

# 5

## ANÁLISIS PLÁSTICO DE ESTRUCTURAS

### 5.1- CONSIDERACIONES GENERALES.

Es conocido el hecho de que los elementos estructurales no cumplen, por diversas causas, con las ecuaciones lineales en que se basa la Teoría de la Elasticidad. También es cierto que la experiencia y los ensayos nos indican que esta puede utilizarse con aproximación dentro de ciertos rangos de cargas.

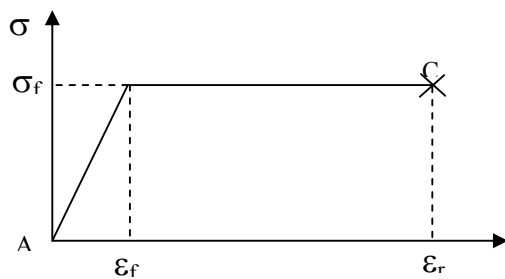
Fuera de dichos límites y para cargas cercanas al colapso de la estructura, los estados de sollicitaciones de los elementos que la componen obedecen a leyes distintas que entran dentro del campo de la plasticidad o de la elasto-plasticidad.

Con el objeto de conocer el verdadero Coeficiente de Seguridad de la Estructura es entonces muy importante conocer la Carga Límite o Carga de Rotura que produce el colapso de la estructura y el estado de sollicitaciones en ese instante, razón por la cual el Ingeniero debe estar familiarizado con los elementos básicos de los Métodos de Análisis Plástico.

Sobre la base de la teoría y práctica que sustentan a dicho Método, los reglamentos los han ido admitiendo en ciertos casos y en otros dan ciertas libertades al Calculista, como por ejemplo la de rebajar a un porcentaje dado los momentos flectores en los apoyos intermedios de una viga continua de Hormigón Armado.

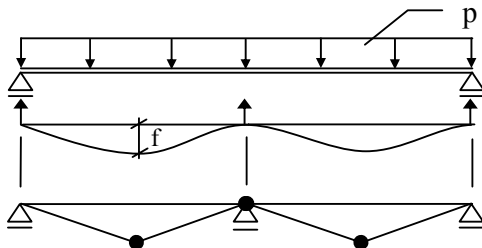
Debemos aquí distinguir que estamos refiriéndonos al Análisis Plástico de Estructuras (cálculo de sollicitaciones) y no al cálculo de rotura de una sección (dimensionamiento).

### 5.2- HIPOTESIS FUNDAMENTALES



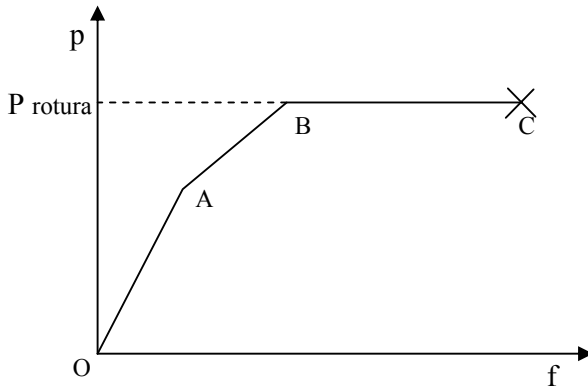
La teoría a desarrollar se basa en la curva tensión- deformación de un material ideal elasto-plástico como el de la figura, muy similar al de hierro dulce, pero que puede ser ampliado a otros materiales con errores aceptables para el análisis de estructuras. Hipótesis de mayor complejidad no están en los objetivos del curso.

Denominamos como AB un tramo perfectamente elástico limitado por  $\sigma_f$ ,  $\epsilon_f$  (tensión y deformación de fluencia) y con BC un campo perfectamente plástico ( $\sigma_f$ ) que termina en C con una deformación específica de rotura  $\epsilon_r$ .



Demás esta decir que al ingresar al campo plástico no es de aplicación el Principio de Superposición.

Si pudiéramos realizar una experiencia sobre una viga de dos tramos sometida a una carga creciente P y medimos la flecha un determinado punto encontraríamos un diagrama p-f como el de la figura siguiente.

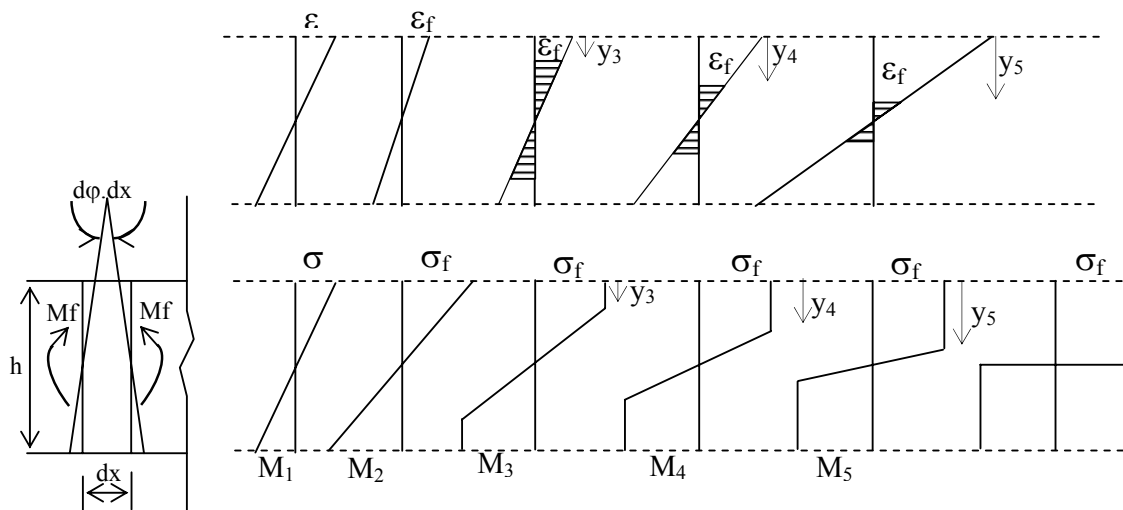


Mas adelante se explicará el fenómeno, pero podemos anticipar que hasta A toda la viga se comporta como elástica. Al llegar a A se produce una rotula plástica en el apoyo intermedio.

Al llegar al punto B se producirán dos rotulas plásticas en los tramos, produciéndose el colapso, como el de la figura, ya que todo el sistema se ha convertido en un mecanismo (inestable)

La otra hipótesis básica que adoptamos es que aun dentro del

fenómeno plástico en un elemento sometido a flexión las secciones planas permanecen planas luego de la deformación.



Sea un momento a aplicar creciente  $M_1 < M_2 < M_3 < M_4 < M_5 \dots$  con un diagrama idealizado tal que se cumple:

$$\text{Para } \varepsilon \leq \varepsilon_f \quad \sigma = E \cdot \varepsilon$$

$$\text{Para } \varepsilon \geq \varepsilon_f \quad \sigma = \sigma_f$$

Para  $M_1$  toda la sección tiene  $\varepsilon < \varepsilon_f$  y por lo tanto en toda la sección  $\sigma < \sigma_f$

Para  $M_2$  la fibra extrema alcanza  $\varepsilon_f$  y por lo tanto la tensión extrema será  $\sigma_f$  siendo  $\sigma < \sigma_f$  en todos los demás puntos.

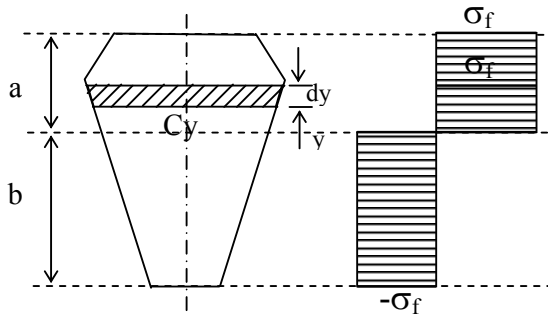
Para  $M_3$  se tendrá  $\varepsilon \geq \varepsilon_f$  en todo el sector  $y_3$  y por lo tanto ese sector estará plastificado con  $\sigma = \sigma_f$  quedando el sector central dentro del campo elástico.

Es inmediato que para  $M_4$  y  $M_5$  crecientes se incrementara la zona plastificada cercana a los bordes, hasta que en el límite (con un pequeño error) podemos considerar que la sección se plastifica totalmente. En ese instante si aumentamos el momento externo, el mismo no podrá ser equilibrado por aumento de tensiones internas.

Este diagrama corresponde al momento plástico resistente  $M_p$ , que es mayor al calculado elásticamente, cuando la primera fibra llega a la tensión  $\sigma_f$  ( $M_2$ )

### 5.3-MOMENTO PLÁSTICO RESISTENTE (Mp)

Recordando el proceso seguido para el estudio de la flexión simple, calculemos el



Momento Plástico Resistente bajo las hipótesis adoptadas. Considerando que la pieza se encuentra sometida a flexión, y a una distancia  $y$  del eje neutro la sección tiene un ancho  $Cy$ .

La fuerza que actúa en el área  $Cy \cdot dy$  será:

$$df = Cy \cdot dy \cdot \sigma_f$$

y como el esfuerzo normal  $N = 0$  será:

$$N = \int_{-b}^a \sigma \cdot Cy \cdot dy = 0$$

$$\int_{-b}^a \sigma \cdot Cy \cdot dy = \int_0^a \sigma_f \cdot Cy \cdot dy - \int_{-b}^0 \sigma_f \cdot Cy \cdot dy = 0$$

$$\int_0^a Cy \cdot dy = \int_{-b}^0 Cy \cdot dy$$

La sección por arriba del eje neutro es igual a la sección por debajo de dicho eje, por lo tanto este divide a la sección en dos partes de áreas iguales, y no es necesariamente baricéntrico salvo en secciones simétricas respecto al eje neutro.

Por equilibrio de momentos:

$$Mp = \int_{-b}^a \sigma \cdot Cy \cdot dy \cdot y = \int_0^a \sigma_f \cdot Cy \cdot y \cdot dy - \int_{-b}^0 \sigma_f \cdot Cy \cdot y \cdot dy = 0$$

$$Mp = \sigma_f \left[ \int_0^a Cy \cdot y \cdot dy - \int_{-b}^0 Cy \cdot y \cdot dy \right] = \sigma_f \cdot Wp$$

$$Wp = \left[ \int_0^a Cy \cdot dy \cdot y - \int_{-b}^0 Cy \cdot dy \cdot y \right]$$

donde denominamos como Modulo Resistente Plástico a  $Wp$  que depende de la geometría de la sección. Será entonces:

$$Wp = \frac{Mp}{\sigma_f}$$

similar al  $Wf$  estudiado en elasticidad, donde:

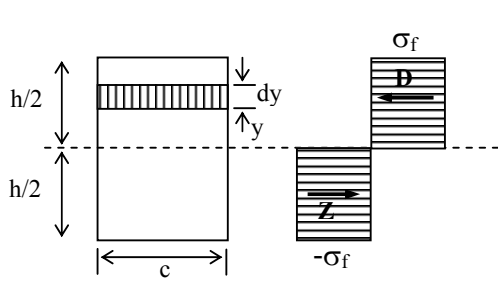
$$Wf = \frac{Mf}{\sigma_f}$$

donde  $Mf$  es el valor del momento que hace entrar en fluencia la fibra mas alejada.

Denominamos con el nombre de **Factor de Forma**, ya que depende del tipo de sección, a la relación:

$$k = \frac{Mp}{Mf} = \frac{Wp}{Wf} > 1$$

A modo de ejemplo analicemos el caso de la sección rectangular:



$$W_f = \frac{c \cdot h^2}{6} \quad W_p = \frac{c \cdot h^2}{12}$$

$$W_p = \int_{-h/2}^{h/2} c \cdot y \cdot dy = \int_0^{h/2} c \cdot y \cdot dy - \int_{-h/2}^0 c \cdot y \cdot dy$$

$$W_p = 2 \cdot \int_0^{h/2} c \cdot y \cdot dy = \frac{c \cdot h^2}{4}$$

$$k = \frac{W_p}{W_f} = 1.5 \quad M_p = 1.5 M_f$$

Vale decir que en el caso de una sección rectangular el momento  $M_p$  límite bajo el régimen plástico es un 50% mayor que el tomado en el régimen elástico cuando se plastifica la primera fibra.

Otra forma rápida de llegar al mismo resultado es la siguiente:

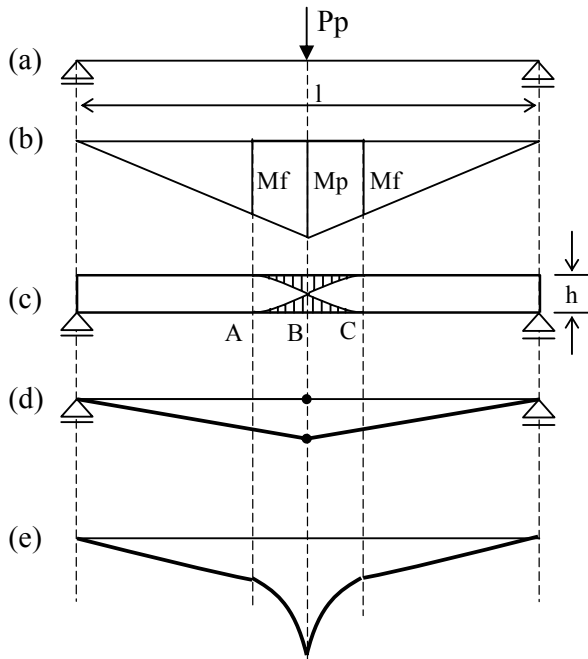
$$D = Z = \sigma_f \cdot \frac{c \cdot h}{2}$$

$$M_p = D \frac{h}{2} = \sigma_f \cdot \frac{c \cdot h^2}{4} \quad W_p = \frac{M_p}{\sigma_f} = \frac{c \cdot h^2}{4}$$

Veamos el valor de  $k$  para algunas secciones usuales

SECCION						
$k = \frac{W_p}{W_f}$	1,00	1,15 a 1,17	1,27	1,50	1,70	2,00

**5.4-ZONAS DE PLASTIFICACION: LA ROTULA PLASTICA**



Consideremos una viga simplemente apoyada con una carga  $P_p$  en el centro, que produce un momento  $M_p$  como indica la figura(b):

$$M_p = \frac{P_p \cdot l}{4}$$

LA figura (c) muestra una vista de la viga donde en el tramo ABC se sombrea la parte plastificada con:

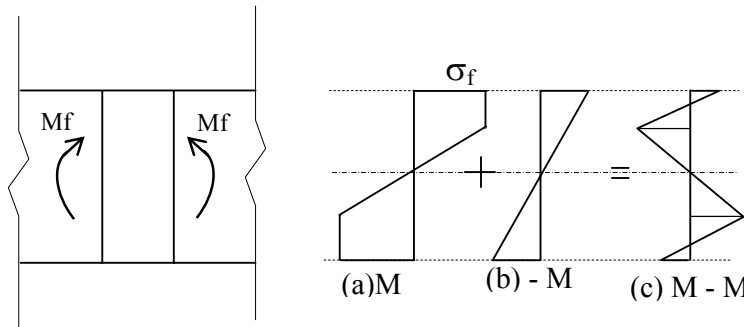
$$M_f \leq M \leq M_p$$

que está en estado elasto-plástico, excepto la sección B que se encuentra totalmente plastificada y en la cual se ha formado una rotula plástica que convierte al sistema en un mecanismo inestable (figura (d)). Los demás tramos se encuentran en régimen elástico.

Mientras en la zona elástica la curvatura es pequeña, en la zona elasto-plástica se incrementa rápidamente hasta alcanzar valores muy grandes para el punto B, que funciona como una “rotula plástica” (figura (e)) que es una rótula o articulación, (en lugar de ser libre, con  $M = 0$ ) que trabaja como si tuviera un rozamiento y con un  $M = M_p$ . Esto nos permite idealizar como un mecanismo de rotura o colapso al de la figura (d).

**5.5-TENSIONES INICIALES Y RESIDUALES**

En la practica una barra, debido a diversas causas como ser procesos de laminado en perfiles, contracciones por fragüe en hormigón armado, proceso de armado, etc., estará sometida a tensiones iniciales que no dependen del estado de cargas exteriores.



A dicho estado en equilibrio para  $N=0$ ,  $M=0$ ,  $Q=0$  lo denominamos “estado de autotensión”, en el cual las tensiones iniciales realmente existen. Estas tensiones realmente influyen en las tensiones de régimen elástico, pero

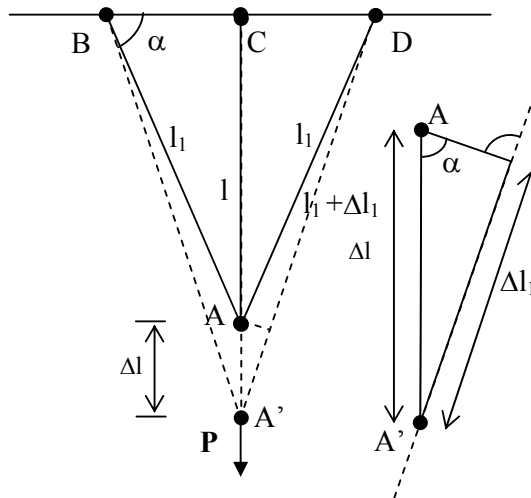
en general no se consideran por distintas causas, entre las cuales es importante el hecho de que dichas tensiones iniciales no influyen en la carga de rotura ya que el diagrama de rotura de la sección es el mismo, produciéndose una redistribución de las tensiones en el proceso de fluencia del material.

Veamos que pasa en la reacción que debido a un proceso de carga esta en estado elasto-plástico con  $M_f < M < M_p$ , como se indica en (a).

Si a partir de allí descargamos la sección mediante la aplicación de  $-M$  como se indica en el diagrama de tensiones elásticas (b), de la superposición de (a) + (b) tendremos el diagrama de tensiones residuales (c), que es un estado de autotensión en equilibrio con  $M=0$ .

A los efectos de un nuevo proceso de carga, el estado de tensiones residuales actúa como si fueran tensiones iniciales.

**5.6-SISTEMA HIPERESTATICO DE TRES BARRAS TRACCIONADAS**



Sean tres barras de igual sección  $\Omega$ , sobre las cuales en el nudo A actúa una carga P cuyo valor se irá incrementando.

Para un valor P de la carga se producirá una deformación de las barras y b un desplazamiento de A hasta A' de valor  $\Delta l$ .

De la figura es inmediato que:

$$l_1 = \frac{l}{\text{sen } \alpha} \quad \Delta l_1 = \Delta l \cdot \text{sen } \alpha$$

El sistema es hiperestático de primer grado y por lo tanto necesitaremos plantear para calcular las sollicitaciones en

las tres barras tres ecuaciones, dos de equilibrio y una de compatibilidad de deformaciones.

Por simetría, o por sumatoria de fuerzas horizontales  $\Sigma F_x = 0$  se obtiene que las tensiones en las barras laterales son iguales a  $(\sigma_1 \cdot \Omega)$ .

Denominamos con  $\sigma$  a la tensión normal en la barra central y planteando sumatoria de fuerzas verticales  $\Sigma F_y = 0$  se obtiene:

$$P = \sigma \cdot \Omega + 2 \cdot \sigma_1 \cdot \Omega \cdot \text{sen } \alpha$$

$$\text{Planteo ahora la condición de deformación: } \Delta l_1 = \Delta l \cdot \text{sen } \alpha$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta l_1}{l_1} = \frac{\Delta l}{l} \text{sen}^2 \alpha = \varepsilon \text{sen}^2 \alpha \quad \rightarrow \quad \sigma = E \cdot \varepsilon \quad \sigma_1 = E \cdot \varepsilon_1$$

$$\sigma_1 = \sigma \text{sen}^2 \alpha \quad \text{Siendo } \sigma_1 < \sigma$$

Remplazando en la ecuación de equilibrio

$$P = \sigma \cdot \Omega (1 + 2 \text{sen}^3 \alpha)$$

Con lo cual para una carga P obtenemos las tensiones:

$$\sigma = \frac{P}{\Omega (1 + 2 \text{sen}^3 \alpha)}$$

$$\sigma_1 = \frac{P \cdot \text{sen}^2 \alpha}{\Omega (1 + 2 \text{sen}^3 \alpha)}$$

Si aumentamos la carga P hasta que para  $P_f$  comience la fluencia en la barra central se cumplirá:

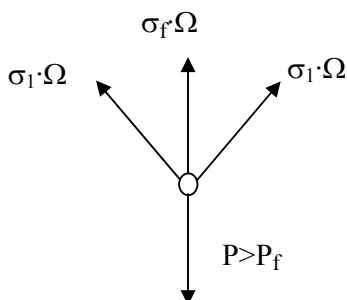
$$\sigma = \sigma_f = \frac{P_f}{\Omega (1 + 2 \text{sen}^3 \alpha)} \quad \sigma_1 = \frac{P_f \cdot \text{sen}^2 \alpha}{\Omega (1 + 2 \text{sen}^3 \alpha)} < \sigma_f$$

y la carga será:

$$P_f = \sigma_f \cdot \Omega (1 + 2 \text{sen}^3 \alpha)$$

no pudiendo aumentar a un valor mayor la sollicitación en la barra central, que esta en fluencia con  $\sigma = \sigma_f$  lo cual no implica que se rompa, pues no ha llegado a  $\varepsilon_r$  sino a  $\varepsilon_f$ .

A partir de allí para incrementos de P que hagan que  $P > P_f$ , como la barra central permanece con una tracción igual a  $\sigma_\Omega = \sigma_f \cdot \Omega$  las cargas en A serán las de la figura y se cumplirá:



$$P_f = \sigma_f \cdot \Omega + 2 \sigma_1 \Omega \text{sen } \alpha$$

$$\sigma_1 = \frac{P - \sigma_f \cdot \Omega}{2 \Omega \text{sen } \alpha}$$

Si seguimos incrementando P llegará a  $P_p$  para la cual  $\sigma_1 = \sigma_f$  las tres barras entran en fluencia, el sistema es inestable y entra en colapso:

$$\sigma_1 = \sigma_f = \frac{P_p - \sigma_f \cdot \Omega}{2 \Omega \text{sen } \alpha} \quad P_p = \sigma_f \cdot \Omega (1 + 2 \text{sen } \alpha)$$

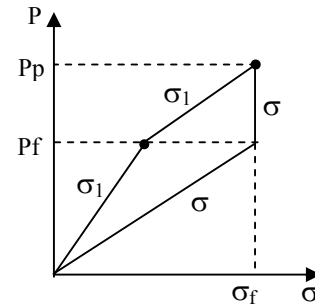
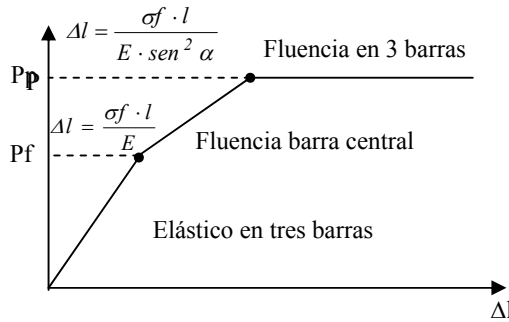
donde  $P_p$  es la carga límite de rotura.

Veamos que a pasado con el sistema hiperestático de primer grado. Al llegar  $P = P_f$  se plastifica una barra que pasa a deformarse a una tensión constante, el sistema elimina un vínculo (barra central) y es un isostático que al llegar a  $P = P_p$  se convierte en un mecanismo de colapso.

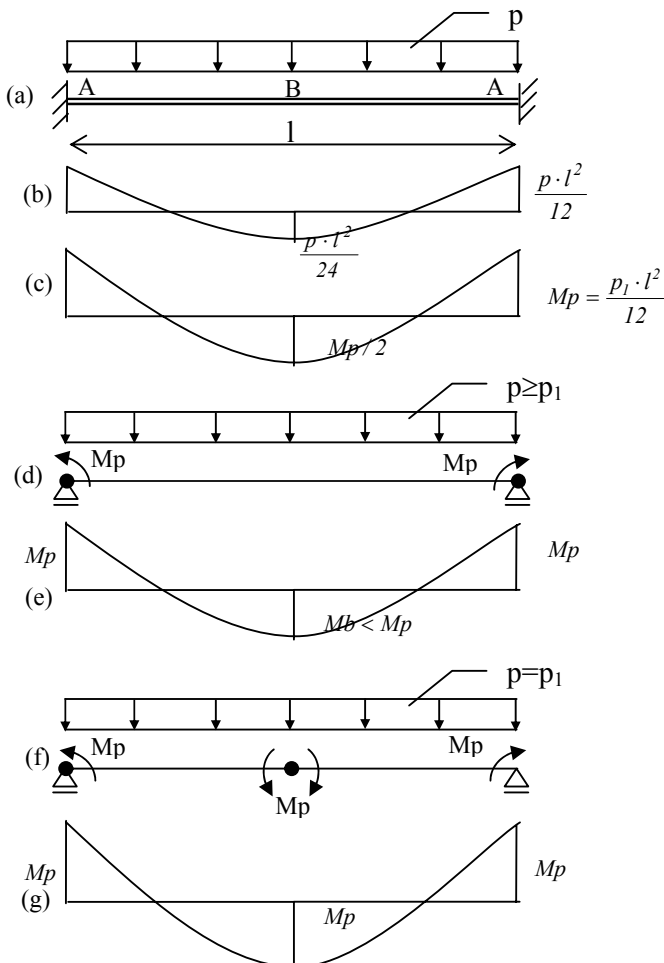
Analicemos ahora la relación entre la carga  $P_p$  de colapso real y la calculada en régimen elástico  $P_f$ :

$$k = \frac{P_p}{P_f} = \frac{(1 + 2 \operatorname{sen} \alpha)}{(1 + 2 \operatorname{sen}^3 \alpha)} > 1 \quad P_p > P_f \quad \text{Será: } \begin{matrix} \alpha = & 30^\circ & 45^\circ & 60^\circ & 90^\circ \\ k = & 1,60 & 1,41 & 1,19 & 1,10 \end{matrix}$$

En la cual apreciamos que para  $\alpha = 45^\circ$  tenemos a partir de  $P_f$  una reserva plástica del 41%. Nos interesa, si bien es fácilmente calculable un análisis cualitativo de las relaciones entre  $P$  y  $\Delta l$ ;  $P$  y  $\sigma$  que es inmediato en los gráficos.



**5.7-VIGA EMPOTRADA-EMPOTRADA**



Sistema hiperestático sometido a flexión con una barra que resiste  $M_p = \sigma_f \cdot W_p$  y con una carga uniforme  $p$ . El diagrama (b) de momentos en el campo elástico:

$$M_A = \frac{p \cdot l^2}{12} \quad ; \quad M_B = \frac{p \cdot l^2}{24}$$

Al aumentar la carga  $p$  se llegara a una  $p = p_1$  para la cual se produce la rotula plástica en los apoyos A (fig. c)

$$M_A = M_p = \frac{p_1 \cdot l^2}{12}$$

$$M_B = \frac{p_1 \cdot l^2}{24} = \frac{M_p}{2}$$

con 
$$p_1 = \frac{12M_p}{l^2}$$

A partir de esta carga los apoyos permanecerán con un momento  $M_A = M_p$  y no podrán absorber nuevos incrementos de momentos, comenzando a trabajar la viga como si fuese simplemente apoyada por la aparición de dos rótulas plásticas (d).

Continuando el incremento de p se llegará a  $p = p_p$  para la cual se alcanza en el tramo el valor  $M_B = M_p$  y se produce una nueva rótula plástica (f) y (g). Se cumple:

$$p_p = p_l + \Delta_p = \frac{12M_p}{l^2} + \Delta_p$$

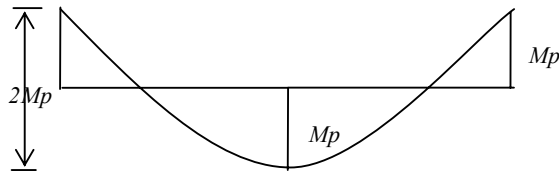
$$M_B = \frac{M_p}{2} + \frac{\Delta_p \cdot l^2}{8} = M_p \quad \therefore \Delta_p = \frac{4M_p}{l^2} \quad p_p = \frac{4M_p}{l^2}$$

Definimos como un nuevo valor de k que depende de el grado de hiperestaticidad del sistema;

$$k = \frac{p_p}{p_l} = \frac{16}{14} = 1,33$$

Existe a partir de la plastificación de los apoyos una reserva plástica del 33%.

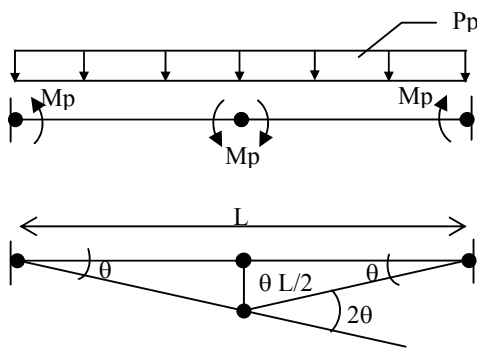
Hemos visto el proceso de cómo se produce el colapso y la forma de llegar a la carga critica  $P_p$  siguiendo paso a paso la formación de las articulaciones plásticas. Otra forma de hallar  $P_p$  sería tener en cuenta el diagrama de rotura:



$$2 \cdot M_p = \frac{P_p \cdot l^2}{8}$$

$$P_p = 16 \frac{M_p}{l^2}$$

Algo similar ocurre si planteamos el principio de los trabajos virtuales a un mecanismo de rotura, lo cual da origen al método cinemático o del mecanismo:



$$P_p \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{l\theta}{2} - M_p\theta - 2M_p\theta - M_p\theta = 0$$

$$\frac{1}{4} \cdot P_p \cdot l^2 \theta = 4M_p\theta$$

$$P_p = 16 \frac{M_p}{l^2}$$

### 5.8-TEOREMAS FUNDAMENTALES DEL ANÁLISIS PLÁSTICO

Los métodos de calculo en sistemas sometidos a flexión consisten en encontrar diagramas de solicitaciones que cumplan con las siguientes condiciones básicas:

- Cumplir con las condiciones de equilibrio
- Por la formación de articulaciones plásticas convertir a la estructura en un mecanismo (inestable).
- No violar la condición de plasticidad que nos indica que se debe cumplir con  $M \leq M_p$ .

Las cargas  $P_p$  que cumplan con estas condiciones serán las cargas límite o de colapso. A veces es dificultoso encontrar el valor de  $P_p$ , pero es posible acotarlo entre dos valores  $P_e$  y  $P_c$  de manera tal que:



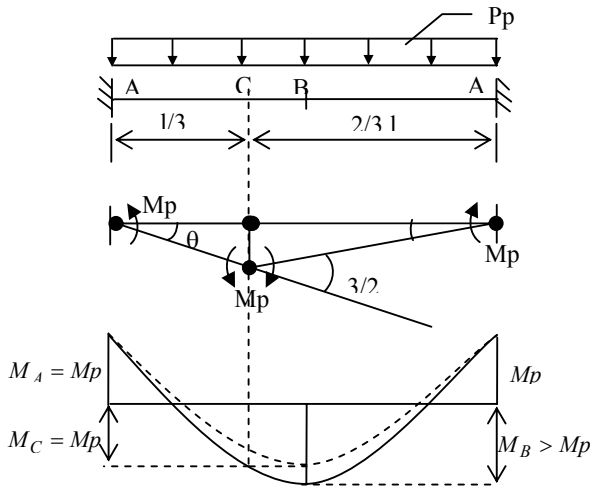
$$P_e \leq P_p \leq P_c$$

con lo cual obtenemos un valor de  $P_p$  aproximado con un error máximo conocido, lo cual tiene gran interés práctico. Por ejemplo, si suponemos un mecanismo de rotura (Método Cinemático) que en algún punto viola las condiciones de plasticidad al ser  $M > M_p$ , del cálculo obtendríamos una  $P_c$  mayor que la verdadera carga límite  $P_p$ .

Por otra parte, de un diagrama en equilibrio que no viola la condición  $M \leq M_p$  pero que no alcanza a producir el número suficiente de articulaciones plásticas para hacer inestable a la estructura se puede obtener una  $P_e$  menor que la verdadera  $P_e$ .

**Greemberg y Prager** en la década del 50 plantearon los teoremas del Límite Superior y del Límite Inferior, cuyo cumplimiento simultáneo en un problema da solución correcta a  $P_p$ .

**5.8.1-TEOREMA DEL LIMITE SUPERIOR**



“Una carga  $P_c$  calculado basándose en un mecanismo de rotura supuesto será mayor o al menos igual a la verdadera carga límite  $P_p$ ”

Consideremos la viga ya estudiada en 5.7 en la cual supongo articulaciones plásticas en A, C.

$$P_c \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot \theta \cdot \frac{l}{3} = M_p \theta + M_p \cdot \frac{3}{2} \theta - M_p \frac{\theta}{2}$$

$$\frac{1}{6} \cdot P_c \cdot l^2 \theta = 3M_p \theta$$

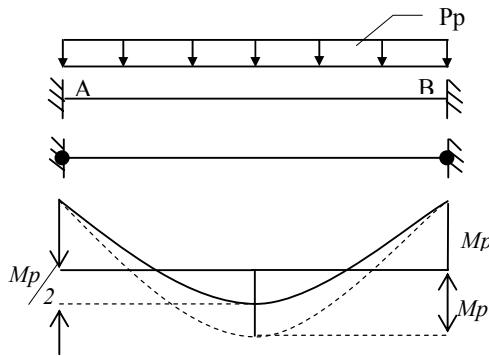
$$P_c = 18 \frac{M_p}{l^2} > P_p$$

Viola la condición de plasticidad  $M \leq M_p$  ya que en el momento  $M_B$  en el medio del tramo será:

$$M_B = \frac{P_c \cdot l^2}{8} - M_p = \frac{18}{8} M_p - M_p = 1,25 M_p > M_p$$

Solamente si elegimos el mecanismo verdadero tendremos la verdadera carga límite, cumpliéndose  $P_c = P_p$  (5.7 (f)).

**5.8.2-TEOREMA DEL LIMITE INFERIOR**



"Una carga  $P_e$  calculada basándose en un diagrama de solicitaciones internas en equilibrio de manera que se cumpla que  $M \leq M_p$  será menor o a lo sumo igual a la verdadera carga límite  $P_p$ ".

Veamos el caso (c) del [5.7]

$$M_p + \frac{M_p}{2} = \frac{P_e l^2}{8}$$

$$P_e = 12 \frac{M_p}{l^2} < P_p$$

No alcanza a producir la tercer rótula plástica que produciría el mecanismo.

Sólo si eligiéramos el verdadero diagrama tendríamos la real carga límite  $P_e = P_p$  (5-6) (g)

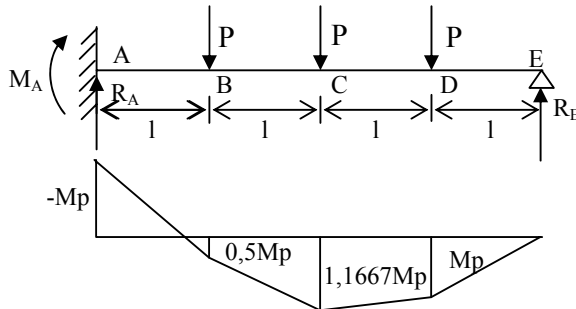
### 5.9-MÉTODO ESTÁTICO

Está basado en el teorema del Límite Inferior y consiste en estudiar un diagrama de momentos (solicitaciones) en equilibrio bajo cargas hiperestáticas y que en lo posible produzcan la mayor cantidad de rotulas plásticas sin violar la condición de plasticidad.

De cada diagrama estudiado obtendremos  $Pe \leq Pp$ . La mayor de todas ellas será  $Pe = Pp$  y producirá el mecanismo de colapso.

Vamos a un ejemplo sencillo con el fin docente de comprender el método:

Sea un sistema sencillo hiperestático de 1° grado y por lo tanto necesitará 2 articulaciones plásticas donde  $M = Mp$  para el colapso.



De acuerdo con las condiciones de equilibrio y considerando positivos los momentos que producen tracción en las fibras inferiores:

$$M_A = -6 \cdot P \cdot l + 4 \cdot R_E \cdot l$$

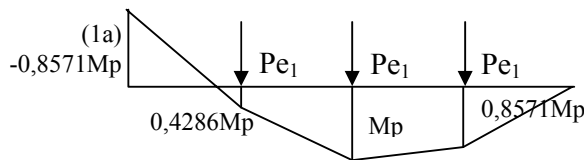
$$M_B = -3 \cdot P \cdot l + 3 \cdot R_E \cdot l$$

$$M_C = -P \cdot l + 2 \cdot R_E \cdot l$$

$$M_D = R_E \cdot l$$

Donde tenemos 6 variables ( $M_A$ ,  $M_B$ ,  $M_C$ ,  $M_D$ ,  $P$ ,  $R_E$ ) y 4 ecuaciones, con lo cual fijando 2 de las variables es posible calcular las otras cuatro.

Veamos 3 casos distintos donde intentamos plastificar 2 secciones en cada caso:



$$(1) M_A = -Mp = -6 \cdot P \cdot l + 4 \cdot R_E \cdot l$$

$$M_D = Mp = R_E \cdot l$$

$$R_E = \frac{Mp}{l} ; P_1 = \frac{5 \cdot Mp}{6 \cdot l} = 0,8333 \frac{Mp}{l}$$

$$M_B = 0,5Mp$$

$$M_C = 1,1667Mp$$

$$\text{Con la carga } Pe_1 = \frac{P_1}{1,1667} = 0,7142 \frac{Mp}{l}$$

obtenemos el diagrama que cumple con el equilibrio en la figura(1a) siendo  $Pe_1 < Pp$

(2) Tomemos ahora:

$$M_A = -Mp = -6 \cdot P \cdot l + 4 \cdot R_E \cdot l$$

$$M_B = Mp = -3 \cdot P \cdot l + 3 \cdot R_E \cdot l$$

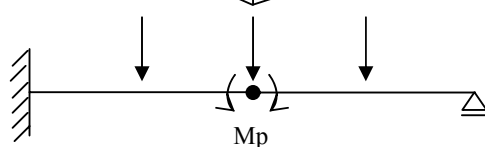
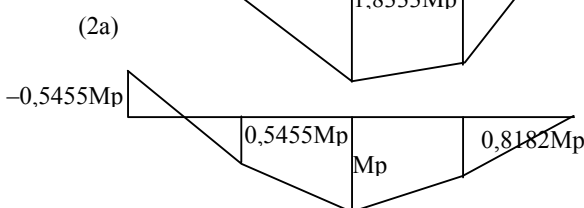
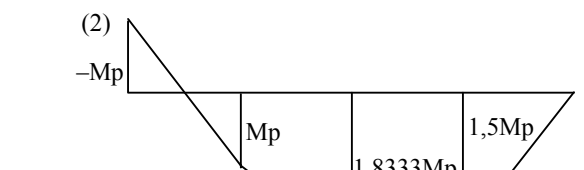
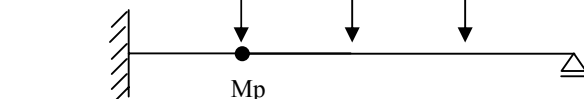
$$R_E = 1,5 \frac{Mp}{l} ; P_2 = 1,1666 \frac{Mp}{l}$$

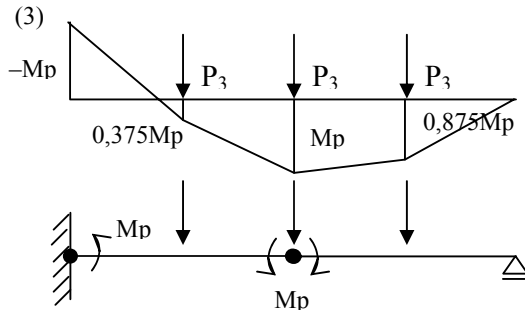
$$M_C = 1,8333Mp$$

$$M_D = 1,5Mp$$

$$\text{Con la carga } Pe_2 = \frac{P_2}{1,8333} = 0,6363 \frac{Mp}{l}$$

obtenemos el diagrama de la figura (2a) con  $Pe_2 < Pp$





(3) Analizamos ahora el caso siguiente:

$$M_A = -Mp = -6 \cdot P_3 \cdot l + 4 \cdot R_E \cdot l$$

$$M_C = Mp = - \cdot P_3 \cdot l + 2 \cdot R_E \cdot l$$

$$R_E = 0,875 \frac{Mp}{l} ; P_2 = 0,75 \frac{Mp}{l}$$

$$M_C = 0,375Mp$$

$$M_D = 0,875Mp$$

Con lo cual al ser un mecanismo que no viola en ninguna sección la condición de plasticidad  $M \leq Mp$  se cumplirá que  $P_3 = Pe_3 = Pp = 0,75 \frac{Mp}{l}$ , que es la verdadera carga limite de colapso, siendo  $Pe_3$  la mayor de todas las  $Pe_i$  obtenidas por el Método Estático.

### 5.10-MÉTODO CINEMÁTICO O DEL MECANISMO

Esta basado en el teorema del Limite Superior y consiste en estudiar posibles mecanismos de rotura por aparición de articulaciones plásticas en distintos puntos, y en cada caso hallar la carga crítica de equilibrio. La verdadera  $Pp$  es la que no viola la condición  $M \leq Mp$  y será la menor de todos los posibles Mecanismos.

A medida que aumenta el número de elementos y el número de cargas aumenta también el número posible de mecanismos de rotura, entre los cuales debemos encontrar el verdadero, ya que los demás me darán limites superiores.

El proceso a seguir es el siguiente:

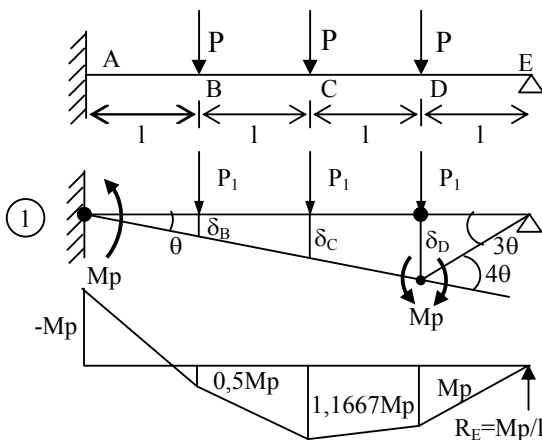
a) Determinéense los posibles puntos de articulaciones plásticas. (puntos de cargas, nudos, cambios de sección. etc.).

b) Selecciónese los mecanismos posibles.

c) Calcúlese la carga de equilibrio por Método de los Trabajos Virtuales para cada mecanismo.

d) La mínima de todas las cargas halladas será la carga límite y cumplirá la condición  $M \leq Mp$  en todos sus puntos. Si al calcular alguna de las cargas apreciamos que esta no viola la condición, no es necesario seguir probando con otros mecanismos.

Analizaremos al problema del tema 5.9



Supongamos articulaciones plasticas en A y D. Demos un desplazamiento virtual  $\theta$  y apliquemos el P.T.V.:

$$\sum P \cdot \delta + \sum M\theta = 0 \quad \text{con}$$

$$\delta_B = \theta \cdot l ; \delta_C = 2\theta \cdot l ; \delta_D = 3\theta \cdot l$$

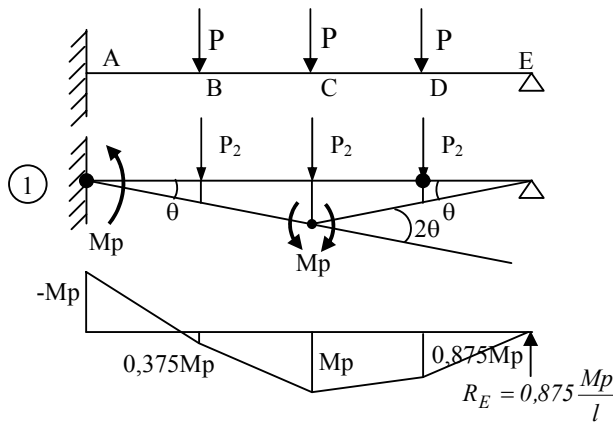
$$P_1 l \theta + P_1 l \cdot 2\theta + P_1 l \cdot 3\theta - Mp\theta - Mp4\theta = 0$$

$$6P_1 l \theta = 5Mp\theta$$

$$P_1 = \frac{5 Mp}{6 l}$$

Cuyo diagrama viola la condición de plasticidad, ya que  $M_c = 1.1667 M_p$ , y por lo tanto  $P_1 > P_p$ .

Analicemos ahora el verdadero mecanismo de rotura, que ya sabemos produce rotulas plásticas en A y C



$$P_2 l \theta + P_2 l \cdot 2\theta + P_2 l \theta - M_p \theta - M_p 2\theta = 0$$

$$4P_2 l \theta = 3M_p \theta$$

$$P_2 = 0,75 \frac{M_p}{l}$$

Cuyo diagrama de momentos esta en la figura y al no violar la condición de plasticidad será:

$$P_2 = P_p = 0,75 \frac{M_p}{l}$$

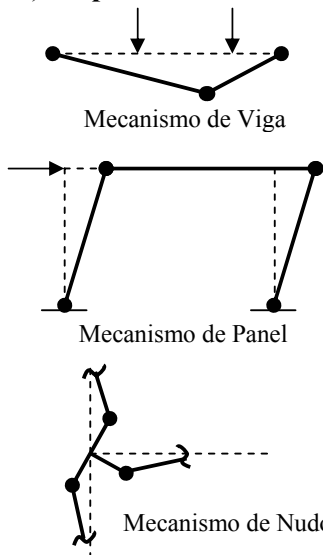
no siendo necesarias nuevas pruebas.

### 5.10.1-ANÁLISIS DE PORTICOS POR EL METODO DEL MECANISMO

Los casos de vigas son en la práctica de fácil resolución, por lo que los hemos elegido para ejemplificar los métodos.

Aplicemos ahora el Método del Mecanismo a un pórtico sencillo que nos sea útil para definir algunas referencias de interés general:

#### a) Tipos de mecanismos



Existen entre otros, tres tipos de mecanismos básicos que quedan suficientemente ejemplificados por las figuras.

Además, en cada caso particular existen mecanismos compuestos formados por la combinación de mecanismos más simples o de otros mecanismos compuestos.

#### b) Número de mecanismos linealmente independientes

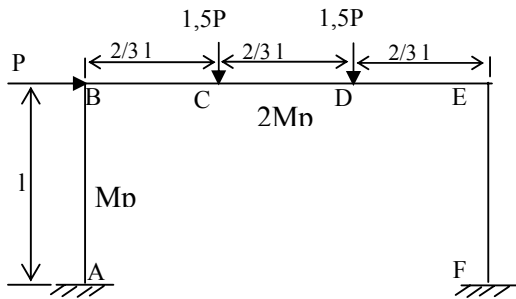
Un mecanismo se denomina “linealmente independiente” de los mecanismos  $X_1, X_2, \dots, X_n$  si no es posible construir el mecanismo M por medio de la combinación lineal de los mecanismos  $X_i$ .

Denominamos como  $N_p$  al número posible de articulaciones plásticas (nudos, quiebres, puntos de discontinuidad o cambio de sección, lugar de aplicación de cargas puntuales, etc.) y con  $N_x$  el grado de hiperestaticidad del sistema. El número N de mecanismos linealmente independientes se obtiene de la expresión:

$$N = N_p - N_x$$

**c) Geometría del movimiento**

En los casos sencillos la forma de desplazamiento se halla por una simple inspección del mecanismo en estudio. Con barras inclinadas o en sistemas complicados suele convenir o es necesaria la utilización de los centros instantáneos o relativos de rotación para el estudio de la cadena cinemática.



Planteemos el método sobre un pórtico como el de la figura en el cual las columnas resisten  $M_p$  y la viga se plastifica con  $M = 2 M_p$ . En los nudos B y E la plastificación se produce sobre la barra de la columna con  $M = M_p$

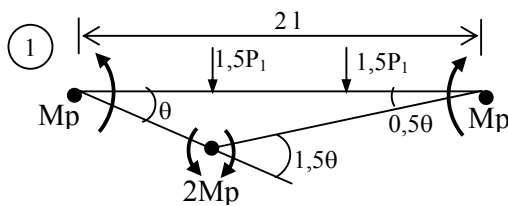
En este caso:

$$N_p = 6$$

$$N_x = 3$$

$$N = N_p - N_x = 3$$

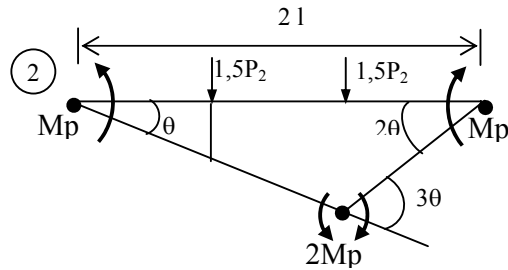
**1) Mecanismo de viga**



$$1,5 \cdot P_1 \cdot \frac{2}{3} l \cdot \theta + 1,5 P_1 \cdot \frac{2}{3} l \cdot 0,5 \cdot \theta -$$

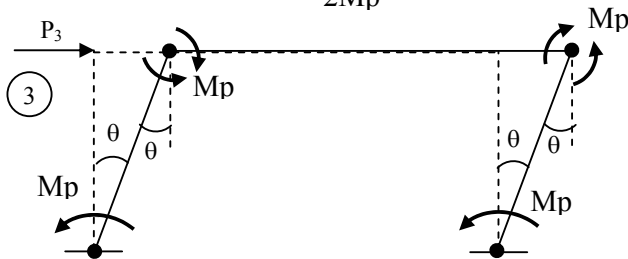
$$M_p \cdot \theta - 2 M_p \cdot 1,5 \cdot \theta - M_p \cdot 0,5 \cdot \theta = 0$$

$$1,5 \cdot P_1 \cdot l = 4,5 M_p \quad \therefore P_1 = 3 \frac{M_p}{l}$$



**2) Mecanismo de viga**  
 Con un planteo similar:

$$3 \cdot P_2 \cdot l \cdot \theta = 9 M_p \cdot \theta \quad \therefore P_2 = 3 \frac{M_p}{l}$$

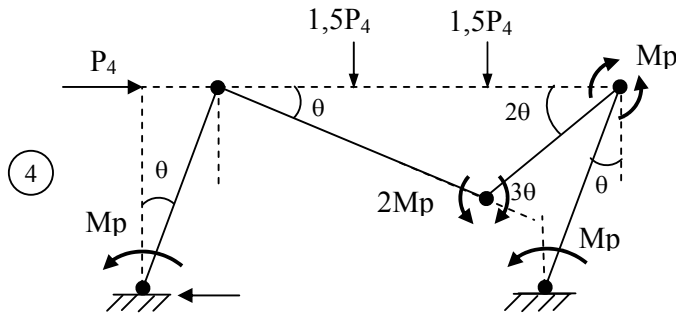


**3) Mecanismo de panel**

$$P_3 \cdot l \cdot \theta = 4 M_p \cdot \theta \quad \therefore P_3 = 4 \frac{M_p}{l}$$

Los 3 mecanismos vistos pueden actuar como mecanismos linealmente independientes y por lo tanto cualquier otro mecanismo será combinación lineal de estos.

Estudiemus dos mecanismos combinados de los cuales demostraremos que el segundo es el verdadero



4) Mecanismo combinado 2)+3)

Por aplicación del P.T.V.:

$$4 \cdot P_4 \cdot l \cdot \theta = 11M_p \cdot \theta$$

$$\therefore P_4 = 2,75 \frac{M_p}{l}$$

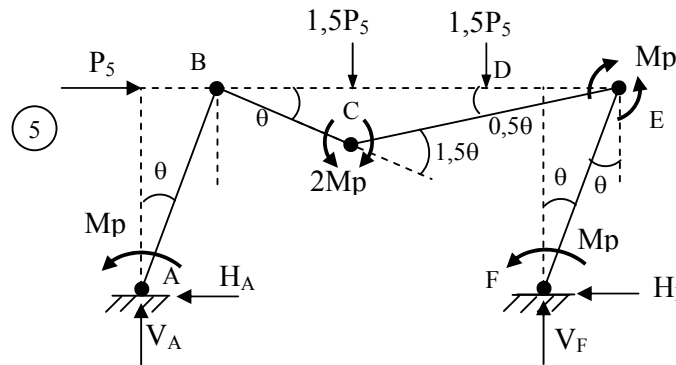
5) Mecanismo combinado 1) + 3)

Por aplicación del P.T.V.:

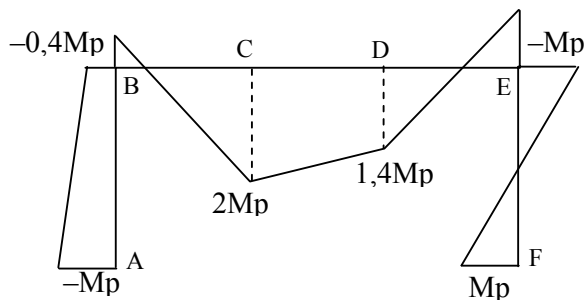
$$2,5 \cdot P_5 \cdot l \cdot \theta = 6,5M_p \cdot \theta$$

$$\therefore P_5 = 2,6 \frac{M_p}{l}$$

De todos los mecanismos hemos obtenido distintos  $P_i$ , que sabemos que son  $P_i \geq P_p$ , por lo cual es prudente verificar si el menor de todos los  $P_i$  (el  $P_5 = 2,6 \frac{M_p}{l}$ ) no es el  $P_p$ .



Para que esto se cumpla no debe violar la condición de plasticidad, siendo en toda la estructura el  $M \leq M_p$  de cada elemento. Llamando con momentos positivos a los que dan tracción en las fibras internas, sabemos que los momentos en A; C; E; F valen:



Los momentos en A; C; E; F valen:

$$\begin{aligned} M_A &= -M_p \\ M_C &= 2M_p \\ M_E &= -M_p \\ M_F &= M_p \\ P_5 &= 2,6 \frac{M_p}{l} \end{aligned}$$

Calculamos las reacciones H y V y los momentos D y B

$$M_E = -M_p = M_p - H_E \cdot l \quad \therefore H_F = 2 \frac{M_p}{l}$$

$$H_A + H_B - P_5 = 0 \quad \therefore H_A = 0,6 \frac{M_p}{l}$$

$$M_C = 2M_p = M_p - H_F \cdot l + V_F \cdot l \cdot \frac{4}{3} - 1,5P_5 \cdot \frac{2}{3} \quad \therefore V_F = 4,2 \frac{M_p}{l}$$

$$V_A + V_F - 1,5P_5 - 1,5P_5 = 0 \quad \therefore V_A = 3,6 \frac{M_p}{l}$$

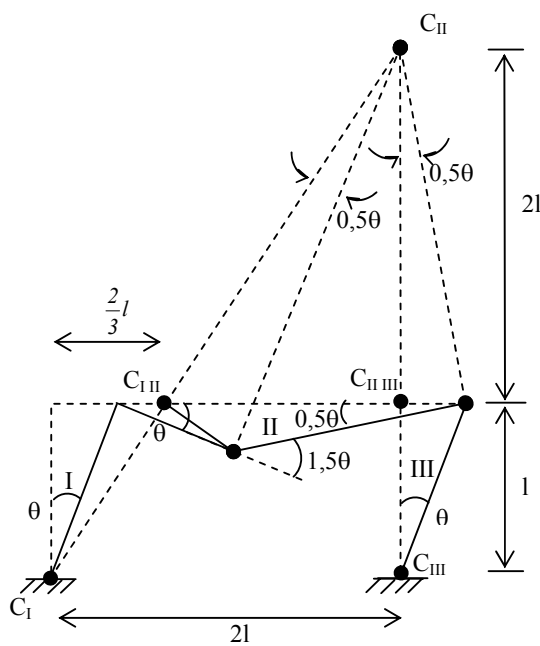
$$M_D = M_p - H_F \cdot l + V_F \cdot \frac{2}{3}l = 1,4M_p < (2M_p)$$

$$M_B = M_p - H_F \cdot l + V_F \cdot 2l - 1,5P_5 \cdot \frac{4}{3}l - 1,5P_5 \cdot \frac{2}{3}l = -0,4M_p < M_p$$

Con el objeto de verificar calculamos  $M_B$  con cargas a la izquierda de la sección

$$M_B = Mp - H_A \cdot l = -0,4Mp$$

Como este mecanismo no viola la condición de plasticidad será:



$P_5 = Pp = 2,6 \frac{Mp}{l}$  y el diagrama de momentos es el de la figura.

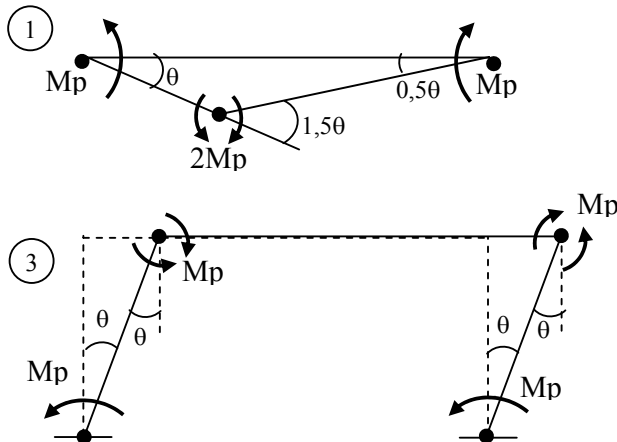
La deformación del mecanismo podría haberse sintetizado estudiando los centros de rotación en la teoría de la cadena cinemática.

Así definimos los centros instantáneos  $C_I$ ;  $C_{III}$  para los elementos ABC (I) y EF(III). Definimos también los centros relativos  $C_{I-II}$ ;  $C_{II-III}$  en C y E y como  $C_{II}$  debe estar alineado con  $C_I$ ;  $C_{I-II}$  y además con  $C_{III}$ ;  $C_{II-III}$  queda perfectamente definido.

Con esto queda definido el desplazamiento del mecanismo estudiado.

**5.10.2-MÉTODO DE COMBINACION DE MECANISMOS**

En el tema anterior supongamos haber llegado al mismo por la superposición de los mecanismos (1) mas (3).



Por el P.T.V. podríamos llegar:

$$(1) 1,5P \cdot l \cdot \theta = 4,5Mp\theta$$

$$(2) P \cdot l \cdot \theta = 4,0Mp\theta$$

Donde los trabajos a la izquierda del signo igual son los de las cargas P, quedando a la derecha los de los Mp en las articulaciones, por lo cual se pueden sumar de la siguiente forma.

$$(1,5P \cdot l\theta)_1 + (P \cdot l\theta)_2 =$$

$$(4,5Mp\theta)_1 + (4Mp\theta)_2 - (Mp\theta + Mp\theta)^*$$

El subíndice 1 y 2 indican los mecanismos sumados y el \* que restamos proviene de que en (1) sumamos  $Mp\theta$  en el nudo B y otra vez lo sumamos a  $Mp\theta$  en (2) cuando al desaparecer la rótula los  $\theta$  darían  $+Mp\theta$  y  $-Mp\theta$ , que se anulan en lugar de sumarlos

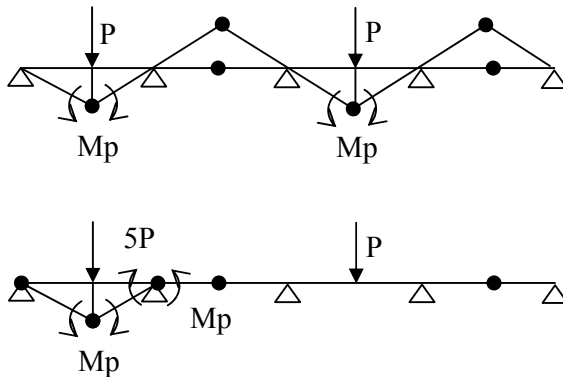
$$(1,5 + 1)P \cdot l\theta = (4,5 + 4 - 2)Mp\theta$$

$$2,5P \cdot l\theta = 6,5Mp\theta \quad \therefore \quad P = 2,6 \frac{Mp}{l}$$

que es el resultado hallado anteriormente para el caso (5).

## 5.11 – CONSIDERACIONES ESPECIALES

### 5.11 1– COLAPSO PARCIAL



Se da en el caso que por rotura de un elemento muy débil no se llega al mecanismo de colapso total produciendo una rotura de un sector de la estructura, quedando los otros sectores resistiendo las cargas extremas.

A fin de ejemplificarlo tomemos el caso de una viga continua y comparemos en forma cualitativa un colapso parcial con un colapso total.

### 5.11 2– DEFORMACIONES

En general, la aplicación del análisis límite genera un mejor aprovechamiento del material dando como resultado menores secciones que las diseñadas por métodos elásticos, por lo cual deben ser tenidas en cuenta en forma especial la deformabilidad de las estructuras al disminuir las rigideces.

El estudio de las deformaciones se puede calcular en el estado de rotura ya que hasta ese instante conocemos el diagrama de solicitaciones y el sistema es un isostático. A estas deformaciones las debemos reducir (como calculo aproximado) en forma proporcional al coeficiente de seguridad (relación entre la carga de servicio y la carga de rotura).

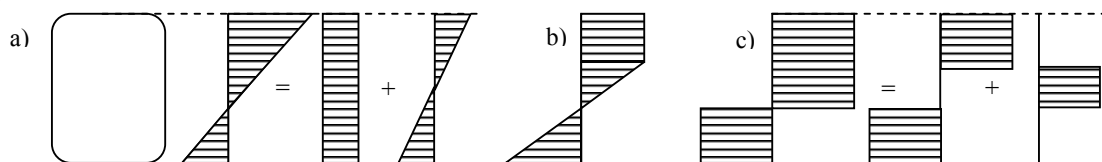
Otro método consiste en calcular las deformaciones bajo cargas de servicio aplicando métodos de análisis elásticos.

Algunos autores aconsejan aplicar en forma conservadora las condiciones de rigidez reglamentarias cuando el calculo se realiza por Método Plástico.

### 5.11 3– INFLUENCIA DEL ESFUERZO NORMAL EN EL ELEMENTO PLASTICO

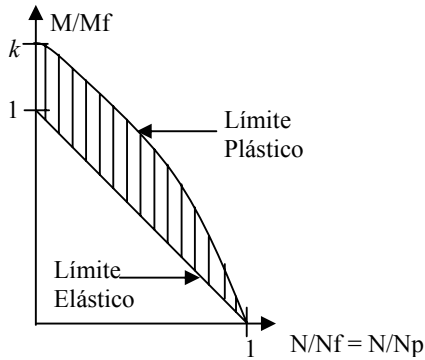
Además de otros efectos el esfuerzos normal  $N$  tiende a reducir el momento plástico que resiste la sección, hecho que puede tener importancia en columnas de planta baja en pórticos de varios pisos.

A efectos de visualizar el problema, indicamos en la figura siguiente los diagramas de flexo-compresión en tres casos: a) campo elástico; b) Campo elasto-plástico y c) campo plástico.



Si con  $M_p$  y  $M_f$  denominamos los momentos flectores donde para  $N = 0$  existe plastificación total y comienza la plastificación; y con  $N_p = N_f$  denominamos la carga de plastificación con esfuerzo normal exclusivamente, se pueden para distintos pares de valores  $M$  y  $N$  que actuando simultáneamente plastifiquen la sección dibujar “curvas de interacción” entre  $M$  y  $N$  que dependerán del tipo de sección y cualitativamente tendrán la forma de la figura.





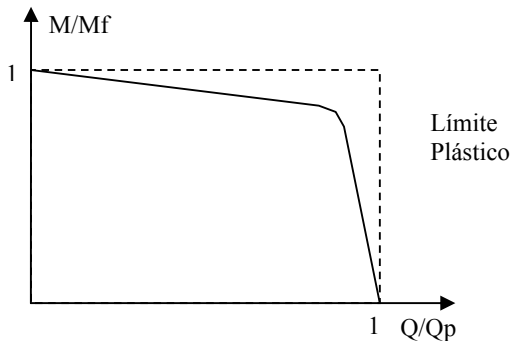
$$\sigma_f = \frac{N}{\Omega} \pm \frac{M}{W}$$

$$\sigma_f = \frac{N_f}{\Omega} \left( \frac{N}{N_f} \right) \pm \frac{M_f}{W} \left( \frac{M}{M_f} \right) \text{ (recta)}$$

con  $k = \text{coef. de forma} = \frac{M_p}{M_f}$  y valido para perfiles de

acero. En el estudio de hormigon intervienen otros factores que cambian la forma del diagrama de interacción.

#### **5.11 4– INFLUENCIA DEL ESFUERZO DE CORTE EN EL ELEMENTO Plástico**



Aquí también el diagrama de interacción entre Q y M dependerá del tipo de perfil y del tipo de teoría de rotura que apliquemos, diagramas que pueden ser testeados por resultados experimentales. La forma típica de la figura proviene de considerar que las alas tienen preponderancia en la resistencia a los M y el alma a los Q.

#### **5.11 5– PANDEO Y INESTABILIDAD DEL ELEMENTO**

La estructura puede tener colapsos parciales o totales antes de convertirse en un mecanismo por la aparición de sucesivas rótulas plásticas si se producen fenómenos de inestabilidad, que conocemos por efectos de pandeo y que podemos enunciar con el objeto de ser tenidos en cuenta, si fuera necesario, como efectos de:

- a) Pandeo de toda la estructura
- b) Pandeo individual de uno o varios elementos (o columnas)
- c) Alabeo elástico local de una o mas chapas que componen el elemento
- d) Alabeo plástico de un elemento.

En cada caso se deberá aplicar la teoría correspondiente para verificar que el fenómeno no se produzca.

#### **5.11 6– ROTURA FRAGIL**

Como el método se basa en la capacidad de rotación, es imprescindible que dicha capacidad esté asegurada para permitir una correcta redistribución plástica de las tensiones. Esto no es fácil de conseguir en materiales frágiles (vidrio, hierro fundido, etc.). también pueden producir efectos no deseados mala calidad de soldadura , concentración de esfuerzos, etc.

#### **5.11 7– CARGAS REPETIDAS**

Hemos supuesto que el colapso se produce por efecto de cargas crecientes, que van plastificando distintas secciones hasta producir un mecanismo.

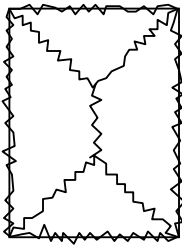
Existen casos de cargas repetidas que sin llegar al valor de la carga límite, por un proceso de repetición, producen sucesivos incrementos de las deformaciones de manera tal que se produce el colapso.

Otro efecto perjudicial de altas cargas repetitivas que por efectos de fatigas pueden producir colapsos para cargas cuyo valor es inferior a la carga plástica.

### **5.11 8– OTROS MÉTODOS DE CALCULO**

Si bien no están entre los objetivos del curso su desarrollo, mencionaremos que entre otros existen para el Análisis Límite de estructuras un “Método de Distribución de Momentos Plásticos” y un “Método paso a paso” facilitado por la utilización de computadoras.

### **5.11 9– PLACAS – LINEAS DE ROTURA**



Un capítulo especial, que no estudiaremos aquí, merece el estudio de placas (losas) por análisis límite, que da lugar al análisis de líneas de rotura (que reemplazan a las rótulas plásticas) que también se estudian por aplicación del P.T.V.

De interés práctico en Hormigón Armado para casos especiales.