T.P. N°3.1:

Una placa rectangular de acero, como la de la figura, se encuentra sometida a tensiones normales uniformes solamente en las direcciones x e y. Con instrumentos de laboratorio se midieron las deformaciones en las direcciones de las tensiones (ε_x y ε_y). Se pide determinar en forma analítica el valor de la deformación faltante (ε_z) y la deformación específica volumétrica para los datos que se consignan.

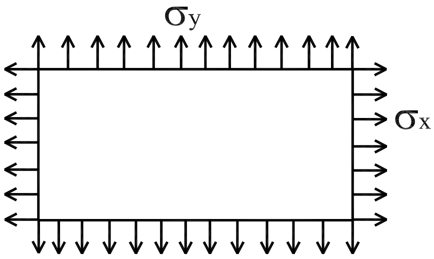
Datos:

$\varepsilon_x = 500 \times 10^{-6}$

$\varepsilon_y = 100 \times 10^{-6}$

$\mu = 0{,}30$

$E = 2 \times 10^{6}$ kg/cm^2



Como: $\left.\begin{array}{l}\sigma_x \neq 0 \\ \sigma_y \neq 0 \\ \sigma_z = 0\end{array}\right\}$ Estado plano o doble de tensiones

$\therefore$ Se puede establecer:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu \times \sigma_y) \qquad (1)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu \times \sigma_x) \qquad (2)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \times (-\mu) \times (\sigma_x + \sigma_y) \qquad (3)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{De (1): } \sigma_x = E \times \varepsilon_x + \mu \times \sigma_y \\ \text{(2): } \sigma_y = E \times \varepsilon_y + \mu \times \sigma_x\end{array}\right\} \begin{array}{l}\sigma_x = E \times \varepsilon_x + \mu \times E \times \varepsilon_y + \mu^2 \times \sigma_x \\ \therefore \sigma_x = \dfrac{E}{(1-\mu^2)} \times (\varepsilon_x + \mu \times \varepsilon_y)\end{array}$$

Análogamente: $\sigma_y = \dfrac{E}{(1-\mu^2)} \times (\varepsilon_y + \mu \times \varepsilon_x)$

Reemplazando valores:

$$\sigma_x = \frac{2 \times 10^6 \, Kg}{(1 - 0{,}30^2)\, cm^2}(500 \times 10^{-6} + 0{,}30 \times 100 \times 10^{-6}) \cong 1165 \, kg/cm^2$$

$$\sigma_y = \frac{2 \times 10^6 \, Kg}{(1 - 0{,}30^2)\, cm^2}(100 \times 10^{-6} + 0{,}3 \times 500 \times 10^{-6}) \cong 550 \, kg/cm^2$$

Reemplazando en (3):

$$\varepsilon_z = -\frac{0{,}30 \, cm^2}{2 \times 10^6 \, Kg}(1165 + 550)\frac{Kg}{cm^2} \rightarrow \boxed{\varepsilon_z = -257 \times 10^{-6}}$$

Deformación especifica en la dirección z ($\varepsilon_z < 0$ => contracción).

La deformación específica volumétrica es:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = (500 + 100 - 257) \times 10^{-6} \rightarrow \boxed{\varepsilon_v = +343 \times 10^{-6}}$$ ($\varepsilon_v > 0 \Rightarrow$ aumento de volumen)

<u>T.P.N°3.2:</u>

De una sección específica de un elemento estructural sometido a un estado de cargas, se extrae para su análisis un prisma elemental en el que se pone en evidencia el estado tensional a que está sujeto (ver figura).

Para dicho estado se pide: determinar en forma analítica y gráfica σ_α y τ_α para α = 45°, las tensiones principales y las direcciones de los planos donde actúan.

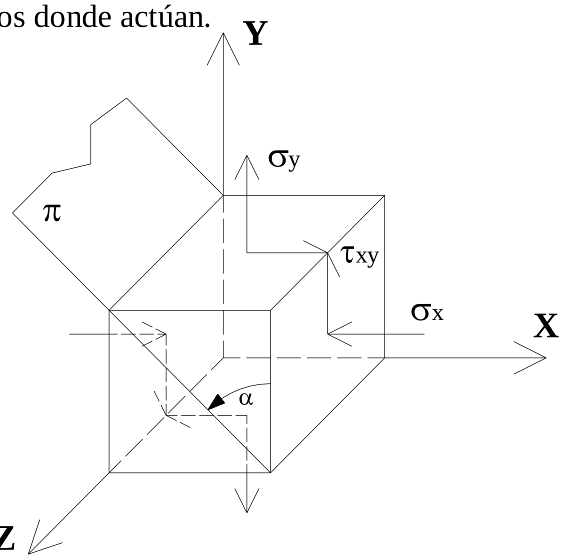
<u>Datos:</u>

σ_x = - 300 kg/cm^2

σ_y = 100 kg/cm^2

τ_{xy} = - 300 kg/cm^2

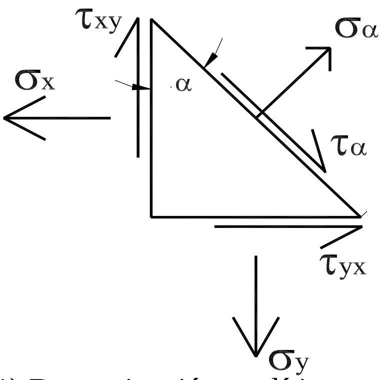
α = 45°



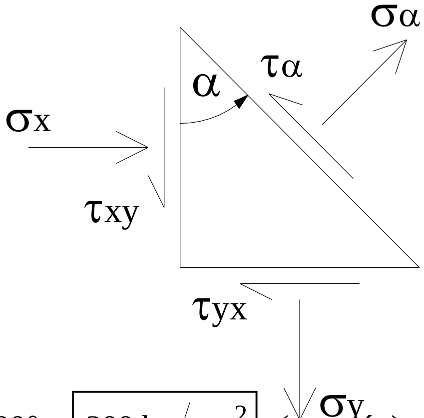
Un elemento definido por tres planos normales entre sí, está sometido a un estado doble o plano, cuando las tensiones en dos de sus caras son nulas.

Debido al estado tensional existente (σ_x, σ_y, τ_{xy}) se producen en un plano π que forma un ángulo α con el plano vertical yz, tensiones σ_α y τ_α normales entre sí que se pueden calcular con las expresiones analíticas y las formas gráficas vista en teoría.

Recordando la <u>convención de signos</u>:



Tensiones normales: $\sigma > 0 \Rightarrow$ Tracción
Tensiones tangenciales: $\tau > 0 \Rightarrow \uparrow\downarrow$ (momento horario respecto a un punto interior del prisma)
Angulo: $\alpha > 0 \Rightarrow \downarrow\uparrow$ antihorario a partir del plano vertical



1) <u>Determinación analítica</u>:

En nuestro caso:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \times \cos 2\alpha - \tau_{xy} \times \operatorname{sen} 2\alpha$$

$$\sigma_\alpha = \frac{-300 + 100}{2} + \frac{-300 - 100}{2} \times \cos 90° + 300 \times \operatorname{sen} 90° = \boxed{200 \text{ kg}/\text{cm}^2} \quad \text{(tracción)}$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \times \operatorname{sen} 2\alpha + \tau_{xy} \times \cos 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{-300 - 100}{2} \times \operatorname{sen} 90^o - 300 \times \cos 90^o \rightarrow \boxed{\tau_\alpha = -200 \text{ kg}/\text{cm}^2} \text{(antihorario)}$$

Tensiones principales:
Son los valores extremos (máximos y mínimos) de las tensiones normales, y sus direcciones definen los ejes principales.
Además, en los planos donde actúan, las tensiones tangenciales son nulas.

$$\sigma_{\substack{max\\min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \times \sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\,\tau_{xy}^2}$$

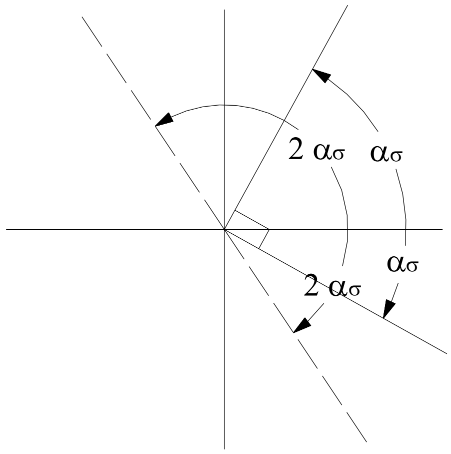
$$\sigma_{\substack{max\\min}} = \frac{-300 + 100}{2} \pm \frac{1}{2} \times \sqrt{\left(-300 - 100\right)^2 + 4\left(-300\right)^2}$$

$$= -100 \pm 360{,}55 \rightarrow \begin{cases} \boxed{\begin{array}{l} \sigma_{max} = 260{,}55\,\text{kg}/\text{cm}^2 \\ \sigma_{min} = -460{,}55\,\text{kg}/\text{cm}^2 \end{array}} \end{cases}$$

Direcciones:

$$\text{tg}2\,\alpha_\sigma = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\text{tg}2\,\alpha_\sigma = -\frac{2 \times 300}{-300 - 100} = -1{,}5 \quad (\text{tg}\,2\alpha_\sigma < 0 \Rightarrow 2\alpha_\sigma \text{ en } 2^{do} \text{ y } 4^{to} \text{ cuadrante})$$



$$\alpha_\sigma = \frac{\text{arctg}\,(-1{,}5)}{2} = -28^o\ 9'18'' \quad \left(2\alpha_\sigma \in 4^{to}\text{C}\right)$$

$$\text{ó}\ \alpha_\sigma = 90^o - 28^o\ 9'18'' = 61^o\ 50'\,42'' \quad (2\alpha_\sigma \in 2^{do}\text{C})$$

Tensiones tangenciales máximas:

$$\tau_{\substack{max\\min}} = \pm\frac{1}{2} \times \sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\,\tau_{xy}^2}$$

$$\tau_{\substack{max\\min}} = \pm\frac{1}{2} \times \sqrt{\left(-300 - 100\right)^2 + 4\,(-300)^2} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \tau_{máx} = +\,360{,}55\ \text{kg}/\text{cm}^2 \\ \tau_{min} = -360{,}55\ \text{kg}/\text{cm}^2 \end{array}}$$

Direcciones:

$$\text{tg}\ 2\alpha_\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\,\tau_{xy}} = \frac{-300 - 100}{2\left(-300\right)} = 0{,}667 \quad \left(\text{tg}\ 2\alpha_\tau > 0 \Rightarrow 2\alpha_\tau \text{ en } 1^o \text{ y } 3^o \text{ cuadrante}\right)$$

$$\alpha_\tau = \frac{\text{arctg}\ 0{,}667}{2} = 16^o\ 50'\,42''$$

$$\text{ó}\ \alpha_\tau = 90^o + 16^o\ 50'\,42'' = 106^o\ 50'\,42''$$

2) Determinación Gráfica – Círculo de Mohr para tensiones

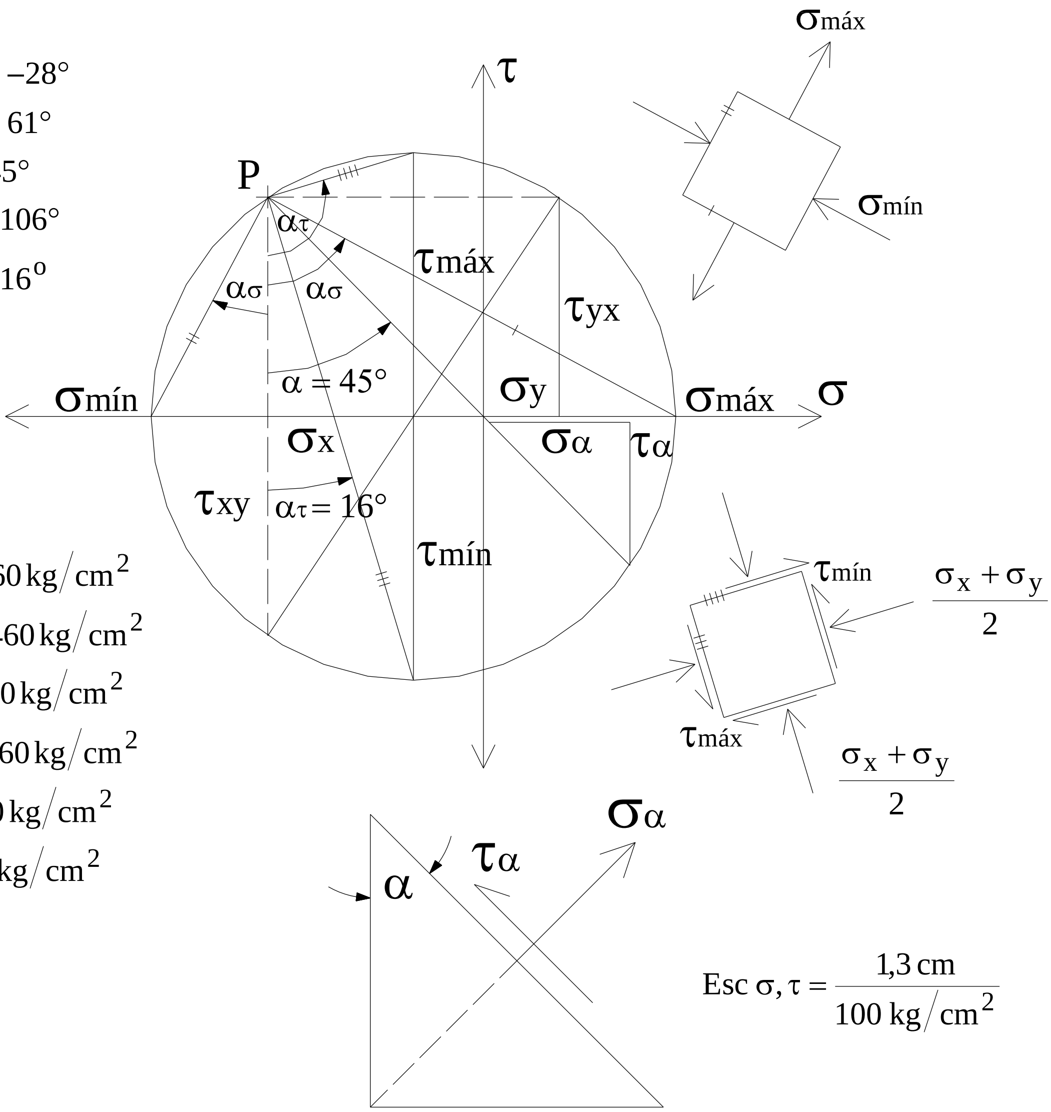
$\alpha_{\sigma} = -28°$

$\alpha_{\sigma} = 61°$

$\alpha = 45°$

$\alpha_{\tau} = 106°$

$\alpha_{\tau} = 16^{o}$



$\sigma_{max} = 260\,kg/cm^2$

$\sigma_{min} = -460\,kg/cm^2$

$\tau_{max} = 360\,kg/cm^2$

$\tau_{min} = -360\,kg/cm^2$

$\tau_{\alpha} = -200\,kg/cm^2$

$\sigma_{\alpha} = 200\,kg/cm^2$

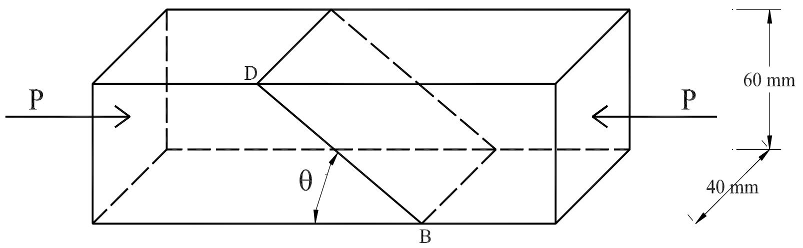
$$\text{Esc}\ \sigma, \tau = \frac{1{,}3\,cm}{100\,kg/cm^2}$$

T.P.N^0 3.3:

Se utiliza un ensamble de dos piezas biseladas para determinar la resistencia de una cola, tal como muestra la figura.

a) Especificar el valor máximo del ángulo θ para que en la cola la tensión normal sea inferior o igual al 20% de la tensión de corte (en valor absoluto).

b) Con el valor del ángulo θ hallado anteriormente, la cola cede cuando la carga P es de 780Kg. Calcular la tensión de corte actuante en la cola y la tensión normal ejercida sobre el plano de contacto.



a) Un elemento diferencial está sometido a un estado de compresión simple ($\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 0$)

Debemos buscar un ángulo α tal que: $\sigma_\alpha \le 0{,}20\,\tau_\alpha$

$$\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\times\cos 2\alpha-\tau_{xy}\times\text{sen }2\alpha \le 0{,}20\times\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\times\text{sen }2\alpha+\tau_{xy}\times\cos 2\alpha\right)$$

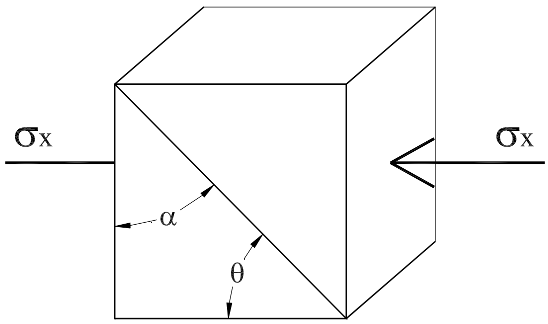
$$\frac{\sigma_x}{2}\times(1+\cos 2\alpha) \le 0{,}20\times\frac{\sigma_x}{2}\times\text{sen }2\alpha$$

$(\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) + (\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha) \le 0{,}20 \times 2 \times \text{sen }\alpha \times \cos\alpha$

$2\cos^2\alpha \le 0{,}20 \times 2 \times \text{sen }\alpha \times \cos\alpha$

$$\frac{\text{sen }\alpha}{\cos\alpha} = \text{tg }\alpha \ge \frac{1}{0{,}20} = 5 \Rightarrow \alpha \ge 78°\,41'\,24''$$

$\therefore$ $\boxed{\theta \le 11°\ 18'\ 36''}$



b) Para P = 780 Kg $\therefore \sigma_x = \dfrac{-780\,\text{Kg}}{4\times 6\,\text{cm}^2} = -32{,}5\,\text{kg/cm}^2$ (compresión)

$$\sigma_\alpha = \frac{-32{,}5}{2}\text{kg/cm}^2\left[1+\cos\left(2\times 78^o\ 41'\,24''\right)\right]\rightarrow \boxed{\sigma_\alpha = -1{,}25\,\text{kg/cm}^2}$$

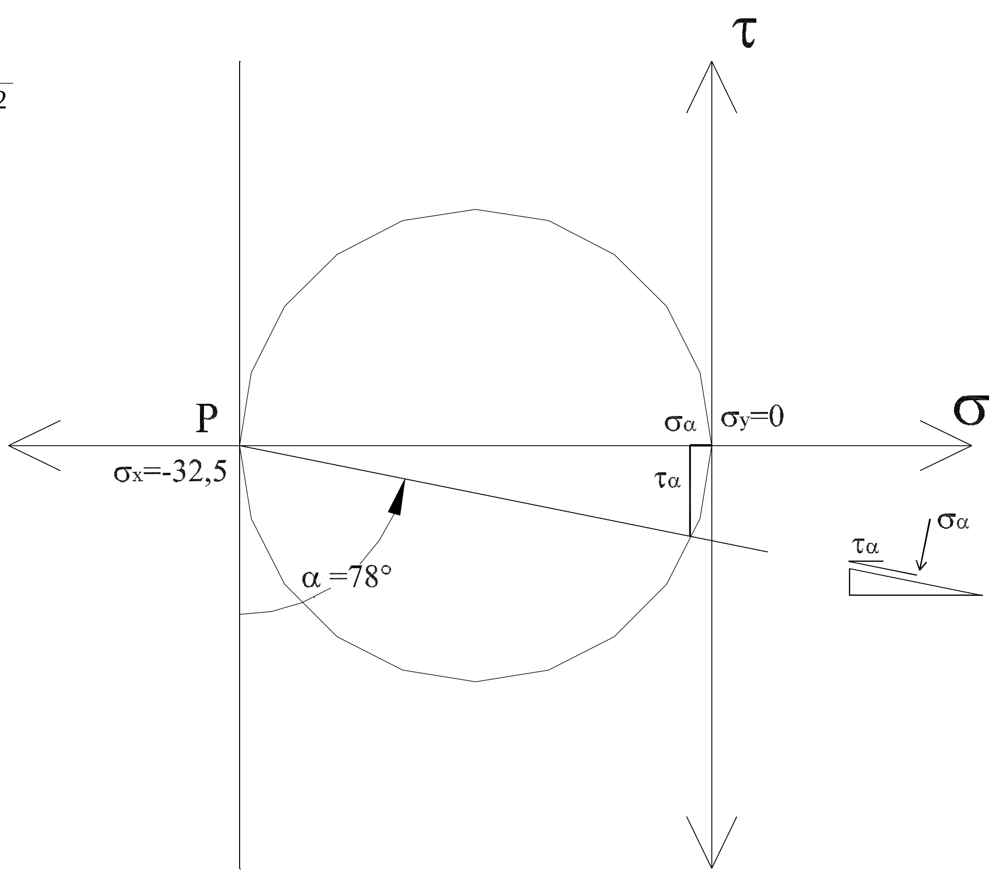
$$\tau_\alpha = \frac{-32{,}5}{2}\text{kg/cm}^2\ \text{sen}\left(2\times 78^o\ 41'\,24''\right)\rightarrow \boxed{\tau_\alpha = -6{,}25\,\text{kg/cm}^2}$$

$\boxed{\sigma_\alpha = 20\,\%\,\tau_\alpha}$

Gráficamente:

$$\text{Esc } \sigma, \tau = \frac{1\,\text{cm}}{5{,}2\,\text{kg}/\text{cm}^2}$$

$$\tau_\alpha = -6{,}25\,\text{kg}/\text{cm}^2$$
$$\sigma_\alpha = -1{,}5\,\text{kg}/\text{cm}^2$$



T.P.N^0 3.4:

Un prisma de hormigón es comprimido según el eje z por una carga P. En las caras paralelas al plano xz existen planchas rígidas unidas por 4 bulones de acero. Se pide: a) La tensión en los bulones; b) Las deformaciones Δx, Δy, Δz.

Datos:

$P = 10\ \text{tn}$

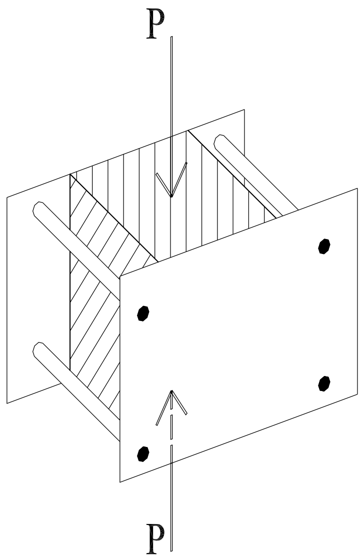
$a = 10\ \text{cm}$

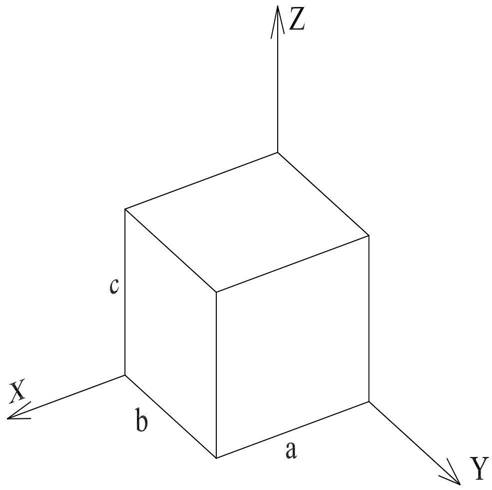
$b = c = 15\ \text{cm}$

$\phi_b = 16\ \text{mm};\ \mu_h = 0{,}10$

$E_{H^o} = 210\ \text{tn}/\text{cm}^2$

$E_{AC} = 2100\ \text{tn}/\text{cm}^2$





La compresión en la dirección Z tiende a expandir el cubo en las direcciones x e y. En la dirección x expande libremente, en la dirección y para deformarse, el cubo debe estirar a los bulones, lo que genera en éstos esfuerzos de tracción.

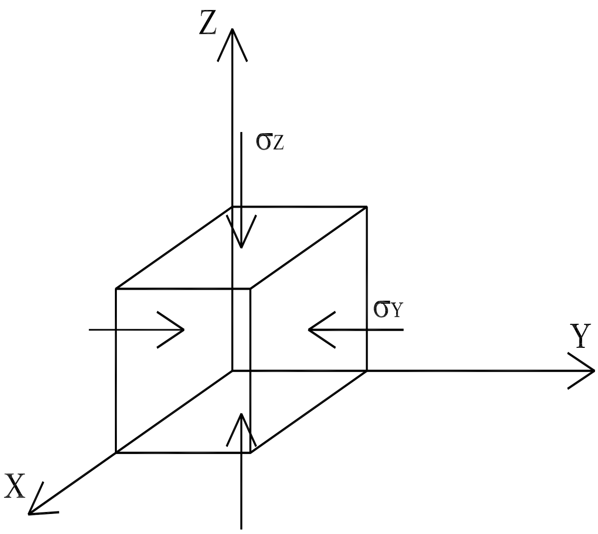
Estado de tensiones en el cubo:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_h} - \frac{\mu}{E_h}\left(\sigma_y + \sigma_z\right) = -\frac{\mu}{E_h}\left(\sigma_y + \sigma_z\right)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E_h} - \frac{\mu}{E_h}\sigma_z$$

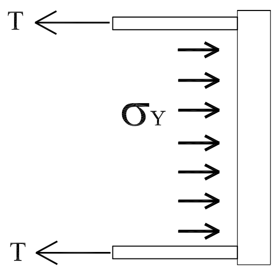
$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E_h} - \frac{\mu}{E_h}\sigma_y$$

$$\sigma_z = -\frac{P}{a \times b} = -\frac{10000}{150} = -66{,}7\ \text{kg}/\text{cm}^2$$



Las planchuelas en la dirección “y” están sometidas a la presión de contacto σ_y y al esfuerzo T. de los bulones.

$$p/\sum F_y = 0 \rightarrow 4T = -\sigma_y\ \text{a.c.}\begin{cases}\text{El signo (-) es necesario}\\ \text{porque la tensión } \sigma_y\\ \text{es negativo.}\end{cases}$$



$$T = \sigma_{ac} \times \Omega_b = \sigma_{ac} \times 2\ \text{cm}^2$$

$$4\left(\sigma_{ac} \times 2\right) = -\sigma_y \times 10 \times 15 \rightarrow \sigma_{ac} = -18{,}75\ \sigma_y$$

***Por condición de deformación:**

$$\varepsilon_{ac} = \varepsilon_{y_h} \rightarrow \frac{\sigma_{ac}}{E_{ac}} = \frac{\sigma_y}{E_h} - \frac{\mu}{E_h} \times \sigma_z$$

$$-\frac{18{,}75}{E_{ac}} \times \sigma_y = \frac{\sigma_y}{E_h} - \frac{\mu}{E_h} \times \sigma_z \rightarrow \frac{-18{,}75}{10} \sigma_y = \sigma_y - \mu \times \sigma_z$$

$$\sigma_y \times (1 + 1{,}875) = 0{,}10\left(-66{,}7\,\mathrm{kg/cm^2}\right) \Rightarrow \sigma_y = -2{,}32\,\mathrm{kg/cm^2}$$

$$\sigma_{ac} = -18{,}75 \times \left(-2{,}32\,\mathrm{kg/cm^2}\right)$$

$$\boxed{\sigma_{ac} = +\,43{,}5\,\mathrm{kg/cm^2}} \rightarrow T = 87\ \mathrm{Kg}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{ac} = \frac{43{,}5}{2100 \times 10^3} = +2{,}07 \times 10^{-5}$$

$$\varepsilon_x = \frac{-0{,}10}{210 \times 10^3}(-2{,}32 - 66{,}7) = +3{,}28 \times 10^{-5}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{210 \times 10^3}\left[-66{,}7 - 0{,}10(-2{,}32)\right] = -31{,}65 \times 10^{-5}$$

$$\Delta x = \varepsilon_x \times a = +3{,}28 \times 10^{-5} \times 10 \Rightarrow \boxed{\Delta x = +3{,}280 \times 10^{-4}\ \mathrm{cm}}$$

$$\Delta y = \varepsilon_y \times b = +2{,}07 \times 10^{-5} \times 15 \Rightarrow \boxed{\Delta y = +3{,}105 \times 10^{-4}\ \mathrm{cm}}$$

$$\Delta z = \varepsilon_z \times c = -31{,}65 \times 10^{-5} \times 15 \Rightarrow \boxed{\Delta z = -47{,}475 \times 10^{-4}\ \mathrm{cm}}$$

$$\Delta v = \varepsilon_v \times v_i = \left(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\right)(a \times b \times c) = -26{,}3 \times 10^{-5} \times 2250 = -0{,}59175\ \mathrm{cm}^3$$

<u>Verificación aplicando Energía de Deformación:</u>

$$T_e = \frac{P \times \Delta z}{2} = \frac{10000}{2} \times 47{,}475 \times 10^{-4} = 23{,}7375\ \mathrm{Kgcm}$$

$$U = U_h + U_{AC}$$

$$U_h = \left[\frac{\sigma_y \times \varepsilon_y}{2} + \frac{\sigma_z \times \varepsilon_z}{2}\right] \times v_{ih}$$

$$U_h = \left[\frac{(-2{,}32) \times 2{,}07 \times 10^{-5}}{2} + \frac{(-66{,}667)\left(-31{,}65 \times 10^{-5}\right)}{2}\right] \times 2250 = 23{,}6835\ \mathrm{Kgcm}$$

$$U_{ac} = 4 \times \left(\frac{T \times \Delta l_b}{2}\right) = 4 \times \frac{T^2 \times l_b}{2\,E_{ac} \times \Omega_b}$$

$$U_{ac} = \frac{4 \times 87^2 \times 15}{2 \times 2100 \times 10^3 \times 2} = 0{,}05406\ \mathrm{Kgcm}$$

$$U = 23{,}7375\ \mathrm{Kgcm}$$

Se verifica : $T_e = U$