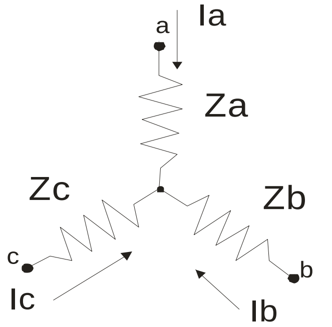
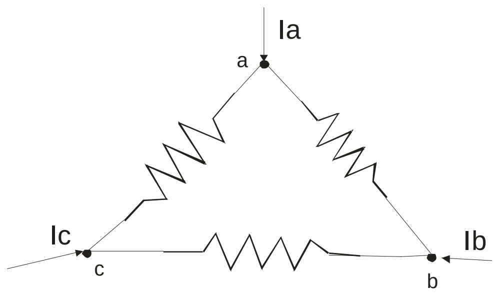
Resolución de Circuitos

1. Ya estudiamos cómo sustituir una red de dos terminales o dipolos por una impedancia o admitancia equivalente, según sea un circuito serie o paralelo respectivamente.

2. Redes de Tres Terminales:
   Se presentan estas redes como conexiones abiertas llamadas en estrella o Y y redes cerradas, llamadas conexión triángulo o Δ.
   Desarrollaremos las ecuaciones de equivalencia de una conexión a otra, entendiendo como circuitos equivalentes a aquellos que no modifican las corrientes y tensiones en los terminales.
   Estos circuitos estrella y triángulo pueden ser parte de uno más extenso y en ese sentido pueden sustituirse uno a otro sin alterar el resto del circuito.





Resolviendo las corrientes en el triángulo tenemos:

$$Ia = Iab + Iac = Iab - Ica \quad \textbf{(1)}$$

Pero $Iab = \dfrac{Vab}{Zab}$; $Ica = \dfrac{Vca}{Zac}$, sustituyendo en (1) y escribiendo lo mismo para las otras dos corrientes Ib e Ic resulta:

$$\begin{cases} Ia = \dfrac{Vab}{Zab} - \dfrac{Vca}{Zac} & (1) \\ Ib = \dfrac{Vbc}{Zbc} - \dfrac{Vab}{Zab} & (2) \\ Ic = \dfrac{Vca}{Zca} - \dfrac{Vbc}{Zbc} & (3) \end{cases}$$

Al voltaje de la conexión Y lo evaluamos de la misma forma:

$$Vab = Ia \cdot Za - Ib \cdot Zb \quad (4)$$
$$Vbc = Ib \cdot Zb - Ic \cdot Zc \quad (5)$$
$$Vca = Ic \cdot Zc - Ia \cdot Za \quad (6)$$

$$Ia + Ib + Ic = 0 \therefore Ic = -Ia - Ib$$

Reemplazando esta última en (6):

$$Vca = -Ia \cdot Zc - Ib \cdot Zc - Ia \cdot Za$$

$$Vca = -Ia \cdot (Zc + Za) - Ib \cdot Zc \qquad (7)$$

$$Vab = Ia \cdot Za - Ib \cdot Zb \qquad (4)$$

y

$$Vbc = Ib \cdot Zb - Ic \cdot Zc = Ib \cdot Zb + Ia \cdot Zc + Ib \cdot Zc$$

$$Vbc = Ia \cdot Zc + Ib \cdot \left(Zb + Zc\right) \qquad (8)$$

Resolviendo (7) y (4) para Ia:

$$Ia := \frac{\begin{pmatrix} Vca & -Zc \\ Vab & -Zb \end{pmatrix}}{\begin{bmatrix} -(Zc + Za) & -Zc \\ Za & -Zb \end{bmatrix}}$$

$$Ia := \frac{-Vca \cdot Zb + Zc \cdot Vab}{Zc \cdot Zb + Za \cdot Zb + Zc \cdot Za} \qquad ;$$

$$Ia := \frac{Vab \cdot Zc - Vca \cdot Zb}{Za \cdot Zb + Zb \cdot Zc + Zc \cdot Za} \qquad (9)$$

De (8) y (4):

$$Ib := \frac{\begin{pmatrix} Za & Vab \\ Zc & Vbc \end{pmatrix}}{\begin{bmatrix} -(Zc + Za) & -Zc \\ Za & -Zb \end{bmatrix}}$$

$$Ib = \frac{Vbc \cdot Za - Vab \cdot Zc}{Za \cdot Zb + Zb \cdot Zc + Zc \cdot Za} \qquad (10)$$

Del mismo modo:

$$Ic = \frac{Vca \cdot Zb - Vbc \cdot Za}{Za \cdot Zb + Zb \cdot Zc + Zc \cdot Za} \qquad (11)$$

Estas corrientes (9), (10) y (11) deben ser iguales a las de (1), (2) y (3) si los sistemas son equivalentes, y para que esto se cumpla deberá:

$$\frac{1}{Zab} = \frac{Zc}{Za \cdot Zb + Zb \cdot Zc + Zc \cdot Za} \therefore Zab = \frac{Za \cdot Zb + Zb \cdot Zc + Zc \cdot Za}{Zc} \qquad (12)$$

$$\frac{1}{Zac} = \frac{Zb}{Za \cdot Zb + Zb \cdot Zc + Zc \cdot Za} \therefore Zac = \frac{Za \cdot Zb + Zb \cdot Zc + Zc \cdot Za}{Zb} \qquad (13)$$

$$\frac{1}{Zbc} = \frac{Za}{Za \cdot Zb + Zb \cdot Zc + Zc \cdot Za} \therefore Zbc = \frac{Za \cdot Zb + Zb \cdot Zc + Zc \cdot Za}{Za} \qquad (14)$$

Entonces podemos escribir la siguiente regla:
"La impedancia de cualquier lado del triángulo equivalente es igual al producto de las impedancias de la estrella tomada de a pares dividido por la rama opuesta de la Y".

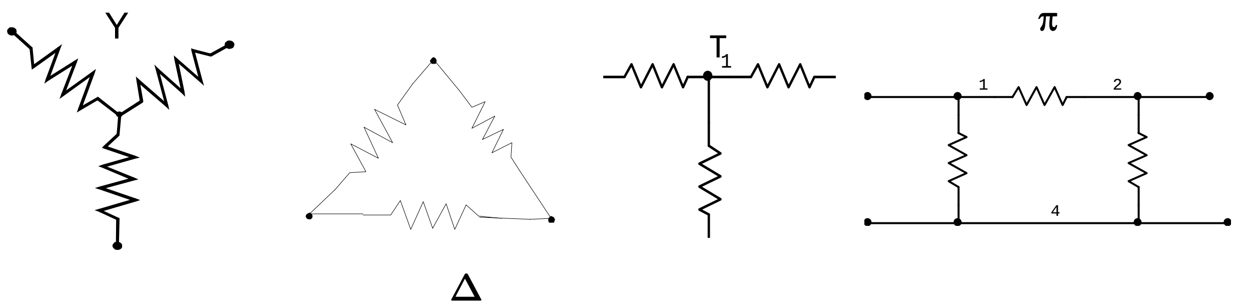
Sustitución estrella por triángulo:

A partir de los circuitos o de la solución simultánea de (12), (13) y (14) llegaremos a:

$$Za = \frac{Zab \cdot Zac}{Zab + Zbc + Zca}$$

Escribiendo la siguiente regla:
"La impedancia de cualquier rama de la Y es igual al producto de las ramas adyacentes dividido por la suma de las tres impedancias"

Las mismas redes **Y** y **Δ** son llamadas a veces π y **T**



Ecuaciones de Redes. Topología de Redes

1. Definiciones: los elementos de una red son: las resistencias, inductores y capacitares (elementos pasivos) y generadores de tensión (elementos activos).

NODO: es un punto de una red donde dos o más elementos se unen (no hay bifurcación de corriente).
Si tres o más elementos se unen en un nodo (bifurcación de corrientes) se llama UNION.

RAMA de una red es la que se extiende de una unión a otra y puede consistir en un elemento o varios conectados en serie; o sea, hay un nodo en cada extremo de un elemento y una unión en el extremo de cada rama.
Una MALLA (espira, Loop) es una trayectoria cerrada única para la corriente.
Un elemento es lineal si tiene R, L o C constantes sin importar las condiciones de corriente y voltaje.
Una red lineal está compuesta por elementos lineales y la ecuación diferencial es lineal.
BILATERAL se refiere al acoplamiento entre circuitos, si la corriente en un circuito produce voltaje en otro, y si la misma corriente en el segundo circuito produjera el mismo voltaje en el primero diríamos que el acoplamiento sería SIMÉTRICAMENTE BILATERAL (todos los elementos eléctricos incluidos los transformadores se consideran Simétricamente Bilaterales).
Un transistor se presenta como un elemento Asimétricamente Bilateral.

Número de Nodos y Mallas

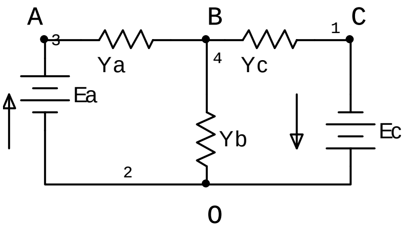
Algunas redes tienen más nodos que mallas y viceversa. La ventaja de los métodos que siguen se encuentra en la emplear el método de solución que requiera la menor cantidad de ecuaciones simultáneas. Para juzgar esto contamos con la TOPOLOGÍA que nos dice que si:

E: Nº de elementos
N: uso de nodos independientes (uno menos que el número total)
L: Nº de mallas independientes
Entonces para cualquier conexión se cumple:

$$\mathbf{N + L = E}$$

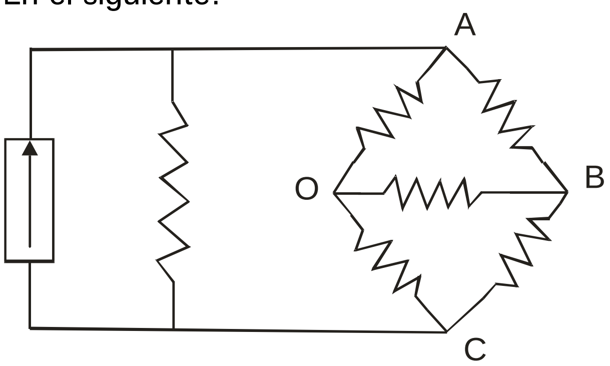
Vemos que una vez dibujado el circuito es fácil contar el Nº de elementos E y el Nº de Nodos independientes N, con lo que aplicando la expresión anterior podemos calcular las mallas existentes.

<u>Ejemplos:</u>



Aquí tenemos:
5 elementos
3 nodos independientes (4-1)
El total de mallas será: 5-3=2

En el siguiente:



7 Elementos
3 Nodos Independientes
Total de Mallas: 7-3=4

Métodos de resolución

Nos basamos en tres relaciones básicas:

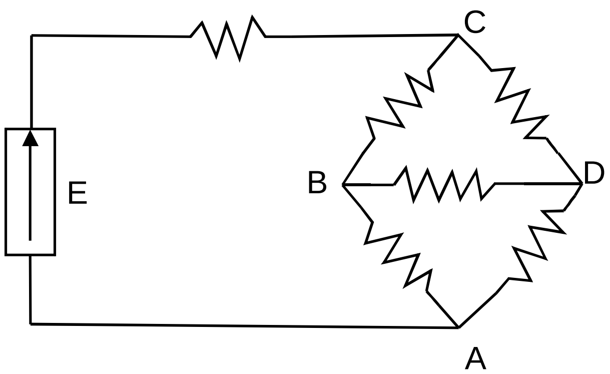
1. Ley de Ohm
2. Ley de Kirchoff de los nodos
3. Ley de Kirchoff de las mallas

Y además en el hecho que siempre es posible escribir tantas ecuaciones como incógnitas tenemos.

Si el número de ramas es B, el número de incógnitas es 2*B.

Escribiremos entonces la Ley de Ohm para cada rama y tendremos B ecuaciones. Las B ecuaciones restantes las escribiremos aplicando las leyes de Kirchoff para corrientes más las de voltaje.

Ejemplo:



Podemos escribir las ecuaciones de rama:

$$V_{AB} = Z_{AB} \cdot I_{AB} \quad ; \quad V_{BD} = Z_{BD} \cdot I_{BD}$$
$$V_{BC} = Z_{BC} \cdot I_{BC} \quad ; \quad V_{DA} = Z_{DA} \cdot I_{DA}$$
$$V_{CD} = Z_{CD} \cdot I_{CD} \; ; \; V_{CA} = Z_{CA} \cdot I_{CA} + E$$

Si se suponen conocidas la fem E y las impedancias Z tendremos para este caso 12 incógnitas, por lo que debemos ahora plantear las ecuaciones de nodo de Kirchoff:

(B) $I_{BC} + I_{BD} + I_{BA} = 0$
(C) $I_{CB} + I_{CD} + I_{CA} = 0$
(A) $I_{AC} + I_{AD} + I_{AB} = 0$

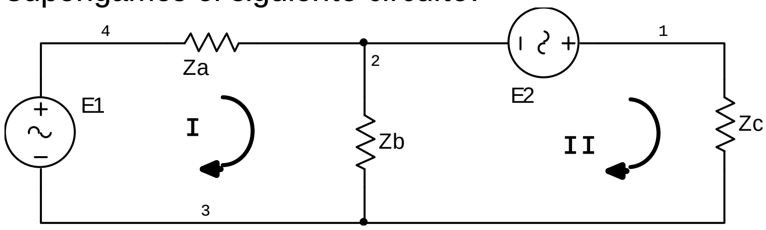
Y las ecuaciones de Kirchoff para las mallas:

$$V_{BC} + V_{CD} + V_{BD} = 0$$
$$V_{BD} + V_{BA} + V_{AD} = 0$$
$$V_{BA} + V_{CA} + V_{CB} = 0$$

Ahora tenemos 12 ecuaciones con 12 incógnitas que pueden resolverse simultáneamente.
Debemos reconocer que siempre es posible escribir tantas ecuaciones como incógnitas tenemos.

Método de las Ecuaciones de Malla

Este método selecciona las corrientes por determinar y en lugar de encontrar tantas corrientes como ramas encontraremos tantas corrientes como mallas hay.
Supongamos el siguiente circuito:



Recordar: tenemos 5 Elementos
3 Nodos independientes
5 – 3 = 2 Mallas (Malla I y Malla II)

1º Supongamos que la corriente en II sea = 0 (I_2= 0)
En la malla I tendremos:

$$Za \cdot I_1 + Zb \cdot I_1 = E_1 \therefore (Za + Zb) \cdot I_1 = E_1$$

Si ahora cerramos la malla II tendremos corriente y lo anterior queda:

$$(Za + Zb) \cdot I_1 - Zb \cdot I_2 = E_1$$

2º Haciendo el mismo análisis para la malla II encontraremos:

$$(Zb + Zc) \cdot I_2 - Zb \cdot I_1 = E_2$$

Ordenando el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (Za + Zb) \cdot I_1 - Zb \cdot I_2 = E_1 \\ -Zb \cdot I_1 + (Zb + Zc) \cdot I_2 = E_2 \end{cases}$$

Generalizando podemos escribir el conjunto de L ecuaciones lineales simultáneas aplicadas a las L mallas de esta manera:

$$\begin{cases} Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2 + Z_{13} \cdot I_3 + ... = E_1 \\ Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_2 + Z_{23} \cdot I_3 + ... = E_2 \\ .... \qquad .... \\ Z_{N1} \cdot I_1 + Z_{N2} \cdot I_2 + Z_{N3} \cdot I_3 + ... = E_N \end{cases}$$

A las impedancias Z_{11}, Z_{22}, Z_{33}, etc. las llamaremos AUTOIMPEDANCIAS DE MALLA y serán iguales a la suma de impedancias de cada malla.
A las impedancias que debido a la corriente en una malla producen un voltaje determinado en otra, las llamaremos IMPEDANCIAS MUTUAS o de transferencia y corresponde a las escritas con subíndices distintos, ej.: Z_{12}
Van a estar con signo negativo pues las direcciones de referencia de las corrientes son opuestas.
La resolución del sistema de L ecuaciones de mallas:

$$\begin{aligned} & Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2 + Z_{13} \cdot I_3 + ... = E_1 \\ & Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_2 + Z_{23} \cdot I_3 + ... = E_2 \\ & .... \quad .... \\ & Z_{N1} \cdot I_1 + Z_{N2} \cdot I_2 + Z_{N3} \cdot I_3 + ... = E_N \end{aligned}$$

donde Z y E se conocen y por tanto se deben determinar las I.

$$I = \frac{N1}{D} \quad \text{donde} \quad D = \begin{vmatrix} Z11 & Z12 & \ldots\ldots \\ & & \ldots \\ \ldots. & Z22 & \\ & & \ldots. \\ \ldots. & \ldots. & ZNN \end{vmatrix}$$

Y el numerador:

$$N1 = \begin{vmatrix} E1 & Z12 & Z13 & \ldots\ldots \\ E2 & Z22 & \ldots.. & \ldots. \\ E3 & Z32 & \ldots\ldots & \ldots.. \\ \ldots. & \ldots.. & \ldots.. & \ldots. \\ EN & ZN2 & \ldots.. & ZNN \end{vmatrix}$$

y desarrollando puede escribirse:

$$I1 = \frac{N1}{D} = \frac{E1 \cdot \Delta 11}{D} + \frac{E2 \cdot \Delta 21}{D} + \frac{E3 \cdot \Delta 31}{D} + \ldots\ldots$$

Donde $\Delta 11$ es el menor cofactor de E_1, etc.

$$I2 = \frac{N2}{D} = \frac{E1 \cdot \Delta 12}{D} + \frac{E2 \cdot \Delta 22}{D} + \frac{E3 \cdot \Delta 32}{D} + \ldots\ldots etc$$

En realidad al conjunto de ecuaciones podemos presentarlo como un arreglo sistemático a través de matrices

$$[I] \cdot [Z] = [E]$$

$$\begin{bmatrix} I1 \\ I2 \\ . \\ IL \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} Z11 & Z12 & \ldots & Z1L \\ \ldots & \ldots. & \ldots. & \ldots \\ \ldots & \ldots. & \ldots & \ldots. \\ ZL1 & ZL2 & \ldots & ZLL \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E1 \\ E2 \\ . \\ EL \end{bmatrix}$$