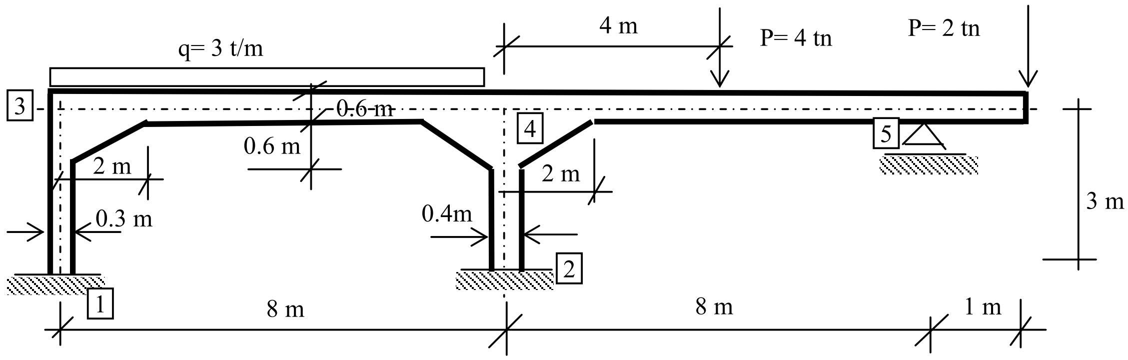
EJERCICIO DE APLICACIÓN METODO DE LAS DEFORMACIONES PARA ESTRUCTURAS ACARTELADAS



La ecuación de recurrencia vista en teoría para una barra genérica "ij" era:

$$M_{ij} = M^o{}_{ij} + \frac{4.E.I_{ij}}{L_{ij}}\left[k_i.\omega_i + k_i.m_i\omega j - k_i(1+m_i).\psi_{ij}\right]$$

multiplicando y dividiendo por Io el segundo miembro de la ecuación anterior obtenemos:

$$M_{ij} = M^o{}_{ij} + \frac{4.E.I_{ij}}{L_{ij}}.\frac{I_o}{I_0}\left[k_i.\omega_i + k_i.m_i\omega j - k_i(1+m_i).\psi_{ij}\right] =$$

$$= M^o{}_{ij} + \frac{4.\alpha_{ij}}{L_{ij}}.\left[k_i.\bar{\omega}_i + k_i.m_i\,\bar{\omega}\,j - k_i(1+m_i).\bar{\psi}_{ij}\right]$$

siendo:

$\alpha_{ij} = I_{ij} / Io$

$\bar{\omega}_i = \omega_i.E.I_o \qquad \bar{\omega}_j = \omega_j.E.I_o \qquad \bar{\psi}_{ij} = \psi_{ji}.E.I_o$

$I_{13} = b \times 0.3^3 / 12$
$I_{24} = b \times 0.4^3 / 12$
$I_{34} = I_{45} = b \times 0.6^3 / 12$

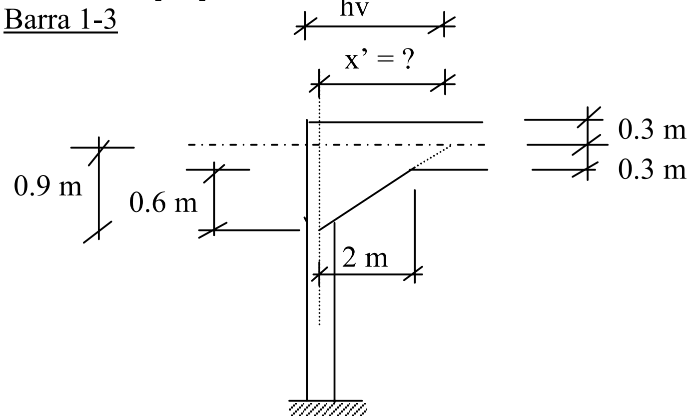
$\alpha_{13} = 0.125 \qquad \alpha_{24} = 0.296 \qquad \alpha_{34} = 1.00 \qquad \alpha_{45} = 1.00$

Datos:
por condición de vínculo
$\omega_1 = \omega_2 = \psi_{34} = \psi_{45} = 0$

Incógnitas:
ω_3 ; ω_4 ; ω_5 ; ψ_{13} ; ψ_{24}
Cómo el método no considera deformaciones por esfuerzo normal, entonces el desplazamiento horizontal de los nudos 3 , 4 y 5 será el mismo.
Luego:
$\Delta = L_{13}.\psi_{13} = L_{24}.\ \psi_{24} \Rightarrow \psi_{13} = L_{24} / L_{13}.\psi_{24}$

Cálculo de k_i, m_i, r

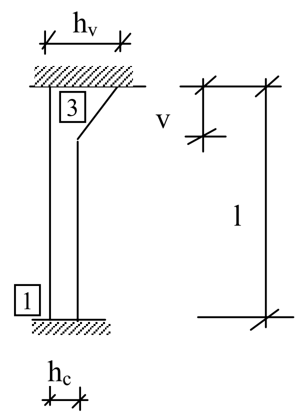
Barra 1-3



2.00 m x
------- = --------
0.60 m 0.90 m

➔ x' = 3.00m

hv = 3.00+0.15 = 3.15



hc = 0.3m hv = 3.15 m

a= v / l = 0.30 $i = Ic / Iv = h_c^3 / h_v^3 = 0$

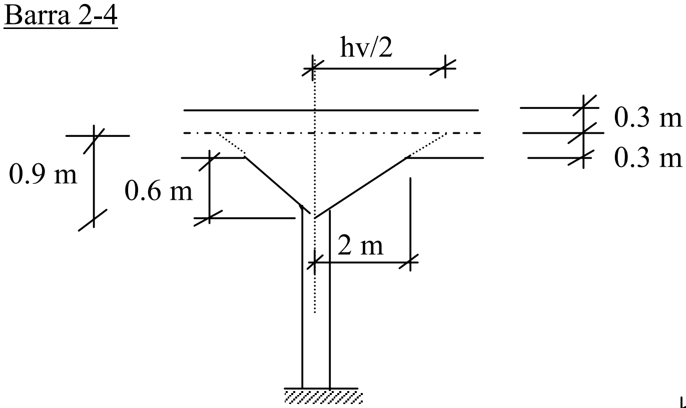
de tabla 7 obtenemos:

k1 = 1.45 m1= 1.148

de tabla 6 obtenemos:

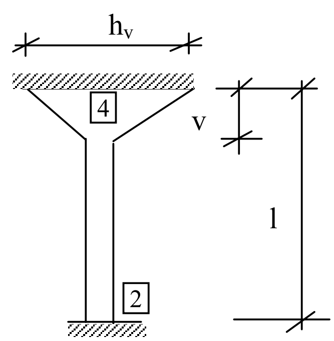
k3 = 4.11 m3= 0.404

Barra 2-4



2.00 m hv/2
------- = --------
0.60 m 0.90 m

➔ hv/2 = 3.00m



hc = 0.4m hv = 6.00 m

a= v / l = 0.9/0.3= 0.30 i = 0

de tabla 7 obtenemos:

k2 = 1.45 m2= 1.148

de tabla 6 obtenemos:

k4 = 4.11 m4= 0.404

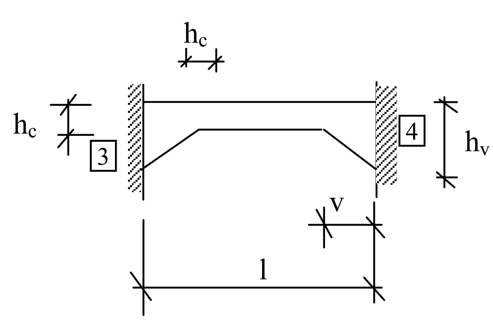
Barra 3-4

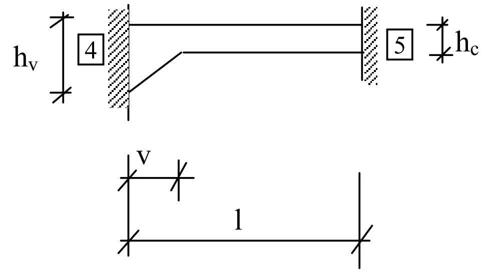
hc = 0.6m hv = 1.20m

a= v / l = 0.25 i = 0.125

de tabla 5 obtenemos:

k3 = k4= 2.437 m= 0.69



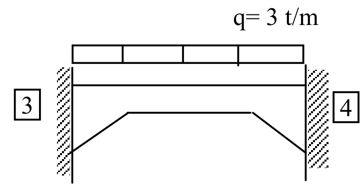


Barra 4-5
hc = 0.6m   hv = 1.20 m
a= v / l = 0.25   i = 0.125

de tabla 6 obtenemos:
k4 = 1.893   m4= 0.462

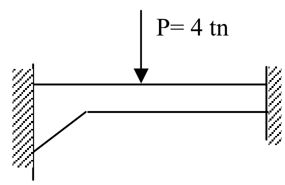
de tabla 7 obtenemos:
k5 = 1.155   m5= 0.750

Cálculo de los M^{o}_{ij}



Barra 3-4
de tabla 1 obtenemos:
r3 = r4 = 0.1015

$M^{o}_{34} = -M^{o}_{43} = r.q.l^{2} = 0.1015x\ 3x8^{2} = 19.49\ tm$



Barra 4-5
De tabla
$\eta_4 = 0.1874$ $\eta_5 = 0.0987$

$M^{o}_{45} = \eta_4\ P.l = 0.1874x4x8 = 6.00\ tm$

$M^{o}_{54} = -\eta_5\ P.l = -0.0987x4x8 = -3.158\ tm$

Planteamos las ecuaciones de recurrencia para cada barra

$$M_{ij} = M^{o}_{ij} + \frac{4.\alpha_{ij}}{L_{ij}}.\left[k_i.\bar{\omega}_i + k_i.m_i\,\bar{\omega}\,j - k_i(1+m_i).\bar{\psi}_{ij}\right]$$

Barra 1-3

$$M_{13} = M^{o}_{13} + \frac{4.\alpha_{13}}{L_{13}}.\left[k_1.\bar{\omega}_1 + k_1.m_1\,\bar{\omega}_3 - k_1(1+m_1).\bar{\psi}_{13}\right]$$

$$M_{13} = 0 + \frac{4x0.125}{3m}.\left[1.45x0 + 1.45x1.148x\,\bar{\omega}_3 - 1.45x(1+1.148).\bar{\psi}_{13}\right]$$

$$M_{13} = 0.2774\,\bar{\omega}_3 - 0.5191\,\bar{\psi}_{13}$$

$$M_{31} = 0.685\,\bar{\omega}_3 - 0.9617\,\bar{\psi}_{13}$$

Barra 2-4

$$M_{24} = 0 + \frac{4x0.296}{3m}.\left[1.45x0 + 1.45x1.148\,\bar{\omega}_4 - 1.45x(1+1.148).\bar{\psi}_{24}\right]$$

$$M_{24} = 0.657\,\bar{\omega}_4 - 1.229\,\bar{\psi}_{24}$$

$$M_{42} = 0 + \frac{4x0.296}{3m} \cdot \left[4.11x\,\bar{\omega}_4 + 0 - 4.11(1 + 0.404).\bar{\psi}_{24} \right]$$

$$M_{42} = 1.622\,\bar{\omega}_4 - 2.277\,\bar{\psi}_{24}$$

<u>Barra 3-4</u>

$$M_{34} = 19.49 + \frac{4x1.00}{8m} \cdot \left[2.437x\,\bar{\omega}_3 + 2.437x0.69\,\bar{\omega}_4 - 0 \right]$$

$$M_{34} = 19.49 + 1.2185\,\bar{\omega}_3 + 0.8407\,\bar{\omega}_4$$

$$M_{43} = -19.49 + 0.8407\,\bar{\omega}_3 + 1.2185\,\bar{\omega}_4$$

<u>Barra 4-5</u>

$$M_{45} = 6.00 + \frac{4x1.00}{8m} \cdot \left[1.893x\,\bar{\omega}_4 + 1.893x0.462\,\bar{\omega}_5 - 0 \right]$$

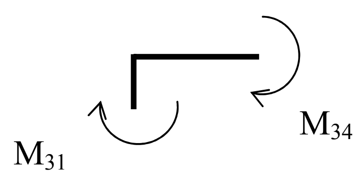
$$M_{45} = 6 + 0.9465\,\bar{\omega}_4 + 0.4372\,\bar{\omega}_5$$

$$M_{54} = -3.158 + \frac{4x1.00}{8m} \cdot \left[1.155\,\bar{\omega}_5 + 1.155x0.749\,\bar{\omega}_4 - 0 \right]$$

$$M_{54} = -3.158 + 0.5775\,\bar{\omega}_5 + 0.4325\,\bar{\omega}_4$$

<u>Planteo de las ecuaciones de equilibrio</u>
Sumatoria de momentos en nudos 3, 4, y 5 igual a cero, tenemos tres ecuaciones y cuatro incógnitas, necesito una ecuación de equilibrio adicional → ecuación de piso (sumatoria de fuerzas horizontales igual a cero)

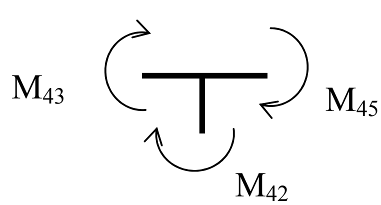
<u>Equilibrio de momentos en el nudo 3</u>



$\sum M_3 = 0$
$M_{31} + M_{34} = 0$
Para hacer el equilibrio de nudos tomamos
Acción de barra sobre nudo
(positivo en sentido horario)

M_{31} →	0.00	$+0.685\ \omega_3$		$-0.9617\ \psi_{13}$
M_{34}→	19.49	$+1.2175\ \omega_3$	$+ 0.8407\omega_4$	
	+19.49	$+1.9035\omega_3$	$+0.8407\omega_4$	$-0.9617\ \psi_{13} = 0$ (I)

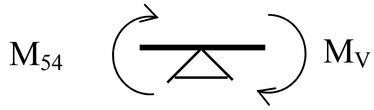
<u>Equilibrio de momentos en el nudo 4</u>



$\sum M_4 = 0$
$M_{43} + M_{42} + M_{45} = 0$

$M_{43} \rightarrow +$	-19.49	$+0.8407\ \omega_3$	$+1.2175\ \omega_4$		
$M_{42} \rightarrow$			$+1.6220\ \omega_4$		$-2.277\psi_{24}$
$M_{45} \rightarrow$	+6.00		$+0.9165\ \omega_4$	$+0.4372\ \omega_5$	
	-13.49	$+0.8407\omega_3$	$+3.787\ \omega_4$	$+0.4372\ \omega_5$	$-2.277\ \psi_{24}= 0$ (II)

<u>Equilibrio de momentos en el nudo 3</u>



$\sum M_5 = 0$

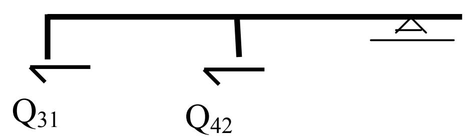
$M_{54} + M_V = 0$

$M_{54} \rightarrow +$	-3.158	$+0.4325\ \omega_4$	$+0.5775\ \omega_5$	
$Mv \rightarrow$	+2.000			
	-1.158	$+0.4325\omega_4$	$+0.5775\omega_5= 0$	(III)

<u>Ecuación de piso</u>

$\sum F_H = 0$

$+ Q_{31} + Q_{42}=0$



Nota. Para hallar los esfuerzos de corte debidos al momento flector en las distintas barras aplico momentos positivos (ya que todavía no conozco su valor) en los extremos de barras. (Acción de nudo sobre barra positivo en sentido antihorario)

$$Q^M_{31} = (M_{31}+M_{13})/ L_{13} = 0.3208\ \omega_3 - 0.4936\ \psi_{13}$$

$$Q^M_{42} = (M_{24}+M_{42})/ L_{24} = 0.7597\ \omega_4 - 1.1687\ \psi_{24}$$

$\sum F_H = 0$

$Q^M_{31} \rightarrow$	$0.3208\ \omega_3$		$-0.4936\ \psi_{13}$	
$Q^M_{42} \rightarrow$		$0.7597\ \omega_4$	$-1.1689\ \psi_{13}$	
	$0.3208\omega_3$	$+07597\ \omega_4$	$-1.6625\ \psi_{13} =0$	(IV)

En la ecuación anterior se tuvo en cuenta que $\psi_{13} = L_{24}/ L_{13}.\psi_{24} = \psi_{24}$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos:

$\bar{\omega}_3$=-13.0697 $\bar{\omega}_4 = 7.3827$ $\bar{\omega}_5$ =-3.5224 $\bar{\psi}_{13} = 0.85149$

Reemplazando los valores de las rotaciones en las ecuaciones de recurrencia obtenemos los momentos flectores en las barras y a partir de los mismos los esfuerzos de corte, normal y diagrama del cuerpo libre.

M_{13} = -4.07 tm M_{24} = 3.80 tm M_{34} = 9.77 tm M_{45} = 11.44 tm
M_{31}= -9.77 tm M_{42} = 10.04 tm M_{43} = -21.48 tm M_{54} = -2.00 tm

DIAGRAMA DE MOMENTOS

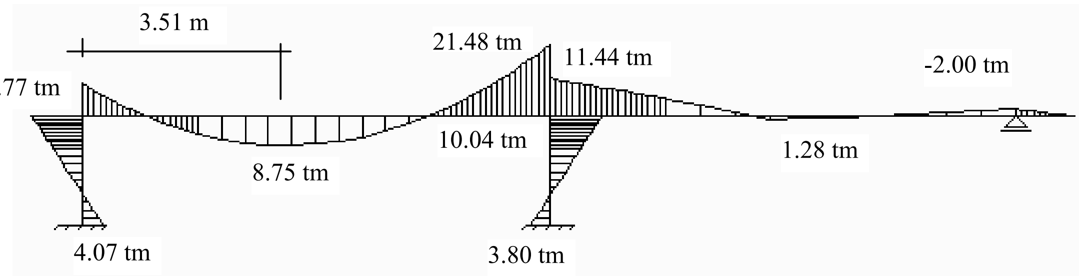


DIAGRAMA DE CORTE

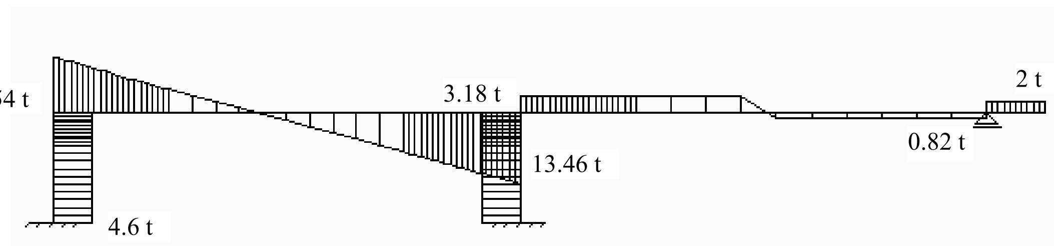
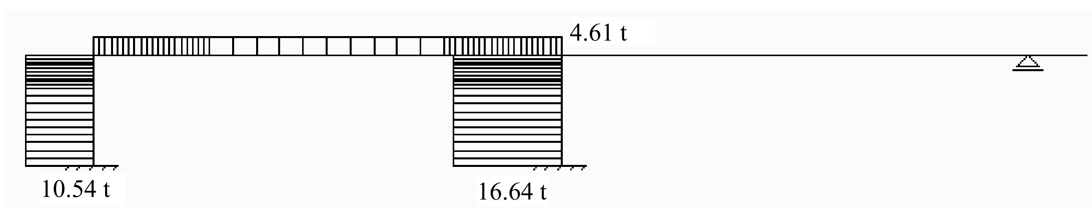


DIAGRAMA DE N



ESTRUCTURA DEFORMADA

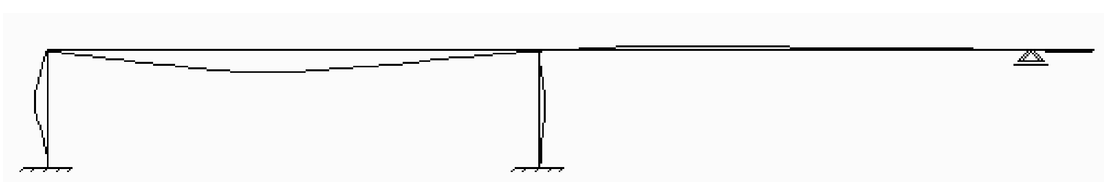


DIAGRAMA DEL CUERPO LIBRE