TEMA I: Repaso Introductorio de Teoría de Circuitos

Formas de representación de los fenómenos físicos

Para explicar las relaciones causa-efecto de los fenómenos eléctricos se utilizan las teorías de campo electromagnético.
Ya se estudiaron en los cursos de física las relaciones fundamentales de fuerza sobre cargas estáticas (campo eléctrico $\bar{E}$) y en movimiento (campos magnéticos $\overline{H}$) y el medio que los provoca , como así también su representación.
Definimos como campo eléctrico (o magnético) a la región del espacio que ve modificada sus propiedades por la presencia de cargas eléctricas (estáticas en un caso y en movimiento en otro). Las relaciones numéricas establecidas son:

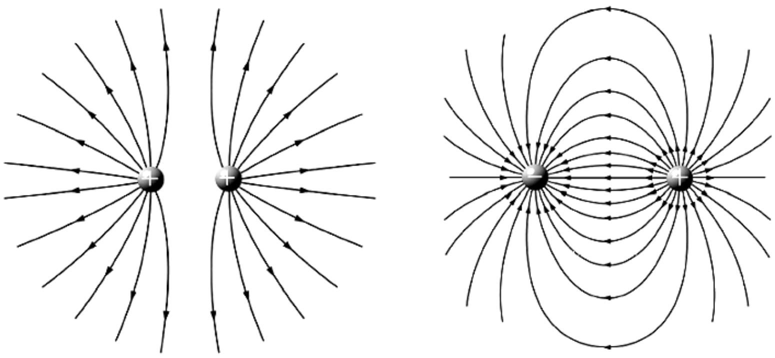
Fuerza eléctrica:

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

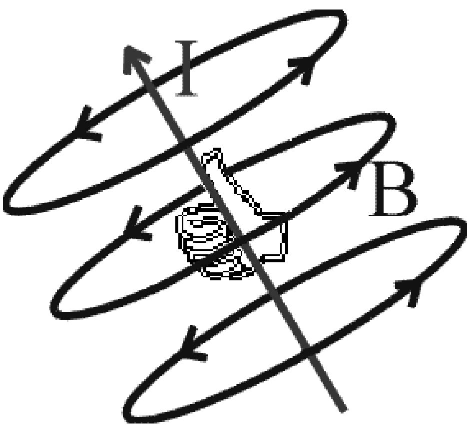
Fuerza magnética:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Las respectivas representaciones de dichos campos son las siguientes:



Campo Eléctrico



Campo magnético

Las vinculaciones de estas líneas (que en el primer caso se llaman *flujo eléctrico)* con la unidad de área dan por resultado la *densidad de flujo eléctrico* :

$$\vec{D} = \frac{\Phi e}{\vec{A}}$$

Y en el segundo caso, la vinculación del flujo magnético con la unidad de área dan por resultado la *densidad de flujo magnético:*

$$\vec{B} = \frac{\Phi_{mag}}{\vec{A}}$$

Si los vinculamos ahora con el medio tendremos :

$$\vec{D} = \varepsilon \bullet \vec{E}$$

Y

$$\vec{B} = \mu \bullet \vec{H}$$

Donde ε es la permitividad y μ es la permeabilidad del medio. Coeficientes estos que tienen en cuenta las propiedades del medio con relación al fenómeno.

<u>Circuito Eléctrico / Magnético</u>

Son las porciones físicas reales donde se desarrollan los fenómenos de transporte de cargo provocados por las fuerzas eléctricas (o magnéticas en el otro caso), y que en cada caso provocan fenómenos que pueden ser descriptos a través de relaciones escalares.

La acumulación de cargas en una parte de un circuito por efecto de las fuerzas eléctricas origina un aumento de energía potencial a expensas de otra forma de energía o del trabajo realizado, dando origen así a los llamados potenciales eléctricos (o magnéticos).

Estas energías potenciales evaluadas en función de la carga eléctrica unitaria dan origen al *Potencial Eléctrico,* medido en Joule/Coulomb o en Voltios, y que por establecerse como una diferencia de acumulación de cargas se llama *diferencia de potencial* **ddp** (y para el caso magnético se lo llama *fuerza magneto motriz* **fmm**).

En todos los casos se producen flujos y variaciones de los mismos como consecuencia de las variaciones de carga .Considerando ahora la variable tiempo, podemos definir la *Corriente Eléctrica* como una variación de la carga evaluada en el tiempo:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Esta variación en todos los casos depende no sólo del campo, sino también del medio a través del cual se desarrolla, y si bien sólo hablamos de una variación de módulo (cantidad de carga en el tiempo) es interesante evaluar si los gradientes establecidos se mantienen en el tiempo o se modifican.
Al primer caso corresponde lo que llamamos polaridad constante en el tiempo y al segundo polaridad variable en el tiempo.
En Teoría de Circuitos hablamos, para el caso en que el flujo de cargas se mantiene constantemente en una dirección en el tiempo, de CORRIENTE DIRECCIONAL Y CONTINUA, mientras que en el segundo caso, donde los gradientes se modifican en el tiempo en uno u otro sentido, hablamos de CORRIENTE BIDIRECCIONAL O ALTERNA.

Análisis de las Relaciones Circuitales.

Como sabemos, las relaciones eléctricas entre las causas que provocan el movimiento de cargas eléctricas (los campos electromotores que provienen de la *ddp*) **V**, las variaciones de las cargas en el tiempo **I** y el medio cuyas características físicas y geométricas están contenidas en una propiedad que llamamos resistencia R, se vinculan a través de la llamada *Ley de Ohm*.

$$V = I \cdot R$$

Concepto de Circuito Eléctrico

Vimos que los desplazamientos de cargas eléctricas debidos a un campo, necesariamente están vinculados a través de un medio físico donde se desarrolla el fenómeno. A la porción de ese medio cuyo análisis efectuaremos lo llamaremos circuito eléctrico.
Los elementos físicos incorporados por la técnica a ese camino se clasifican básicamente en dos tipos:

- Elementos Pasivos: convierten energía eléctrica en otra forma de energía termodinámicamente reversible o irreversible. Básicamente a los primeros se los denominan capacitores e inductancias, ellos son capaces de convertir energía eléctrica en energía de campo eléctrico y magnético respectivamente, pudiendo al cabo de un cierto tiempo devolver energía eléctrica al circuito; en el segundo caso tenemos las resistencias que convierten energía eléctrica en calor.
- Elementos Activos: son los que a partir de una cierta forma de energía (química, electromecánica, térmica, luminosa, nuclear, etc.) provocan una fuerza electromotriz capaz de mover cargas en un circuito. Reciben el nombre de *Fuentes.*

Según sean los caminos recorridos por la corriente de electrones podemos considerar:

a) circuitos eléctricos serie
b) circuitos eléctricos en paralelo

El análisis temporal de la corriente desarrollada en un circuito presenta características distintas según sea el momento en el cual se realiza (planteadas las ecuaciones del modelo matemático del circuito, sus respuestas son distintas).
Al primer instante luego de cerrar el circuito se lo denomina periodo inicial o transitorio y se caracteriza por una respuesta exponencial decreciente (convergente) [solución de la ecuación homogénea]; transcurrido ese tiempo se desarrollará una respuesta que perdura o es constante frente a una excitación dada y que cumple las relaciones óhmicas siempre que el dispositivo (o circuito) sea lineal [solución particular].

Análisis de Redes

Dependiendo del tipo de excitación, el análisis de una red presentará aspectos totalmente diferentes tanto en régimen transitorio como en régimen permanente.

Los tipos de excitación a analizar abarcan:

a) Régimen de excitación en CD
b) Régimen de excitación en AC con funciones cisoidales (funciones seno y coseno)
c) Régimen con excitación con funciones no cisoidales (ondas cuadradas, impulso, triangular, rampa).

En particular la a) se desarrolló en el curso de Física III (lo tomaremos para referenciar otros estudios que efectuemos).
El caso c) lo reservaremos para un estudio en particular en la unidad V en tensiones y corrientes poliarmónicas.
El caso b) representa tal vez el más importante por la disponibilidad de generar estas excitaciones y por las herramientas disponibles para efectuar su análisis.

<u>Análisis de Redes excitadas con funciones que varían en el tiempo - funciones Cisoidales</u> (Seno , coseno)

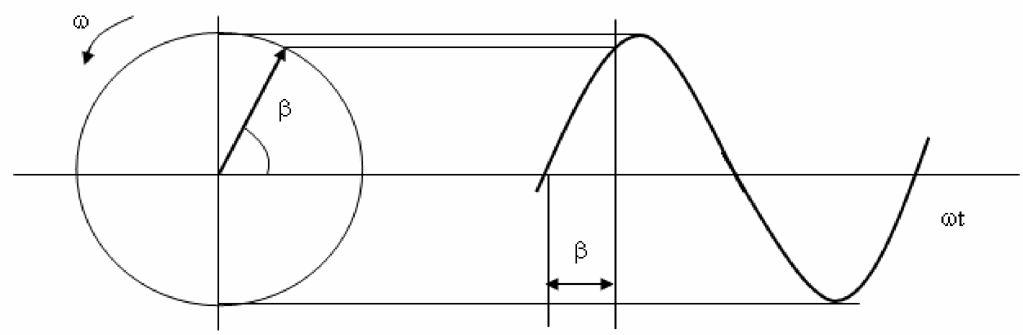
Las funciones serán del tipo

$$i = \hat{I} \cdot \mathrm{sen}\omega t$$

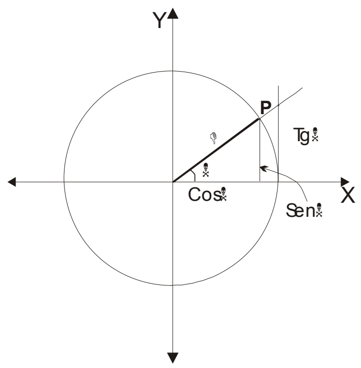
o

$$u = \hat{U} \cdot \mathrm{sen}\omega t$$

Donde i, u son valores instantáneos de corriente y tensión; $\hat{I};\hat{U}$ son valores máximos; y ωt es la pulsación angular.



La representación de estas funciones puede realizarse a través de un pseudo vector rotante (Fasor) en un plano.
La razón de utilizar la representación fasorial está en la simplificación que ello supone.
Matemáticamente, un fasor puede ser definido fácilmente por un número complejo, por lo que puede emplearse la teoría de cálculo de estos números para el análisis de sistemas de corriente alterna



Las coordenadas de P pueden ser expresadas en:
- Coordenadas polares (ρ , φ)
- Coordenadas cartesianas (x, y)

Si consideramos que el plano de trabajo es el plano Complejo, las ordenadas constituirán el eje imaginario y las abscisas el eje real, pudiendo expresarse P como un número complejo el cual a su vez puede expresarse en diferentes formas.

Veremos a modo de repaso algunas expresiones útiles.

Igualdad de Euler

Recordemos que para resolver el problema de las raíces de índice par y radicando negativo recurrimos a los números imaginarios cuya identidad está fijada por la I*gualdad de Euler*

$$j = \sqrt{-1}$$

Y de allí:

$j^2 = -1$

$j^3 = -j$

$j^4 = 1$

$\frac{1}{j} = -j$

Recordemos la función exponencial e^x la que se define como una serie infinita:

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^n}{n!}$ obteniéndose el valor de e = 2,72…

Y la derivada:

$$\frac{de^x}{dx} = e^x$$

Si x es un número imaginario x= j.φ

$$e^{j\varphi} = (1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!}) + j.(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + ...)$$

El primer paréntesis corresponde al desarrollo de la función cos φ y el segundo paréntesis corresponde al desarrollo de la función sen φ , o sea:

$e^{j.\varphi} = \cos\varphi + j.\text{sen}\varphi$ (1) y $e^{-j\cdot\varphi} = \cos\varphi - j\cdot\text{sen}\varphi$ (2)

φ puede expresarse como magnitud angular en grados sexagesimales, o en términos del arco correspondiente en radianes :

$$\varphi_{(\text{radianes})} = \frac{\pi}{180^\circ}\cdot\varphi_{(\text{grados.sexagesimales})}$$

Si analizamos algunos valores particulares para la ecuación de Euler (1) veremos que:

Con j.φ = j. $\frac{\pi}{2}$ $\therefore$ $e^{j\cdot\frac{\pi}{2}} = \cos 90^\circ + j.\text{sen}90^\circ = j$

Con j.φ = j. π $\therefore$ $e^{j\cdot\pi} = \cos 180^\circ + j.\text{sen}180^\circ = -1$

Con $j.\varphi = -j.\dfrac{\pi}{2} \quad \therefore \quad e^{-j\cdot\frac{\pi}{2}} = -j$

Sumando miembro a miembro (m.a m.) las ecuaciones (1) y (2) obtenemos:

$$e^{j\cdot\varphi} + e^{-j\cdot\varphi} = 2\cos\varphi \quad \therefore \quad \cos\varphi = \frac{e^{j\cdot\varphi} + e^{-j\cdot\varphi}}{2}$$

Restando m.a m. (1) y (2) :

$$e^{j\cdot\varphi} - e^{-j\cdot\varphi} = 2.j.\text{sen}\varphi \quad \therefore \quad \text{sen}\varphi = \frac{e^{j\cdot\varphi} - e^{-j\cdot\varphi}}{2.j}$$

Representación Analítica del Fasor (P)

- Representación Binómica

$P = a_x + j.a_y$ donde a_x = parte real
a_y = parte imaginaria

Su módulo es :

$|P| = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2}}$ y el argumento: $tg^{-1}\varphi = \dfrac{a_y}{a_x}$

- Representación Polar:

$$a_x = |a| \cdot \cos\varphi \qquad \text{y} \qquad a_y = |a| \cdot \text{sen}\varphi$$

Donde $|a|$ y φ son coordenadas polares del punto P en el plano complejo, o sea:

$$P = |a| \angle\varphi$$

- Representación exponencial

Como las coordenadas de $e^{j\cdot\varphi}$ son cos φ y sen φ a través de:

$$e^{j.\varphi} = \cos\ \varphi + j.\text{sen}\ \varphi$$

Su módulo será $\left|e^{j.\varphi}\right| = \sqrt{\cos^2\varphi + \text{sen}^2\varphi} = 1$

Si $|P| = |a_x + j.a_y| = |a| \cdot |\cos\varphi + j.\text{sen}\varphi| = |a|.e^{j.\varphi}$

En el cálculo complejo la dependencia con el tiempo estará dada por $e^{j.\omega t}$

Entonces un fasor dependiente del tiempo se escribe en cualquier momento así:

$$m = Mo \cdot e^{j\cdot(\omega.t+\varphi o)} = Mo \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi o}$$

$$m = Mo \cdot e^{j\cdot\omega.t}$$

<u>Restricciones del Cálculo operacional:</u>

1. *Sólo se permite la adición de oscilaciones de igual frecuencia*
2. *Se permite la multiplicación por un número complejo independiente del tiempo*
3. *Se permite la diferenciación según el tiempo*
4. *No se admite la multiplicación de magnitudes complejas entre sí (2 oscilaciones)*

<u>APLICACIONES:</u>

<u>Concepto de Resistencia Compleja o Impedancia</u>

Tomemos para nuestro análisis valores instantáneos de tensión y corriente

$$u = U.\cos(\omega t + \varphi_o) = U.e^{j(\omega.t+\varphi_o)} = U.e^{j.\omega t}.e^{j.\varphi_o} \quad (1)$$

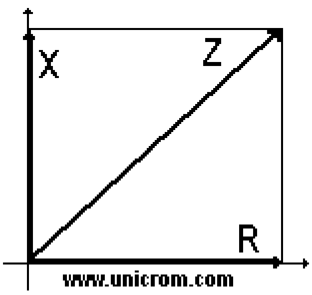
$$i = I.\cos(\omega t + \varphi_o) = I.e^{j(\omega.t+\varphi_o)} = I.e^{j.\omega t}.e^{j.\psi_o} \quad (2)$$

Denominamos:

$$U.e^{j.\varphi_o} = U$$

$$I.e^{j.\psi_o} = I$$

Si dividimos las expresiones (1) y (2) nos queda:



$$\frac{u}{i} = \frac{U}{I} = \frac{u}{i} \cdot e^{j(\varphi - \psi)} = Z$$

$$Z = |Z| \cdot e^{j.\varphi}$$

donde φ es la diferencia de fase entre tensión y corriente.

Las componentes rectangulares del complejo Z son:

$$Z = |Z|.\cos\varphi + j.|Z|.\text{sen}\varphi = R + j.X$$

donde R = Resistencia
X = Reactancia

Su módulo es: $|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$ y la fase $tg\varphi = \dfrac{X}{R}$

Concepto de Conductancia Compleja o Admitancia

La conductancia es una propiedad recíproca de una resistencia en Corriente Continua y en Corriente Alterna la CONDUCTANCIA COMPLEJA es la recíproca de la IMPEDANCIA COMPLEJA

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{|Z|.e^{j\varphi}} = \frac{I}{U} = \frac{i}{u}.e^{j\varphi - \psi} = |Y|.e^{j\theta}$$

Y sus componentes rectangulares serán:

$$Y = |Y|.\cos\theta + j.|Y|.sen\theta = G + j.B$$

G = Conductancia
B = Susceptancia

Vectores Transformados

Hasta ahora los fasores o vectores armónicos ocupaban una posición variable en el tiempo con relación a un sistema de ejes y una posición constante entre sí. Esto es como si consideráramos que sacamos una foto instantánea. Veremos ahora el concepto de vectores transformados.
El valor instantáneo lo expresamos:

$$v = V_{max}.\cos(\omega t + \varphi) = \Re_e\left[V_{max}.e^{j\omega t + \varphi}\right] = \Re.\left[\sqrt{2}.V.e^{j\omega t}.e^{j\varphi}\right]$$

Llamaremos vector transformado a la siguiente expresión:

$$V = \frac{V\,max}{\sqrt{2}}.e^{j\varphi}$$ valor transformado

La expresión del valor instantáneo se modifica quedando:

$$v = \Re e\left[\sqrt{2}.V.e^{j\omega t}\right]$$ siendo ésta una magnitud real y función del tiempo t.

Definimos del mismo modo **I**:

$$i = \mathrm{Im}\,ax.\cos(\omega t + \psi) = \Re e\left[\mathrm{Im}\,ax.e^{j\omega t + \psi}\right] = \Re.\left[\sqrt{2}.I.e^{j\omega t}.e^{j\psi}\right]$$

$$I = \frac{\mathrm{Im}\,ax}{\sqrt{2}}.e^{j\psi}$$

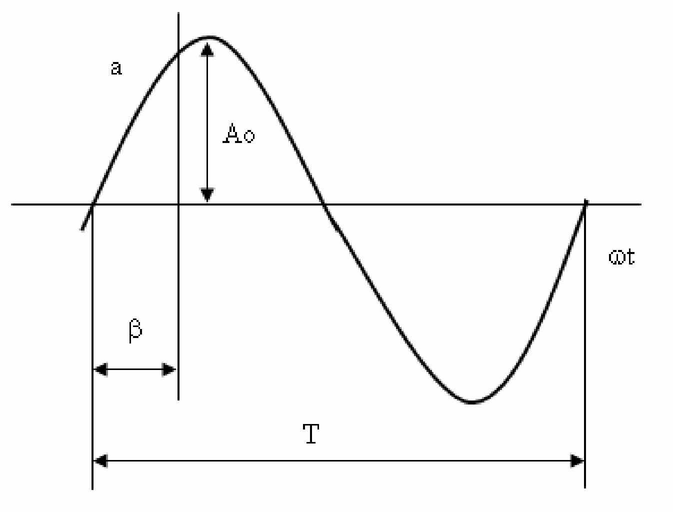
La impedancia Z :

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{V_{max}}{I_{max}}.e^{j(\varphi - \psi)}$$

Quedando así definidas sólo en función de la frecuencia y no en función del tiempo. De manera que podemos escribir las siguientes transformaciones:

$$u \rightarrow V$$
$$i \rightarrow I$$
$$\frac{d}{dt} \rightarrow j\omega$$
$$\int dt \rightarrow \frac{1}{j\omega}$$

Relaciones entre valores Máximos (Pico), Media y Eficaz



Se llama valor medio de una tensión (o corriente) alterna a la media aritmética de todos los valores instantáneos de tensión (o corriente), medidos en un cierto intervalo de tiempo.
Observando la grafica de una señal de corriente alterna definimos:
Periodo **(T)** El tiempo necesario para que un ciclo de la señal anterior se produzca, se llama período (T) y tiene la fórmula: **T = 1 / f**, o sea el período (T) es el inverso de la frecuencia. (f)
Voltaje Pico a Pico**:(Vpp)** Analizando el gráfico se ve que hay un voltaje máximo y un voltaje mínimo. La diferencia entre estos dos voltajes es el llamado voltaje pico-pico (Vpp) y es igual al doble del Voltaje Pico (Vp)(en la figura representado como Ao)

La expresión analítica de la onda de corriente alterna es:

$$a(t) = A_0 \cdot \sin(\omega t + \beta),$$

Donde:

A0 es la amplitud en voltios o amperios (también llamado **valor máximo** o de pico),
ω la pulsación en radianes/segundo,
t el tiempo en segundos, y
β el ángulo de fase inicial en radianes.

Dado que la velocidad angular es más interesante para matemáticos que para ingenieros, la fórmula anterior se suele expresar como:

$$a(t) = A_0 \cdot \sin(2\pi f t + \beta),$$

Donde f es la frecuencia en hercios (Hz) y equivale a la inversa del período (f=1/T).

En una corriente alterna sinusoidal, el valor medio durante un período es nulo: en efecto, los valores positivos se compensan con los negativos. Por tanto Vm = 0

En cambio, durante medio periodo, el valor medio es

$$\mathrm{Im}.\frac{T}{2} = \int_0^{T/2} i.dt$$

$$\mathrm{Imedio} = \frac{2}{T}.\int_0^{T/2} \mathrm{Imax.sen\omega t.dt} = \frac{2}{T}.\mathrm{Imax}.\int_0^{T/2} \mathrm{sen\omega t.dt}$$

$$\mathrm{Imedio} = \frac{2}{T}.\mathrm{Imax}.\left[-\cos\omega t\right]_0^{T/2} = \frac{2}{\pi}.\mathrm{Imax} = 0{,}636.\mathrm{Imax}$$

(se produce una rectificación de ½ onda con carga resistiva : V_{DC} = 0,636 . Vmax)

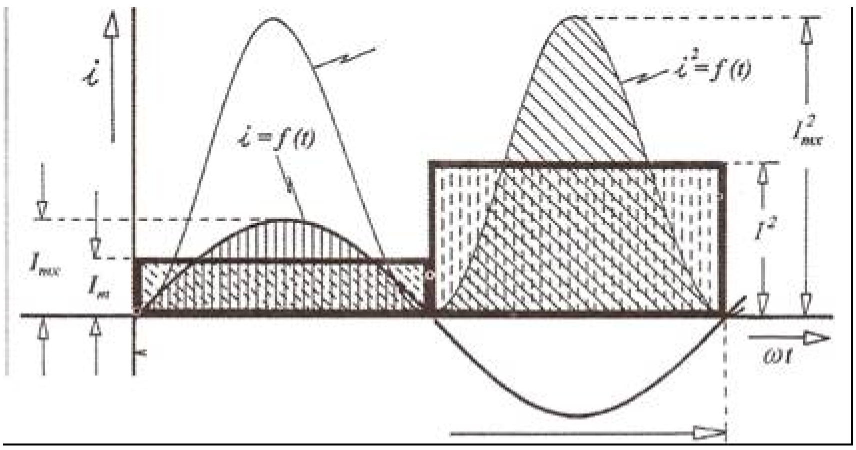
Si ahora elevo la corriente al cuadrado, (i^2), los valores son todos positivos podemos hallar el valor medio cuadrático en medio periodo:

$$I^2.\frac{T}{2} = \int_0^{T/2} i^2.dt$$

$$I^2 = \frac{2}{T}.\int_0^{T/2} \mathrm{Imax}^2.\mathrm{sen}^2\omega t.dt = \frac{2}{T}.\mathrm{Imax}^2.\left[\int_0^{T/2}\frac{1}{2}.dt - \int_0^{T/2}\frac{\cos(2\omega t)}{2}.dt\right]$$

$$I^2 = \mathrm{Imax}^2.\frac{2}{T}.\left[\frac{1}{2}\left|t\right|_0^{t/2} - \frac{1}{2}.\frac{1}{2\omega}.\left|\mathrm{sen}2\omega t\right|_0^{T/2}\right] = \frac{\mathrm{Imax}^2}{2}$$

$$\mathrm{Ief} = I_{RMS} = \frac{\mathrm{Imax}}{\sqrt{2}} = 0.707.\mathrm{Imax}$$



POTENCIA EFECTIVA, REACTIVA Y APARENTE

Tomemos primero el caso de una resistencia R en corriente continua. Si le aplicamos una tensión constante V circulará una corriente constante I suministrando a la resistencia una potencia:

$$P = u.i = i^2.R = \frac{V^2}{R}$$

La energía suministrada durante un intervalo de tiempo Δt será:

$$\Delta W = P.\Delta t = V.I.\Delta t$$

Si la corriente ahora es alterna y por tanto variable en el tiempo estas ecuaciones no tienen validez.
Sin embargo se las puede tomar como aproximaciones válidas tomando valores instantáneos, o sea considerando valores de Δt suficientemente pequeños nos aproximamos a la “verdad”.

A la relación: $p = \frac{\Delta W}{\Delta t} = u.i$ la llamamos VALOR INSTANTÁNEO.

A la energía suministrada en un periodo dividido por el periodo se la denomina Potencia Media o POTENCIA EFECTIVA.

Potencia efectiva en Corriente alterna

Consideremos una R real.
La corriente real es : $i = \mathrm{Imax}.\cos(\omega t + \varphi)$

La tensión real es: $u = \mathrm{Imax}.R.\cos(\omega t + \varphi)$

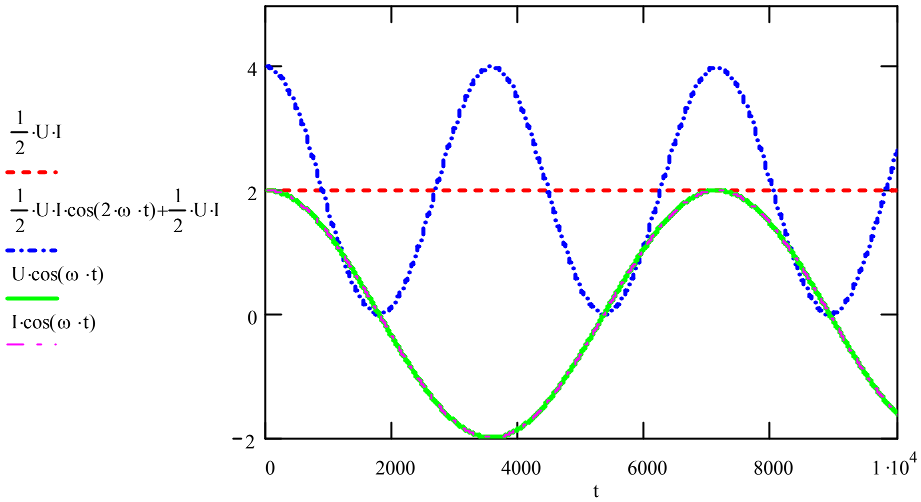
El valor instantáneo de la potencia es: $p = u.i = \mathrm{Imax}^2.R.\cos^2(\omega t + \varphi)$

Teniendo en cuenta que: $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos\alpha}{2}$

$$p = \mathrm{Imax}.R.\left[\frac{1+\cos 2(\omega t + \varphi)}{2}\right] = \frac{1}{2}.U.I + \frac{1}{2}.U.I.\cos 2(\omega t + \varphi)$$

En consecuencia, la potencia instantánea tiene una componente constante $\frac{U.I}{2}$ (en la figura siguiente en color rojo) y una senoidal (o cosenoidal) de frecuencia doble que la de excitación. Este segundo miembro oscila según el coseno alrededor de un eje de simetría (color azul) y su valor medio es cero. Hay que recalcar que en este caso el área entre la curva y el eje de los tiempos es siempre positiva, lo que indica que la fuente es ,a que entrega permanentemente energía al circuito, sin recibir en ningún momento energía de retorno (intercambio de energía en forma irreversible)

$$P := \frac{1}{2}\cdot U\cdot I + \frac{1}{2}\cdot U\cdot I\cdot \cos(2\cdot\omega\cdot t)$$



Valor medio $p = \frac{1}{2}.UI = \frac{U}{\sqrt{2}}.\frac{I}{\sqrt{2}}$ o sea vemos que en una resistencia R se origina la misma potencia que con una corriente continua $i = \frac{I}{2}$ llamando a este valor *"valor efectivo de la corriente alterna"*.

O sea: $P_{ef} = P_w = V_{ef}.I_{ef} = {I_{ef}}^2.R$

éstas son fórmulas análogas a las de corriente continua. A estos valores efectivos se los conoce también como valores medios cuadráticos o RMS (root means square) por sus siglas en ingles.

Potencia Reactiva

Consideremos ahora una resistencia compleja con fase $\pi/2$, o sea:

$$Z = |Z|.e^{j.\pi/2} = j.X$$

Una resistencia semejante es una resistencia imaginaria. Entre la corriente y la tensión hay una diferencia de $\pi/2$, si aplicamos una tensión $u = \hat{U}\cos(\omega t + \alpha)$ es atravesada por una corriente en retraso de $-\pi/2$ y valor instantáneo $i = \hat{I}.\mathrm{sen}(\omega t + \alpha)$

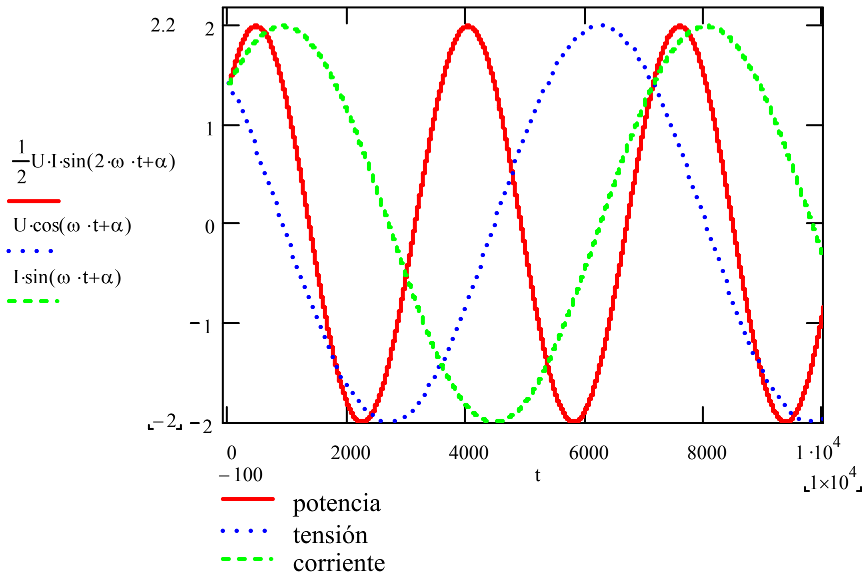
teniendo en cuenta que $\cos\alpha.\mathrm{sen}\alpha = \frac{1}{2}.\mathrm{sen}2\alpha$

La potencia instantánea será:

$$pi = u.i = \hat{U}.\hat{I}.\cos(\omega t + \alpha).\mathrm{sen}(\omega t + \alpha) = \frac{1}{2}.\hat{U}.\hat{I}.\mathrm{sen}2(\omega t + \alpha) =$$

$$pi = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}.\frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}.\mathrm{sen}2(\omega t + \alpha) = U_{ef}.I_{ef}.\mathrm{sen}2(\omega t + \alpha)$$

Por lo tanto la energía recibida es devuelta y la potencia media es nula.(la energía neta intercambiada a lo largo de un periodo es nula)
En forma práctica esta potencia se conoce como potencia reactiva. La expresión general podemos tomarla como: $P_B = Q = \frac{1}{2}.U.I = \frac{1}{2}.I^2.X$, se mide en VAR (volt-amper reactivo)



<u>Potencia en una resistencia compleja (Impedancia)</u>

Toda impedancia o resistencia compleja $Z = R + j.X$ puede considerarse un circuito serie de una resistencia efectiva **R** y una reactancia pura **j.X** . Entre **u** e **i** tendremos un ángulo φ, es decir: $u = \hat{U}\cos(\omega t + \alpha)$

$$i = \hat{I}\cos(\omega t + \psi)$$

Donde $\varphi = \alpha - \psi$ (diferencia de fase entre tensión y corriente= ángulo de la impedancia del circuito) ,
La potencia instantánea desarrollada en el circuito será:

$$P = v.i = \hat{U}.\hat{I}\cos(\omega t + \alpha).\cos(\omega t + \psi)$$

Recordando que: $\cos\alpha.\cos\beta = \frac{1}{2}.[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$

$$P = \frac{1}{2}\hat{U}.\hat{I}\left[\cos(\omega t + \alpha - \omega t - \psi) + \cos(\omega t + \alpha + \omega t + \psi)\right] =$$

$$= \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}.\frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}.\left[\cos(\alpha - \psi) + \cos(2\omega t + \alpha + \psi)\right] = U_{RMS}.I_{RMS.}\cos\varphi + U_{RMS}.I_{RMS.}\cos(2\omega t + \alpha + \psi)$$

Vemos que la potencia instantánea consta de dos términos, el primero es una constante (es decir es independiente del tiempo) y el segundo es una onda coseno de dos veces la frecuencia de excitación. El valor promedio de una onda coseno en un periodo completo es cero y nos queda solo el término constante.
En otras palabras, escribiendo la impedancia:

$$Z = |Z|.e^{j.\varphi}$$

si por esta **Z** circula una corriente **I** de amplitud compleja se origina sólo potencia efectiva si $R = |Z|.\cos\varphi$ y $V = |Z|.I$

$$Pw = \frac{1}{2}.I^2.R = I_{RMS}{}^2.R = \frac{1}{2}.U.I.\cos\varphi = U_{RMS}.I_{RMS}.\cos\varphi$$

O sea , la potencia disminuye con el aumento de φ.

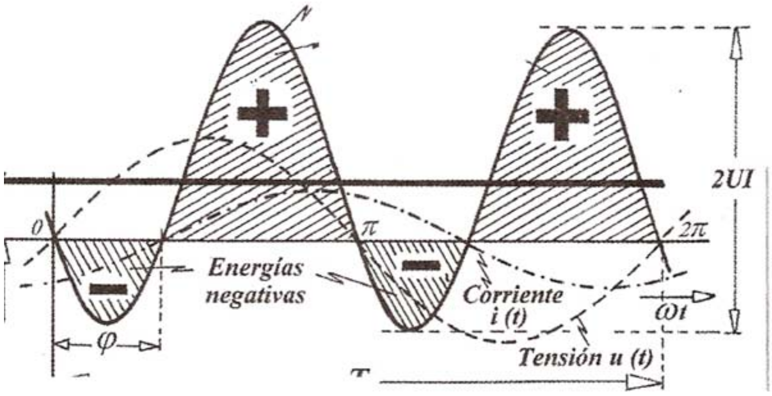
$$X = |Z|.\text{sen}\varphi$$

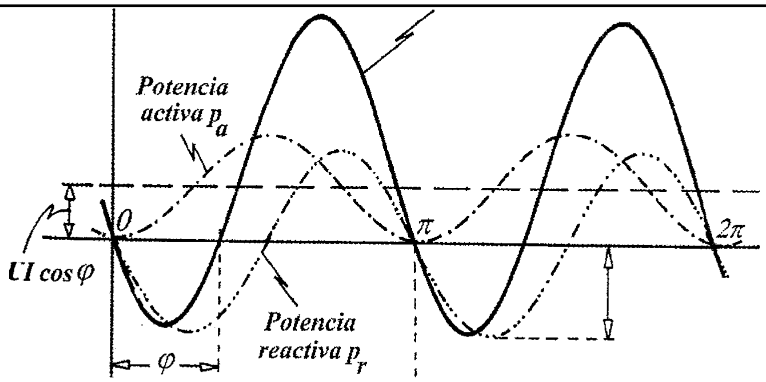
$$P_B = Q = \frac{1}{2}.I^2.X = I_{RMS}{}^2.X = \frac{1}{2}.U.I.\text{sen}\varphi = U_{RMS}.I_{RMS}.\text{sen}\varphi$$

La cantidad compleja $Ps = Pw + j.P_B$ toma el nombre de potencia aparente compleja.

$$Ps = \frac{1}{2}.I^2.(R + j.X) = \frac{1}{2}.I^2.Z = \frac{1}{2}.U.I(\cos\varphi + j.\text{sen}\varphi) = \frac{1}{2}.U.I.e^{j\varphi}$$

El módulo de la potencia será: $|P| = \sqrt{Pw^2 + P_B{}^2}$ y el ángulo de fase $tg\varphi^{-1} = \frac{P_B}{Pw}$





Potencia Vectorial o Compleja:

Se define la potencia compleja como: $Ps = U_{RMS}.I_{RMS}{}^{*}$,
donde $I_{RMS} = I_{RMS}\angle\psi$, entonces $I_{RMS}{}^{*} = I_{RMS}\angle-\psi$

$$Ps = \frac{1}{2}.U.I = \frac{1}{2}U.I.e^{j(\alpha+\psi)}$$

$$Ps = \frac{1}{2}.U.I^{*} = \frac{1}{2}U.I.e^{j(\alpha-\psi)}$$

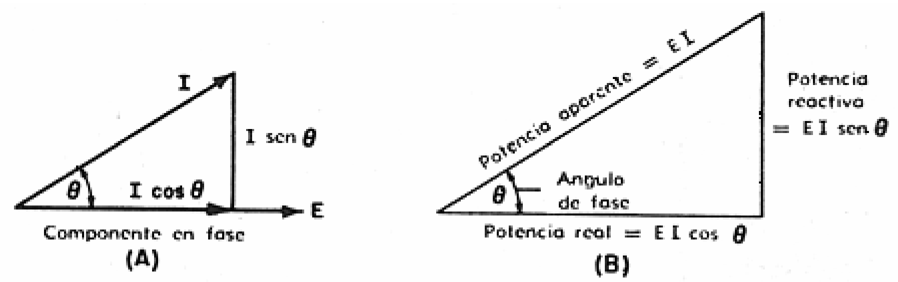
$$Ps = U_{RMS}\angle\alpha.I_{RMS}\angle-\psi = U_{RMS}..I_{RMS}\angle\alpha-\psi$$

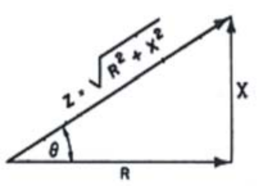
$$Ps = U_{RMS}..I_{RMS}.\cos(\alpha-\psi) + j.\mathrm{sen}(\alpha-\psi)$$

Como ya se había indicado $\alpha-\psi$ =φ, por l tanto la potencia activa es

$$P = U.I.\cos\varphi$$

I.cosφ es la proyección del vector **I** transformado sobre el vector **V**





La proyección sobre el eje imaginario es:
Q= U . I sen φ

Por lo tanto la potencia compleja se puede expresar como: **Ps= Pw+j.P$_B$**
La magnitud de la Potencia compleja es lo que se denomina Potencia aparente y se mide en Volt-Amperes(VA), la Potencia Real o efectiva se mide en Watts (w) y la potencia Reactiva se mide en Volt-Amper reactivo (VAR).

Comparemos ahora los diagramas de potencia (fig B) e impedancia:

$$P = V.e^{j\alpha}.I.e^{j\psi} = V.I.e^{j(\alpha+\psi)} = V.I.e^{j\varphi}$$

$$Z = \frac{V.e^{j\alpha}}{I.e^{j\psi}}. = \frac{V}{I}.e^{j(\alpha-\psi)} = \frac{V}{I}.e^{-j\varphi}$$

En realidad el ángulo de defasaje lo implementa la impedancia respecto a la parte real, es decir que el diagrama de potencias real debería tener la potencia reactiva hacia abajo. Pero por convención y para producir un giro tomo vector V* (conjugado) o I*. En un circuito RL la potencia reactiva resulta negativa. Sin embargo por convención se toma que la potencia reactiva en circuitos RL sea positiva para máquinas consumidoras de potencia activa (Ps=S)

$$S = U.I = U.e^{j\theta 1}.I.e^{j\theta 2} = U.I.e^{j(\theta 2+\theta 1)}$$

En un circuito con capacitores se interpreta que estos son “generadores” de potencia reactiva. O sea se forma un triángulo de potencias S, P y Q donde S forma con el eje real un ángulo $\varphi = \theta_1 + \theta_2$ distinto al de la impedancia $\varphi = \theta_1 - \theta_2$.

Recordar que $Z = \frac{V}{I} = \frac{V_{max}}{I_{max}}.e^{j(\theta 1 - \theta 2)}$

Si tomamos U* entonces.

$$S = U^{*}.I = U.e^{-j\theta 1}.I.e^{j\theta 2} = U.I.e^{j(\theta 2-\theta 1)}$$

Tomamos como mas conveniente I*