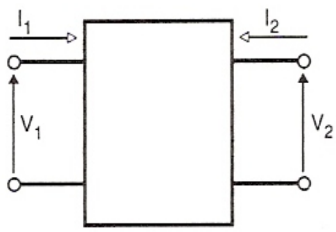
CUADRIPOLOS

Hasta ahora vimos circuitos alimentados de dos de sus bornes, por una o varias fuentes. Ahora veremos aquellos circuitos alimentados por dos pares de bornes. Estos circuitos se denominan cuadripolos o redes de dos puertos.
Sin embargo no son redes generales sino que se ven limitadas por una condición:
La corriente en un Terminal de un par debe ser igual y opuesta a la corriente en la otra Terminal, o sea:

$$I1 = - I2$$

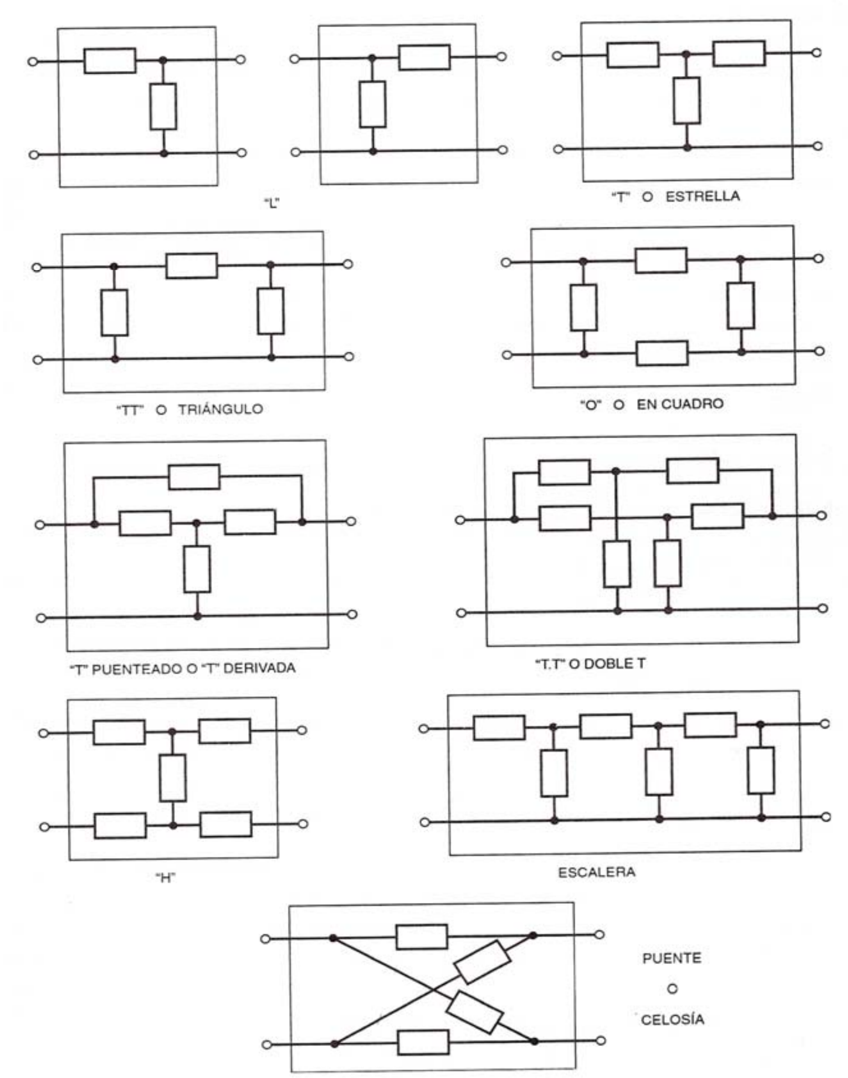
Representación gráfica



Dentro del rectángulo se encuentra un circuito que debe cumplir tres condiciones:

a) Todos los elementos que componen el mismo son lineales
b) Los elementos son homogéneos e isótropos, o sea son bilaterales.
c) Dentro del rectángulo no puede haber fuentes independientes.

Estructuras Fundamentales



Cada una de las impedancias representadas puede ser resistiva, capacitiva o inductiva, o incluso formadas por inductancias mutuas.

Convenciones Utilizadas

- Diremos que una red es simétrica cuando puede cambiarse extremo por extremo sin afectar el resto del sistema del que es parte.
- Las corrientes se indican entrantes por la parte superior y salientes por la inferior.
- Las tensiones se refieren a que los terminales superiores tienen un potencial mayor que los inferiores.

Tipos de Problemas a resolver en los cuadripolos

1) <u>Problema de transferencia</u>: se requiere encontrar el voltaje en uno de los dos terminales en función de ambas corrientes o una corriente en función de ambos voltajes.
2) <u>Problema de transmisión:</u> se requiere encontrar el voltaje y la corriente en uno de los terminales en función del voltaje y la corriente en el otro Terminal.
   - Las condiciones terminales para la transmisión pueden ser bastante generales y no restringidas o
   - Puede especificarse que la impedancia conectada a los terminales de salida sea igual a un valor particular conocido como *Impedancia Imagen* del cuadripolo.
3) <u>Problema de Inserción:</u> Se requiere encontrar el efecto de inserción de un cuadripolo en un sistema. Ejemplo un filtro, una red igualadora, etc. El voltaje, la corriente y la potencia hacia la carga después de la inserción se calculan en función del voltaje, corriente y potencia hacia la carga antes de la inserción.

Tipos de Expresiones a plantear:

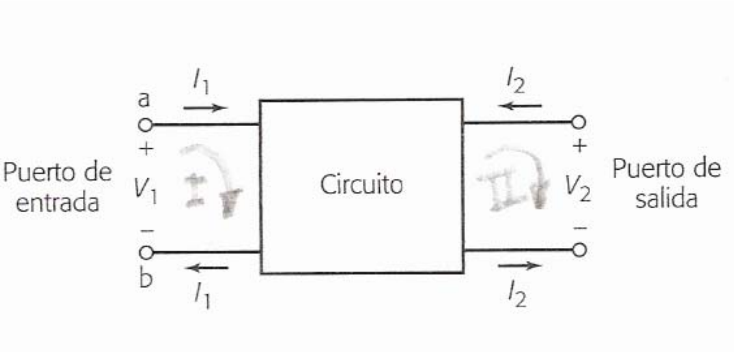
U_1 y U_2 en función de I_1 e I_2
I_1 e I_2 en función de U_1 y U_2

U_1 e I_1 en función de U_2 e I_2
U_2 e I_2 en función de U_1 e I_1

Y por último:

U_1 e I_2 en función de U_2 e I_1
U_2 e I_1 en función de U_1 e I_2

Parámetros admitancia (Ecuaciones de Malla)



Como ya dijimos, las dos únicas mallas que pueden tener fuentes independientes son la I y la II, ya que dentro del cuadripolo <u>no</u> pueden existir fuentes independientes.

Planteando las ecuaciones de malla:

$$I_1 = Y_{11} * U_1 + Y_{12} * U_2$$

El signo se da porque I_2 tiene sentido contrario

$$I_2 = Y_{21} * U_1 + Y_{22} * U_2$$

$$Y_{11} = \left.\frac{I_1}{U_1}\right|_{U2=0}$$ Admitancia de entrada en cortocircuito a la salida (impulsora)

$$Y_{12} = \left.\frac{I_1}{U_2}\right|_{U1=0}$$ Admitancia de transferencia inversa en cortocircuito a la entrada (transferencia)

$$Y_{22} = \left.\frac{I_2}{U_2}\right|_{U1=0}$$ Admitancia de salida en cortocircuito a la entrada (impulsora).

$$Y_{21} = \left.\frac{I_2}{U_1}\right|_{U2=0}$$ Admitancia de transferencia en cortocircuito a la salida (transferencia).

> Una red es bilateral cuando no tiene fuentes dependientes y se cumple que $Y_{12}= Y_{21}$.
> O sea quedan sólo tres parámetros.
> Si la red es simétrica (caso T o Π) y los valores de las componentes simétricas son iguales $Y_{11}= Y_{22}$

Parámetros Impedancia

Planteando las ecuaciones de nodo:

$$U_1 = Z_{11} * I_1 + Z_{12} * I_2$$

$$U_2 = Z_{21} * I_1 + Z_{22} * I_2$$

$$Z_{11} = \left.\frac{U_1}{I_1}\right|_{I2=0}$$ Impedancia de entrada con salida a circuito abierto.

$$Z_{12} = \left.\frac{U_1}{I_2}\right|_{I1=0}$$ Impedancia de transferencia inversa a circuito abierto a la entrada.

$$Z_{21} = \left.\frac{U_2}{I_1}\right|_{I2=0}$$ Impedancia de transferencia directa a circuito abierto a la salida.

$$Z_{22} = \left.\frac{U_2}{I_2}\right|_{I1=0}$$ Impedancia de salida con entrada abierta.

También si el circuito es bilateral $Z_{12} = Z_{21}$

Y si es simétrico $Z_{11} = Z_{22}$

Hallaremos para el caso de admitancias U1:

$$U_1 = \frac{\begin{vmatrix} I_1 & Y_{12} \\ I_2 & Y_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{vmatrix}} = \frac{Y_{22} * I_1}{\Delta Y} - \frac{Y_{12} * I_2}{\Delta Y}$$

Y comparando con las ecuaciones desarrolladas para la impedancia, a saber:

$$U_1 = Z_{11} * I_1 + Z_{12} * I_2$$

Podemos concluir que: $Z_{11} = \dfrac{Y_{22}}{\Delta Y}$ y que $Z_{12} = -\dfrac{Y_{12}}{\Delta Y}$

Y de la misma manera para los otros parámetros:

$$U_2 = \frac{\begin{vmatrix} Y_{11} & I_1 \\ Y_{21} & I_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{vmatrix}} = \frac{Y_{11} * I_2}{\Delta Y} - \frac{Y_{21} * I_1}{\Delta Y}$$

Y de:

$$U_2 = Z_{21} * I_1 + Z_{22} * I_2 \qquad \therefore \qquad Z_{21} = -\frac{Y_{21}}{\Delta Y} \quad \text{y que} \quad Z_{22} = +\frac{Y_{11}}{\Delta Y}$$

Parámetros Híbridos

$$U_1 = h_{11} * I_1 + h_{12} * U_2$$

$$I_2 = h_{21} * I_1 + h_{22} * U_2$$

Los parámetros que aquí aparecen no son parámetros Admitancia ni Impedancia.

$$h_{11} = \left.\frac{U_1}{I_1}\right|_{U2=0}$$

Impedancia de entrada con salida en cortocircuito.

$$h_{12} = \left.\frac{U_1}{I_2}\right|_{I1=0}$$

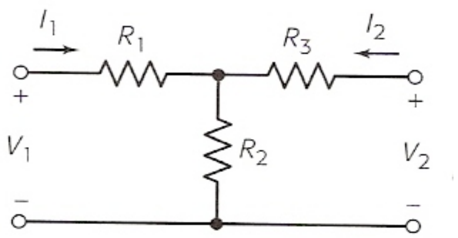
Ganancia inversa de tensión con circuito abierto a la entrada.

$$h_{21} = \left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{U2=0}$$ Ganancia directa de corriente con cortocircuito a la salida.

$$h_{22} = \left.\frac{I_2}{U_2}\right|_{I1=0}$$ Admitancia de salida con circuito abierto a la entrada.

Importante: no tienen porqué ser iguales h_{12} con h_{21}.

Ejercicio: determinación práctica de los parámetros



R_1= 1 Ω ; R_2= 4 Ω ; R_3= 6 Ω

Parámetros admitancia

$$Y_{11} = \left.\frac{I_1}{U_1}\right|_{U2=0}$$

I_1 con U_2=0 es: $$I_1 = \frac{U_1}{\frac{R_2 * R_3}{R_2 + R_3} + R_1}$$

$$Y_{11} = \frac{U_1}{\frac{R_2 * R_3}{R_2 + R_3} + R_1} * \frac{1}{U_1} = \frac{1}{\frac{6*4}{6+4} + 1} = \frac{10}{34} Siemens$$

De igual manera:

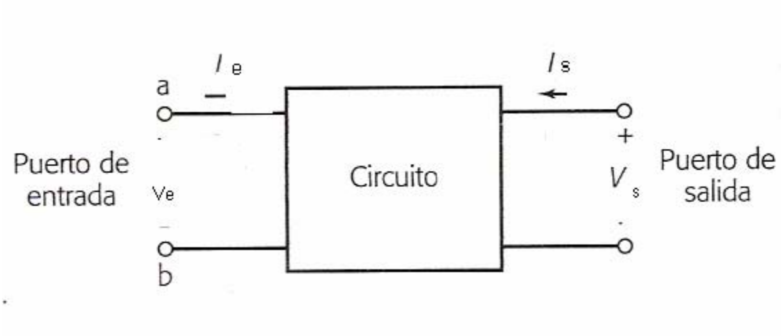
$$Y_{12} = \left.\frac{I_1}{U_2}\right|_{U1=0}$$

Para U_1= 0 se cortocircuitan las terminales de entrada; y al emplear el divisor de corriente se tiene:

$$-I_1 = I_2 * \left(\frac{R_2}{R_1 + R_3}\right) = I_2 * \left[\frac{6}{1+4}\right] = I_2 * \frac{6}{5}$$ e $$I_2 = \frac{U_2}{R2 + \left[\frac{R1 * R3}{R1 + R3}\right]} = \frac{U_2}{6 + \left[\frac{1*4}{1+4}\right]} = U2 * \frac{5}{34}$$

$$Y_{12} = \frac{I_1}{U_2} = \frac{-U_2 * \frac{5}{34} * \frac{6}{5}}{U_2} = -\frac{6}{34}\,Siemens$$

Funciones Generales



Conocidos los parámetros admitancia o impedancia hallaremos la corriente y tensión en un par de bornes conocidas la corriente y tensión en el otro.

Plantearemos las ecuaciones que vinculan entrada con salida

$$Ue = A*Us + B*Is(1)$$
$$Ie = C*Us + D*Is(2)$$

Definiremos los parámetros A, B, C y D a partir de los parámetros admitancia o de los parámetros impedancia. Esto es posible porque están referidos al mismo cuadripolo.
Como Is tiene sentido opuesto a Ie planteamos los parámetros admitancia así:

$$Ie = Y_{11}*Ue + Y_{12}*Us$$
$$-Is = Y_{21}*Ue + Y_{22}*Us \qquad \therefore \qquad Ue = -\frac{Y_{22}}{Y_{21}}*Us - \frac{1}{Y_{21}}*Is$$

Comparando con la ecuación (1) vemos que:

$$A = -\frac{Y_{22}}{Y_{21}} \quad ; \quad B = -\frac{1}{Y_{21}}$$

Reemplazando en $Ie = Y_{11}*Ue + Y_{12}*Us$, tenemos:

$$Ie = Y_{11}*\left(-\frac{Y_{22}}{Y_{21}}*Us - \frac{1}{Y_{21}}*Is\right) + Y_{12}*Us = \left(Y_{12} - \frac{Y_{11}*Y_{22}}{Y_{21}}\right)*Us\frac{Y_{11}}{Y_{21}}*Is$$

De la (2) vemos:

$$C = \left[Y_{12} - \frac{Y_{11}*Y_{22}}{Y_{21}}\right] \quad \text{y} \quad D = \frac{-Y_{11}}{Y_{21}}$$

Llamaremos funciones generales de la red a los parámetros A, B, C y D (no son constantes pues vemos que son funciones de las admitancias las que varían con la frecuencia).

Obtención a partir de las impedancias

$$Ue = Z_{11} * Ie - Z_{12} * Is$$

$$Us = Z_{21} * Ie - Z_{22} * Is \qquad Ie = \frac{Us}{Z_{21}} + \frac{Z_{22}}{Z_{21}} * Is$$

Comparando con (2): $C = \dfrac{1}{Z_{21}}$ y $D = \dfrac{Z_{22}}{Z_{21}}$

Reemplazando **I_e** en la primera ecuación:

$$Ue = Z_{11} * \left[\frac{Us}{Z_{21}} + \frac{Z_{22}}{Z_{21}} * Is\right] - Z_{12} * Is$$

$$Ue = \frac{Z_{11}}{Z_{21}} * Us + \left[Z_{11} * \frac{Z_{22}}{Z_{21}} - Z_{12}\right] * Is$$

Y entonces:

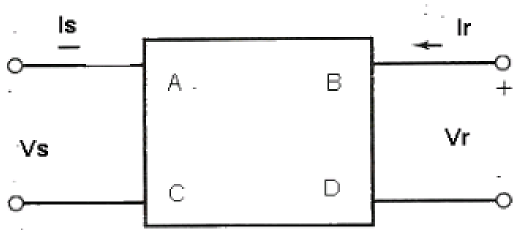
$$A = \frac{Z_{11}}{Z_{21}} \quad \text{y} \quad B = \left(Z_{11} * \frac{Z_{22}}{Z_{21}} - Z_{12}\right)$$

Como conclusión:

En funciones generales de red A, B, C y D se obtienen a través de los parámetros admitancia o impedancia, los cuales se calculan si el interior del cuadripolo es accesible, sino hay que realizar los ensayos a circuito abierto y en cortocircuito.

Problema de Transmisión: Impedancia Imagen

Limitaremos al discusión a redes simétricas



Como es simétrica:

A = D

$$Us = A * Vr + B * Ir (1)$$
$$Is = C * Vr + D * Ir (2)$$

La impedancia de entrada a la red es: $Z_1 = \frac{Vs}{Is}$

La impedancia de salida es: $Z_2 = \frac{Vr}{Ir}$

Por supuesto la impedancia de entrada depende de qué impedancia esté conectada a la salida y por tanto variando Z_2 variará Z_1.
Al valor de impedancia Terminal que hace que esta sea igual a la impedancia de entrada se la denomina: Impedancia Imagen **Z_o**,

O sea $Z_1 = Z_2 = Z_o$

Operando sobre (1) y (2)

$$Z_1 = \frac{Vs}{Is} = \frac{A * Vr + B * Ir}{C * Vr + D * Ir} \qquad \text{y} \qquad Vr = Ir * Z_2$$

$$Z_1 = \frac{A * Ir * Z_2 + B * Ir}{C * Ir * Z_2 + D * Ir} = \frac{A * Z_2 + B}{C * Z_2 + D}$$

Pero como $Z_1 = Z_2 = Z_o$

$$C * Zo * Zo + D * Zo = A * Zo + B \quad \therefore \quad Zo = \sqrt{\frac{B}{C}}$$

(Dado que por ser simétricas $D * Zo = A * Zo$)

Y puesto que $Z_{1Abierto} = \frac{A}{C}$ y $Z_{1Corto} = \frac{B}{D}$

$$Z_{1Abierto} * Z_{1Corto} = \frac{B}{C} \qquad \text{y} \qquad Z_o = \sqrt{Z_{1Abierto} * Z_{1Corto}}$$

O sea, la impedancia imagen es simplemente la media geométrica (raíz cuadrada del producto) de la impedancia de entrada en circuito abierto por la impedancia de entrada en cortocircuito.**