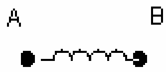
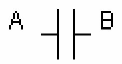
TEORIA DE LOS CIRCUITOS CON ELEMENTOS DE CIRCUITOS LINEALES

Como hemos visto en los circuitos existen tres elementos pasivos fundamentales:

Elementos	Símbolo	Dispositivo	Unidad	Magnitud
1) Resistecias R		Resistor	Ω	Resistencia
2) Bobinas L		Inductancia autoinductancia Bobina	Hy (mHy; µHy)	inductancia
3) Capacitores C		Capacitor condensador	F (µF; nF; pF)	capacidad

Relaciones de proporcionalidad:
Al circular una corriente i se establece una ddp entre A y B que es en cada caso:

1) **v~ i**

2) **v** $\sim \frac{di}{dt}$

3) **v** $\sim \int i.dt$

A los respectivos coeficientes de proporcionalidad se los llama:

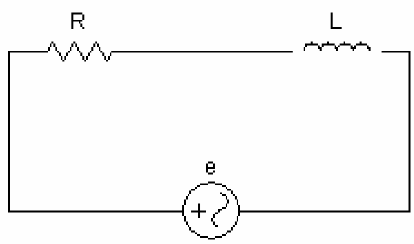
1) Resistencia **v = R.i** **[Ω]**

2)Inductancia o autoinducción **v = L .** $\frac{di}{dt}$ **L [Henrio]**

3) capacidad **v =** $\frac{1}{C}.\int i.dt$ **C [Faradio]**

R,C y L dependen de parámetros físicos geométricos.

Para que circule una corriente debemos colocar un elemento activo o fuente que proporcione la fem, la que será igual a la suma de las caídas de tensión en el circuito. Existen fuentes ideales de tensión (Zi muy elevada frente a la carga) y de corriente (Zi muy pequeña frente a la carga).



e = R.i + L. $\frac{di}{dt}$

e = Σ **v**$_k$

a esta ecuación la llamamos ecuación de equilibrio.

El circuito dibujado es un dipolo porque tiene una entrada y una salida.

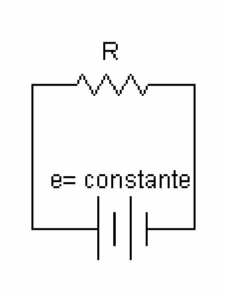
La resolución de un circuito consiste en:
Dados los elementos pasivos de un dipolo eléctrico asociados en forma determinada y conociendo las fem que sobre él operan, determinar las corrientes.
Tipos de análisis:

- circuitos de CC
- circuitos de CA armónica
- circuitos con corrientes no armónicas

En primer lugar estudiaremos circuitos simples de una sola malla.

CIRCUITOS EXCITADOS CON UNA FEM CONSTANTE

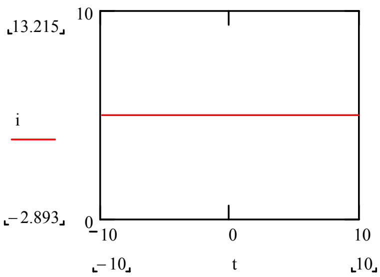
1) Circuito R



e= R.i

i = e / R

y su representación será:



en realidad esta es una función de Heaviside:

$$H(t) \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ 1 & \text{si } t>0 \end{cases}$$

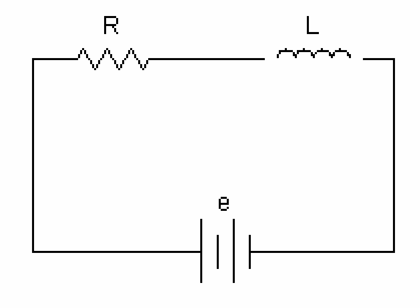
Por lo tanto la ecuación correcta sería: $i = \frac{e}{R}.H(t)$

Desde el punto de vista energético:

(Energía para transportar la carga) **e.dq = R.i².dt** (Ley de Joule)

O sea que toda la energía suministrada por la pila se disipa en forma de calor en la resistencia.

2) Circuito R-L



$$e = R.i + L.\frac{di}{dt}$$ ecuación de equilibrio

Como es una ecuación diferencial de primer orden, los datos son:

$$\begin{cases} t=0 \\ i(0)= 0 \end{cases}$$

La solución será: $\frac{di}{dt} = \frac{e - R.i}{L} = \frac{e/_R - i}{L/_R}$

$$\int \frac{-di}{e/_R - i} = \int \frac{-R}{L}.dt$$

$$\ln\left(\frac{e}{R} - i\right) = -\frac{R}{L}.t + k$$

De las condiciones iniciales i=0 cuando t= 0 $\therefore$ $k = \ln\frac{e}{R}$

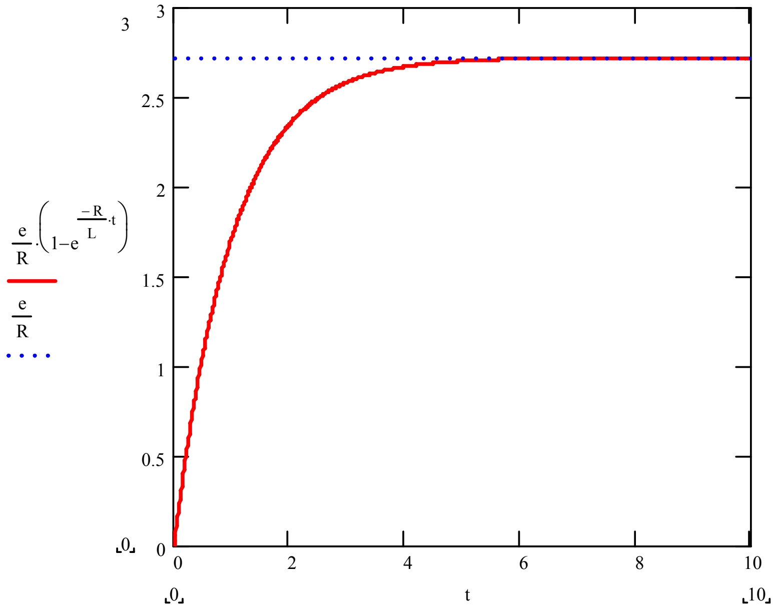
Reemplazando:

$$\ln\left(\frac{e}{R} - i\right) - \ln\frac{e}{R} = -\frac{R}{L}.t$$

$$\ln\left(\frac{e/_R - i}{e/_R}\right) = -\frac{R}{L}.t$$

$$\frac{e/_R - i}{e/_R} = e^{-\frac{R}{L}.t} \quad \therefore \quad e/_R - i = \frac{e}{R}.e^{-\frac{R}{L}.t}$$

$$i = \frac{e}{R} - \frac{e}{R}.e^{-R/_L.t} = \frac{e}{R}.(1 - e^{-R/_L.t})$$

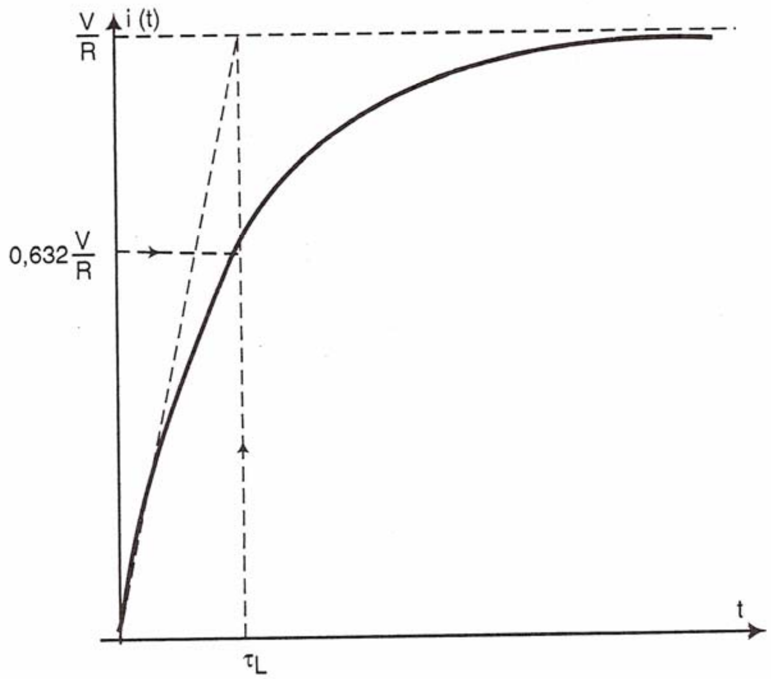


Conclusiones:

Para t=0 i=0

Para t $\rightarrow \infty$ i=e/R

Al cabo de un tiempo t=τ = L/R la función alcanza un valor = 63,2%



La bobina actúa como un amortiguador de i y permite que la Ley de Ohm se vaya cumpliendo progresivamente.

La relación energética será: $e = R.i + \mathcal{L}\dfrac{di}{dt}$

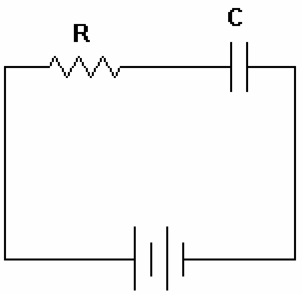
Multiplicando por dq $e.dq = R.i.dq + \mathcal{L}\dfrac{di}{dt}.dq$

i.dt=dq

$$e.dq = R.i.i.dt + \mathcal{L}\frac{di}{dt}.i.dt = R.i^2.dt + \mathcal{L}.i.di = R.i^2.dt + d(\frac{1}{2}.L.i^2)$$

e.dq= Energía para transportar carga
$R.i^2$.dt= Energía disipada como calor
d(1/2.L.i)= Energía de campo magnético almacenada en la bobina

2) CIRCUITO R-C



La ecuación de equilibrio es:

$$e = R.i(t) + Vc(t)$$

$$Vc(t) = \frac{Q(t)}{C}$$

(1) $e = R.i(t) + \dfrac{1}{C}.q(t)$

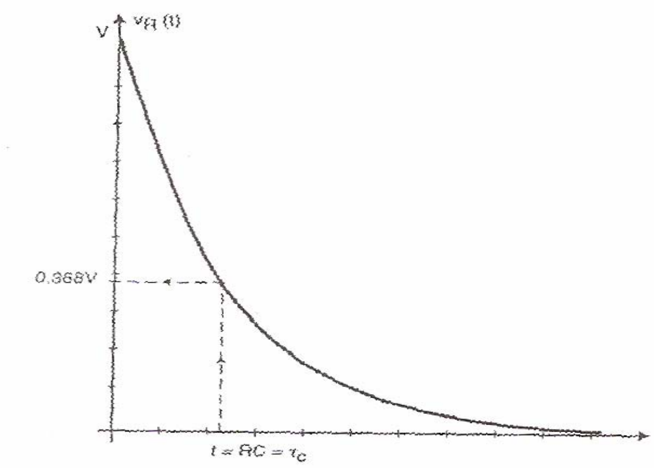
(2) $e = R.i(0) + \dfrac{1}{C}.q(0)$ si el condensador está cargado.

Si estudiamos la descarga en función del tiempo

$$R.\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}.i(t)=0 \therefore \frac{di(t)}{i(t)}=-\frac{1}{R.C}.dt$$

Integrando $\ln\frac{i(t)}{i(o)}=\frac{-t}{RC} \therefore i(t)=i(o).e^{-t/RC}=\frac{e}{R}.e^{-t/RC}$

La descarga seguirá una representación como sigue:



Cuando t=R.C=τ (constante de tiempo del circuito)
La ecuación energética es:

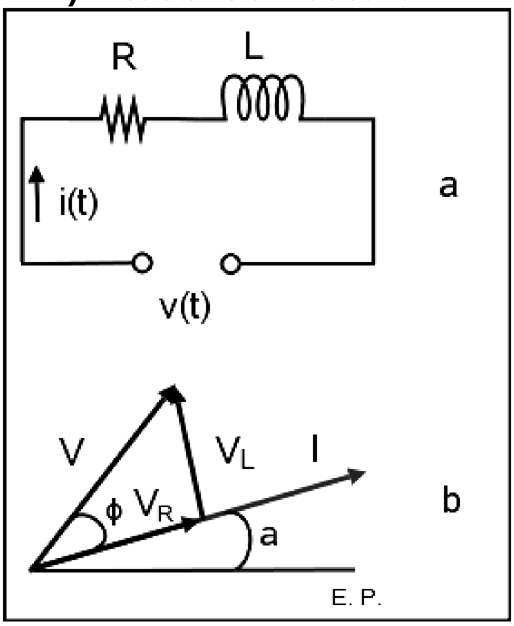
$$e=R.i+\frac{1}{C}.q$$

$$e.dq=R.i^2+d(\frac{1}{2}.\frac{q^2}{C})$$

el segundo término representa la energía da campo eléctrico del condensador.

REACTANCIA INDUCTIVAS Y CAPACITIVA

1) Reactancia Inductiva



El coeficiente de autoinducción L se denomina autoinductancia y se mide en Henrios [Hy].

Cuando por una L circula una i variable en el tiempo se genera una tensión u= L. di/dt

La inductancia pura (sin resistencia) acumula energía de campo magnético y la devuelve al circuito cuando la corriente cesa.
Tomemos una corriente variable con el tiempo:

$$i=\hat{I}.\cos(\omega.t+\varphi)$$

$$u = L.\frac{di}{dt} = -\omega.L.\hat{I}.sen(\omega t + \varphi) = \omega.L.\hat{I}.\cos(\omega.t + \varphi + \pi/2)$$

O sea hay un avance de la tensión con respecto a la corriente en $\pi/2$.

En forma compleja escribiremos: $u = L.\frac{di}{dt} = j.\omega.L.I$

La resistencia compleja o impedancia es: $\frac{U}{I} = j.\omega.L = Z = j.X_L = \omega.L.e^{j.\pi/2}$

La admitancia de la inductancia o susceptancia es.

$$Y = \frac{1}{Z_L} = \frac{1}{\omega.L}.e^{-j.\pi/2} = -j.\frac{1}{\omega.L} = j.B$$

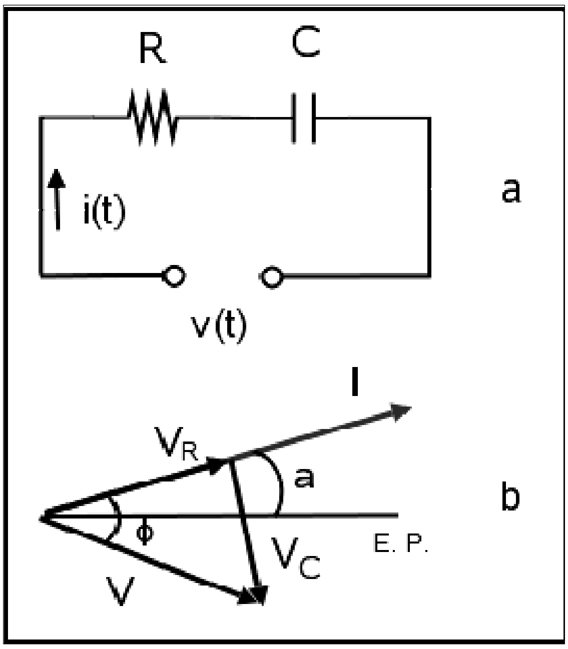
2) Reactancia Capacitiva

Si tenemos una capacidad ideal y aplicamos una tensión u se produce una elevación de carga q=C.u y un almacenamiento de energía eléctrica $i = \frac{dq}{dt} = C.\frac{du}{dt}$

En CA: $u = \hat{U}.\cos(\omega t + \varphi)$

$$i = C.\frac{du}{dt} = j.\omega.C.u = -\omega.C.\hat{U}.sen(\omega t + \varphi) = -\omega.C.\hat{U}.\cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$$

O sea la corriente adelanta a la tensión en $\pi/2$



El valor instantáneo complejo es:

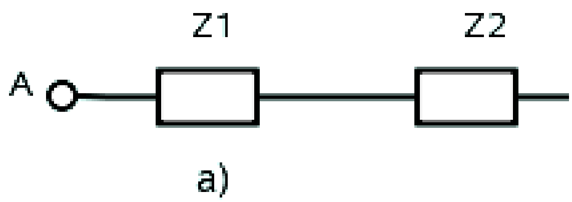
$$i = C.\frac{du}{dt} = j.\omega.C.U$$

La amplitud compleja es

$$I = j.\omega.C.U = \omega.C.U.e^{j\pi/2}$$

La admitancia es: $Y_C = \frac{I}{U} = j.\omega.C = j.B_C$

COMBINACIONES DE RESISTENCIAS COMPLEJAS
CIRCUITO SERIE
Tomemos el siguiente circuito



Por este circuito circula una **I** compleja que ocasiona:
u1=I.Z1   y u2= I.Z2

La tensión será: u= u1+u2
Y la resistencia compleja será:

$$Z = \frac{u}{I} = \frac{u_1 + u_2}{I} = Z_1 + Z_2$$

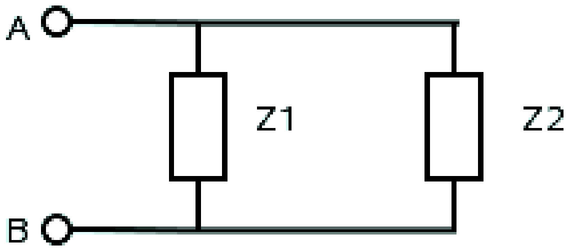
$$\left.\begin{aligned} Z1 &= |Z1|.e^{j.\varphi 1} = R1 + j.X1 \\ Z2 &= |Z2|.e^{j.\varphi 2} = R2 + j.X2 \end{aligned}\right\} \quad Z = R + j.X$$

donde R=R1+R2
X=X1+X2

<u>Atención:</u> La suma es de cantidades complejas no de valores absolutos

CIRCUITO PARALELO:

$$I1 = \frac{u}{Z1} \qquad I2 = \frac{u}{Z2}$$



$$Z = \frac{u}{I} = \frac{u}{I1 + I2} = \frac{1}{\frac{1}{Z1} + \frac{1}{Z2}} = \frac{Z1.Z2}{Z1 + Z2}$$

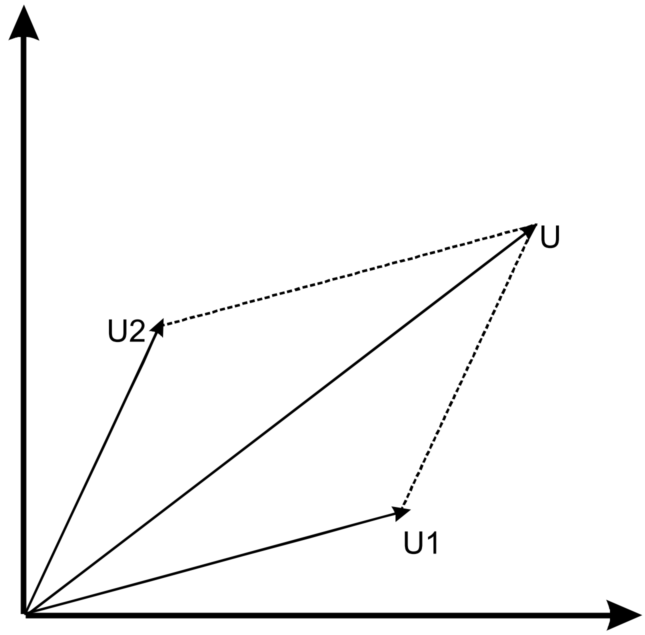
Si tomamos la admitancia:

$$Y = \frac{I}{u} = \frac{I1 + I2}{u} = Y1 + Y2$$

$Y1 = G1 + j.B1$, $Y2 = G2 + j.B2$ y por lo tanto : G=G1+G2
B=B1+B2

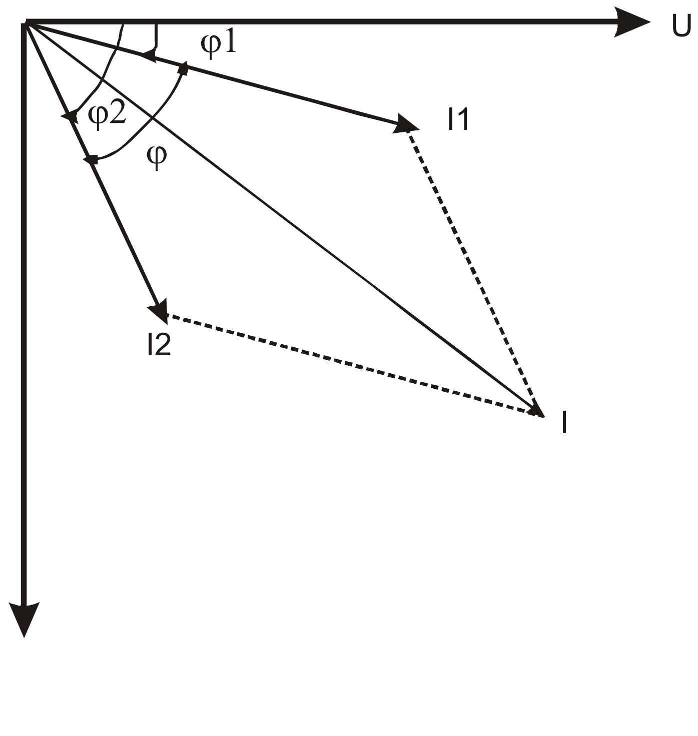
DIAGRAMAS FASORIALES

Los diagramas fasoriales correspondientes a cada circuito son:



CIRCUITO SERIE

CIRCUITO PARALELO



$$I_1 = \frac{U}{|Z|}.e^{-j.\varphi 1}$$

$$I_2 = \frac{U}{|Z|}.e^{-j.\varphi 2}$$

$$I = \frac{U}{|Z|}.e^{-j.\varphi}$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi$$