j + S_{ii} \cdot \delta_i \quad (69)$$

$$a_i = \sum S_{ij} \delta_j + (S_{ii} + k) \cdot \delta_i \quad (70)$$

Es decir debemos sumar la rigidez del resorte k en la diagonal principal de la matriz de rigidez del sistema en la fila y columna correspondiente a la dirección en la que actúa el resorte.

Apoyos deslizantes no concordantes

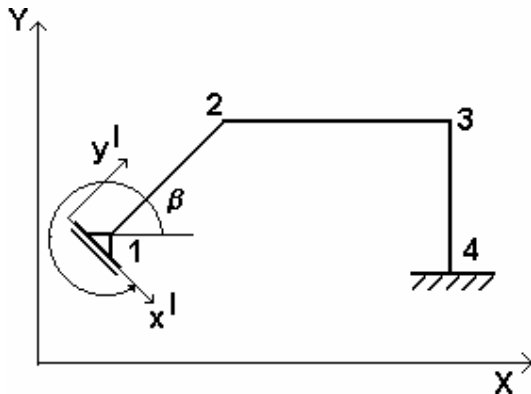


Fig. nº 19

Si el plano de desplazamiento no es paralelo a uno de los ejes globales, debemos modificar la ecuación matricial de la estructura, transformando en el nodo en cuestión los vectores fuerza y desplazamiento al sistema de ejes global.

$$\begin{matrix} \delta \\ \sim 1 \end{matrix} = \mathbf{R} \cdot \begin{matrix} \delta \\ \sim 1 \end{matrix}^L \qquad \mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \begin{matrix} \mathbf{F} \\ \sim 1 \end{matrix}^L \qquad (71)$$

dónde el “1” indica el número de nodo.

Con

$$\mathbf{R} = \begin{vmatrix} \cos\beta & \text{sen}\beta & 0 \\ -\text{sen}\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad (72)$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{R} \cdot \mathbf{F} \\ \sim 1 \end{matrix}^L = \begin{vmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{S} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \sim 11 & \sim 12 & \sim & \sim \\ \mathbf{S} & \mathbf{S} & \mathbf{S} & \mathbf{0} \\ \sim 21 & \sim 22 & \sim 23 & \sim \\ \mathbf{0} & \mathbf{S} & \mathbf{S} & \mathbf{S} \\ \sim & \sim 32 & \sim 33 & \sim 34 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S} & \mathbf{S} \\ \sim & \sim & \sim 43 & \sim 44 \end{vmatrix} \cdot \begin{matrix} \mathbf{R} \cdot \delta \\ \sim 1 \end{matrix}^L \qquad (73)$$

\mathbf{S}_{ij} = 3x3 para pórtico plano

En esta ecuación es lo mismo premultiplicar $\delta_{\sim 1}^L$ por $\mathbf{R}_{\sim 1}$ que postmultiplicar la primera columna de $\mathbf{S}_{\sim 1}$ por $\mathbf{R}_{\sim 1}$. Por otra parte, premultiplicando la primera fila a ambos lados de la igualdad por $\mathbf{R}_{\sim 1}^T$ no se altera la igualdad y además considerando que en sistemas de coordenadas ortogonales $\mathbf{R}_{\sim 1}^T \cdot \mathbf{R}_{\sim 1} = \mathbf{I}_{\sim}$

$$\begin{matrix} \mathbf{F}^L \\ \sim_1 \\ \mathbf{F} \\ \sim_2 \\ \mathbf{F} \\ \sim_3 \\ \mathbf{F} \\ \sim_4 \end{matrix} = \begin{matrix} \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{R} & \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{S} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \sim_1 & \sim_{11} & \sim_1 & \sim_{12} \\ \mathbf{S} & \mathbf{R} & \mathbf{S} & \mathbf{0} \\ \sim_{21} & \sim_1 & \sim_{22} & \sim_{23} \\ \mathbf{0} & & \mathbf{S} & \mathbf{S} & \mathbf{S} \\ & & \sim_{32} & \sim_{33} & \sim_{34} \\ \mathbf{0} & & \mathbf{0} & \mathbf{S} & \mathbf{S} \\ & & & \sim_{43} & \sim_{44} \end{matrix} \begin{matrix} \delta^L \\ \sim_1 \\ \delta \\ \sim_2 \\ \delta \\ \sim_3 \\ \delta \\ \sim_4 \end{matrix} \quad (74)$$

Resumen: Se modifica la ecuación matricial de toda la estructura, premultiplicando la fila, correspondiente al nodo con apoyo inclinado por \mathbf{R}^T y postmultiplicando la columna correspondiente por \mathbf{R} .

Técnica alternativa

Consiste en adicionar un barra ficticia que deberá impedir desplazamientos en la dirección “v” y permitir desplazamientos en la dirección “u” y giro. Para que esto sea posible, el área de la sección transversal de la misma deberá ser mucho mayor que las barras restantes y la inercia mucho menor a la de las otras barras. (Además de pequeña longitud para evitar acortamientos de la barra ficticia)

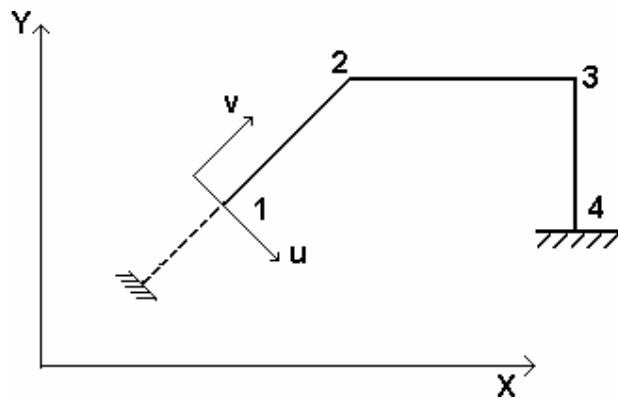


Fig. nº 20