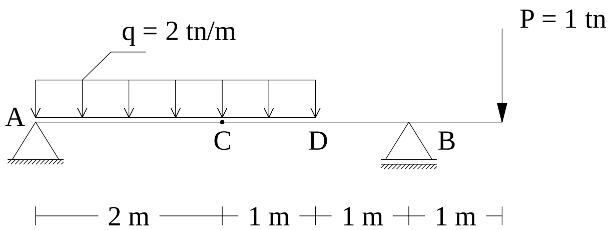
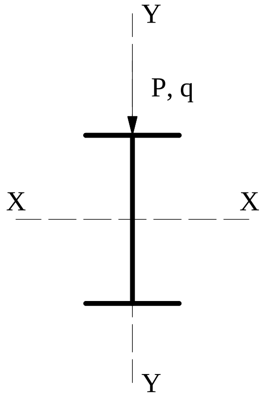
PRACTICO 8.1: **Ecuación de la línea elástica**

Para la viga de la figura se pide:

a) Dimensionarla con 1 PNI de forma tal que $\sigma_{max} \leq \sigma_{adm} = 1{,}4$ t/cm².

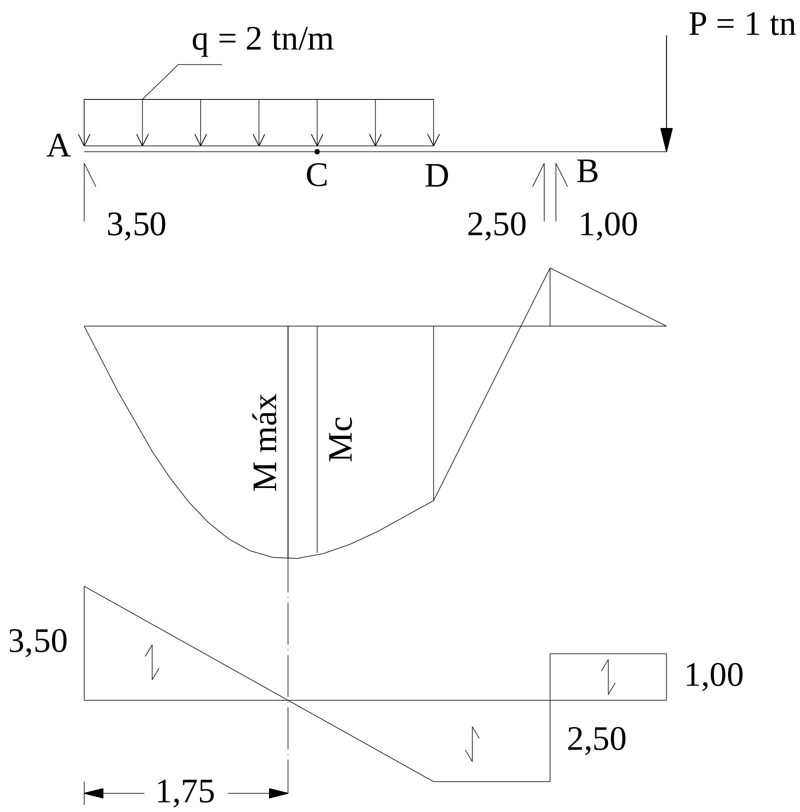
b) Aplicando la expresión Y”= -M /(E × I) determinar el descenso y la rotación en “C”





Rdos:
a) PN I Nº 200
b) $\varphi_C = -6{,}95^{\rho} \times 10^{-4}$
$\delta c = 1{,}05$ cm

1- Solicitaciones M-Q-N



Mmax= 3,0625 tm
M_C=3,0 tm
M_D= 1,5 tm
M_B=1,0 tm

Cálculo de las reacciones

$$\sum M_A = 0 \rightarrow R_B \times 4 - q \times 3 \times 1{,}5 - P \times 5 = 0 \rightarrow \boldsymbol{R_B} = \boldsymbol{3{,}5tn}$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow R_A \times 4 + P \times 1 - q \times 3 \times 2{,}5 = 0 \rightarrow \boldsymbol{R_A} = \boldsymbol{3{,}5\ tn}$$

Cálculo de los momentos flectores y del momento flector máximo

$$Z = \frac{Q_A}{q} = \frac{3{,}5\,tn}{2\,tn/m} = 1{,}75\,m \Rightarrow M_{\max} = R_A \times z - q \times \frac{z^2}{2} = 3{,}0625\,t.m$$

$$M_C = R_A \times 2m - 2\left(t/m^2\right) \times \frac{(2m)^2}{2} = 3{,}0\,t.m$$

$$M_D = R_A \times 3m - 2\left(t/m^2\right) \times \frac{(3m)^2}{2} = 1{,}5\,t.m$$

$$M_B = -P \times 1m = -1t \times 1m = -1{,}0t.m$$

2- Dimensionamiento (Flexión simple recta)

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \le \sigma_{adm} \Rightarrow W_{nec} \ge \frac{M_{\max}}{\sigma_{adm}} = \frac{306\,t.cm}{1{,}4\,t/cm^2} = 219\,cm^3$$

De tabla de Perfiles, se adopta 1PNI N° 20 $\begin{cases} W_x = 214\,cm^3 \\ I_x = 2140\,cm^4 \end{cases}$

3 – Cálculo de las deformaciones

Para la determinación de las deformaciones, se parte de la ecuación dela línea elástica

$$\boxed{y'' = \frac{M(z)}{E \times I}}$$

donde M(z) representa la función del momento flector y el producto E.I la rigidez de la viga.

Para conocer la elástica en el tramo AB, debemos analizar dos tramos AD y DB, pues la función del momento flector M(z) cambia a partir del punto D.

Partiendo de la derivada segunda de la función y'' e integrando sucesivamente, se obtienen las rotaciones y los descensos. En las sucesivas integraciones aparecen constante de integración que deben ser determinadas.

$$y' = \int \frac{M(Z)}{EI}.dz + C_1 \Rightarrow rotaciones$$

$$y = \iint \frac{M(Z)}{EI}.dz + C_2 \Rightarrow descensos$$

Tramo AD $\quad 0 \le z \le 3\,m$

$$M(z) = R_A \times z - q \times \frac{z^2}{2}$$

$$E \times I \times y'' = -\left(R_A \times z - q \times \frac{z^2}{2} \right)$$

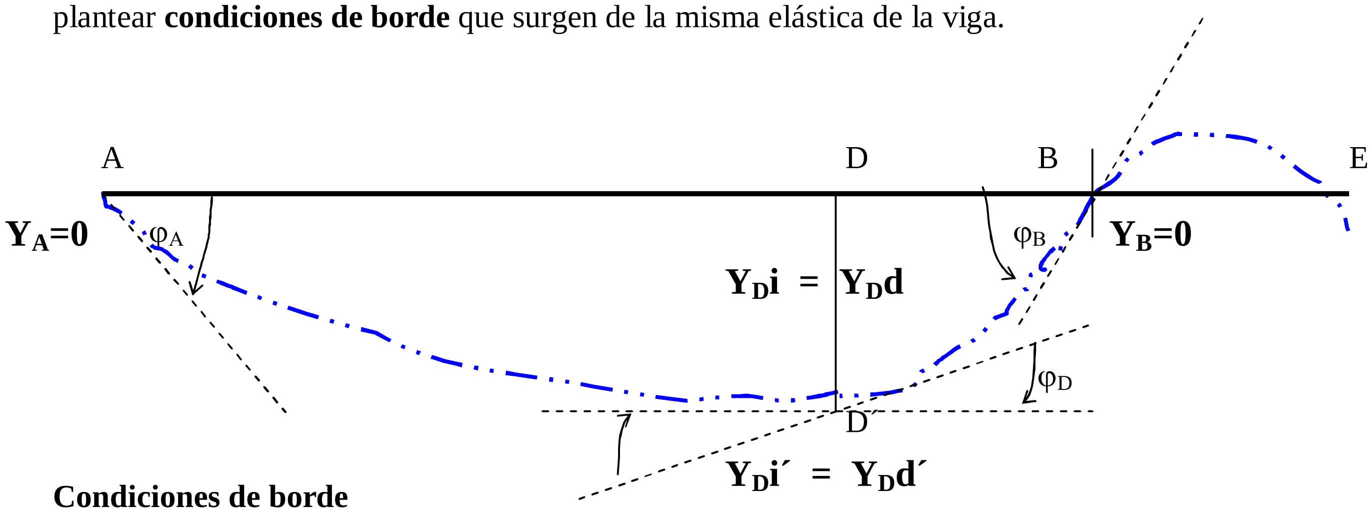
$$E \times I \times y_1' = -R_A \times \frac{z^2}{2} + q \times \frac{z^3}{6} + C_1 = -1{,}75(t) \times z^2 + 0{,}333(t/m) \times z^3 + C_1 \quad (1)$$

$$E \times I \times y_1 = -R_A \times \frac{z^3}{6} + q \times \frac{z^4}{24} + C_1 \times z + C_2 = -0{,}583(t) \times z^3 + 0{,}083(t/m) \times z^4 + C_1 \times z + C_2 \quad (2)$$

Tramo DB $\quad 3\,\text{m} \le z \le 4\,\text{m}$

$$M = R_A \times z - (q \times 3\,m)(z - 1{,}5\,m)$$
$$E \times I \times y_2'' = -R \times z + 3 \times q \times z\,(m) - 4{,}5 \times q\,(m^2)$$
$$E \times I \times y_2' = -R_A \times \frac{z^2}{2} + \frac{3}{2} \times q \times z^2 (m) - 4{,}5 \times q \times z\,(m^2) + C_3$$
$$= -1{,}75\,(t) \times z^2 + 3\,(t) \times z^2 - 9\,(tm) \times z + C_3 \quad (3)$$
$$E \times I \times y_2 = \frac{-R_A \times z^3}{6} + \frac{3}{6} \times q \times z^3 (m) - \frac{4{,}5}{2} \times q \times z^2 (m^2) + C_3 \times z + C_4$$
$$= -0{,}583\,(t) \times z^3 + z^3 (t) - 4{,}5 \times z^2 (tm) + C_3 \times z + C_4 \quad (4)$$

Para definir los valores delas constantes de integración $C_1 - C_2 - C_3 - C_4$ será necesario plantear **condiciones de borde** que surgen de la misma elástica de la viga.



Condiciones de borde

$$\textbf{\textit{Para}} \rightarrow z = 0 \Rightarrow y_A = 0 \Rightarrow y_1 = 0$$
reemplazando $z = 0$ en (2) resulta $\Rightarrow C_2 = 0 \quad (5)$

$$\textbf{\textit{Para}} \rightarrow z = 4m \Rightarrow y_B = 0 \Rightarrow y_2 = 0$$
reemplazando $z = 4m$ en $(4) \Rightarrow C_3 \times 4 + C_4 = 45{,}312 \Rightarrow C_3 = 11{,}328 - \frac{C_4}{4} \quad (6)$

$$\textbf{\textit{Para}} \rightarrow z = 3m \Rightarrow y_D' i = y_D' d \Rightarrow y_1' = y_2'$$
reemplazando $z = 3m$ en $(1) = (3) \Rightarrow -6{,}75 + C_1 = -15{,}75 + C_3 \Rightarrow C_3 = 9{,}00 + C_1 \quad (7)$

$$\textbf{\textit{Para}} \rightarrow z = 3m \Rightarrow y_D i = y_D d \Rightarrow y_1 = y_2$$
reemplazando $z = 3m$ en $(2) = (4) \Rightarrow -9{,}00 + C_1 \times 3 = -29{,}24 + C_3 \times 3 + C_4 \Rightarrow C_3 = 6{,}75 + C_1 - \frac{C_4}{3} \quad (8)$

igualando $(7) = (8) \Rightarrow 9{,}00 + C_1 = 6{,}75 + C_1 - \frac{C_4}{3} \Rightarrow C_4 = -6{,}75 tm^3 \quad (9)$

reemplazando (9) en $(6) \Rightarrow C_3 = 13{,}021 tm^2 \quad (10)$

reemplazando (10) en $(7) \Rightarrow C_1 = 4{,}021 tm^2 \quad (11)$

Como puede observarse, las constantes de integración son 4 incógnitas y son necesarias 4 ecuaciones para poder determinar sus valores (sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas).

Luego, **las ecuaciones de las deformaciones** resultan:

Tramo AD $\quad 0 \le z \le 3\,m$

$$E \times I \times y_1' = -1{,}75(t) \times z^2 + 0{,}333(t/m) \times z^3 + 4{,}201 tm^2 \qquad (1')$$

$$E \times I \times y_1 = -0{,}583(t) \times z^3 + 0{,}083(t/m) \times z^4 + 4{,}201 tm^2 \times z \qquad (2')$$

Tramo DB $\quad 3\,m \le z \le 4\,m$

$$E \times I \times y_2' = -1{,}75\,(t) \times z^2 + 3\,(t) \times z^2 - 9\,(tm) \times z + 13{,}021 tm^2 \qquad (3')$$

$$E \times I \times y_2 = -0{,}583\,(t) \times z^3 + z^3(t) - 4{,}5 \times z^2(tm) + 13{,}021 tm^2 \times z + (-6{,}75 tm^3) \qquad (4')$$

Cálculos de las deformaciones:

a) **Rotación en C** $\Rightarrow$ reemplazando z=2m en (1´)

$$\varphi_C = y'_{1(z=2,00)} = \frac{1}{E \times I}\left[-1{,}75 \times 2^2(tm^2) + 0{,}333 \times 2^3(tm^2) + 4{,}021 tm^2\right] = -\frac{0{,}3125}{E \times I}(tm^2)$$

$$\Rightarrow \varphi_C = \frac{-0{,}3125(tm^2) \times 10^4 (cm^2/m^2)}{2100\,t/cm^2 \times 2140\,cm^4} = -6{,}95^{\rho} \times 10^{-4}$$

b) **Rotación en A** $\Rightarrow$ reemplazando z=0 en (1´)

$$\varphi_A = y'_{1(z=0)} = \frac{1}{E \times I}\left[-1{,}75 \times 0^2(tm^2) + 0{,}333 \times 0^3(tm^2) + 4{,}201 tm^2\right] = \frac{4{,}201}{E \times I}(tm^2)$$

$$\Rightarrow \varphi_A = \frac{4{,}201(tm^2) \times 10^4 (cm^2/m^2)}{2100\,t/cm^2 \times 2140\,cm^4} = 8{,}95^{\rho} \times 10^{-3}$$

c) **Descenso en C** $\Rightarrow$ reemplazando z=2m en (2´)

$$\delta_C = y_{1(z=2,0m)} = \frac{1}{E \times I}\left[\left(-0{,}583 \times 2^3(tm^3) + 0{,}083 \times 2^4(tm^3) + 4{,}021 \times 2(tm^3)\right)\right] = \frac{4{,}7083}{E \times I}(tm^3)$$

$$\Rightarrow \delta_C = \frac{4{,}7083\,tm^3 \times 10^6\, cm^3/m^3}{2100\, tn/cm^2 \times 2140\,cm^4} = 1{,}05\,cm$$

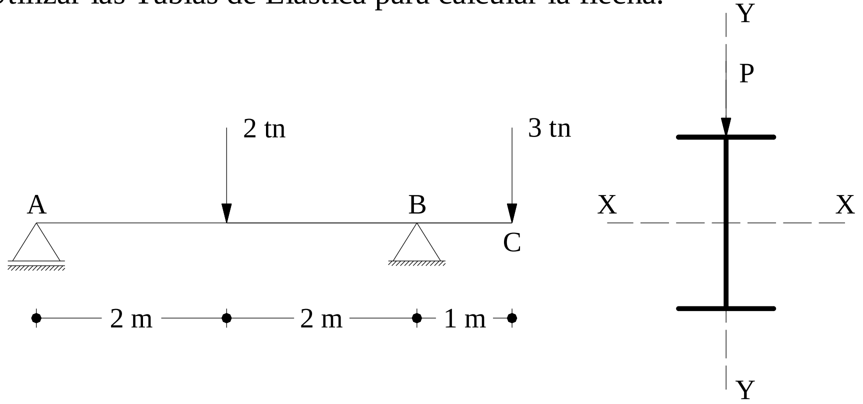
<u>PRACTICO 8.2</u>: Uso de Tablas de elástica

Para la viga de la figura se pide dimensionarla con un PNI, de manera de satisfacer las siguientes condiciones:

a) $\sigma_{máx} \leq \sigma_{adm} = 1{,}4\ t/cm^2$.

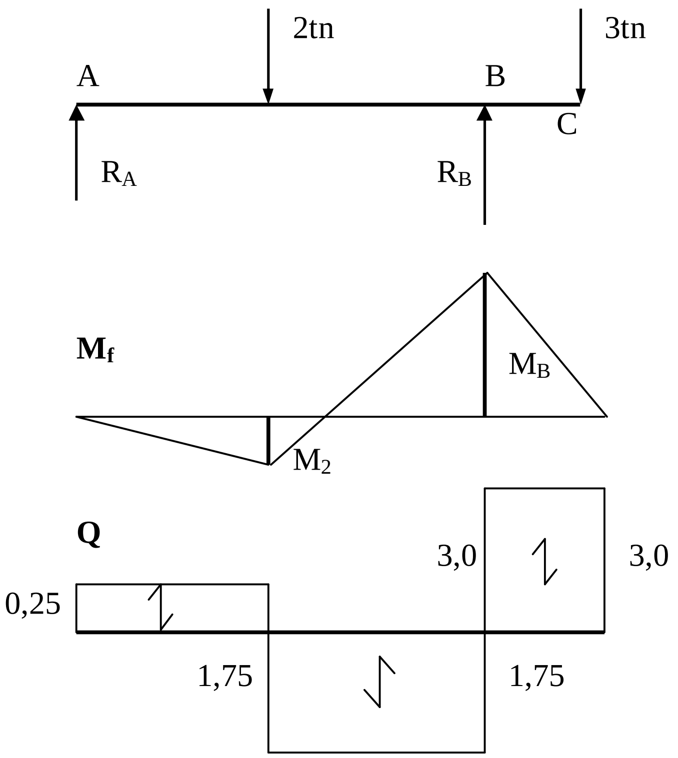
b) $\delta c \leq 1{,}00$ cm

Utilizar las Tablas de Elástica para calcular la flecha.



Rdos:
1 PN I Nº 200

1- <u>Solicitaciones M-Q-N</u>



M_2=0,50 tm
M_B=3,0 tm

Cálculo de las reacciones

$$\sum M_A = 0 \rightarrow 2\times 2 + 3\times 5 - R_B \times 4 = 0 \Rightarrow \underline{R_B = 4{,}75 tn}$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow 2\times 2 - 3\times 1 - V_A \times 4 = 0 \Rightarrow \underline{V_A = 0{,}25 tn}$$

$$\sum F_H = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

Cálculo de los momentos máximos del tramo

$$M_B = -3t.m \times 1m = -3{,}0\, t.m$$

$$M_D = 0{,}25t.m \times 2m = 3{,}50\, t.m$$

2- Dimensionamiento por condición de resistencia (Flexión simple recta)

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{adm}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq \sigma_{adm} \Rightarrow W_{nec} \geq \frac{M_{\max}}{\sigma_{adm}} = \frac{300\, t.cm}{1{,}4\, t/cm^2} = 214{,}29\, cm^3$$

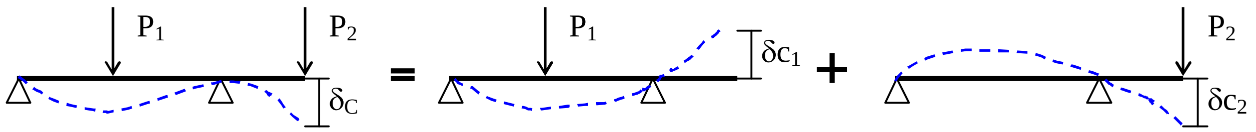
De tabla de Perfiles, se adopta 1PNI N° 20 $\begin{cases} W_x = 214\, cm^3 \\ I_x = 2140\, cm^4 \end{cases}$

3 – Cálculo de las deformaciones

Para la determinación de las deformaciones usando las tablas de elástica, se aplica el principio de superposición de efectos, por el cual se puede separar el estado de carga de la estructura original, en estados de cargas cuya solución exista en tablas, de modo tal que los desplazamientos (descensos y rotaciones) de la estructura original puedan calcularse como la suma de los desplazamientos de los estados de carga por separados.

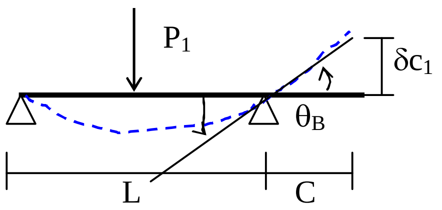
El descenso del punto C resulta:

$$\boxed{\delta_C = \delta_{C1} + \delta_{C2}}$$



De Tabla de elástica

a) Estado 1: Deformación en C debida a P1

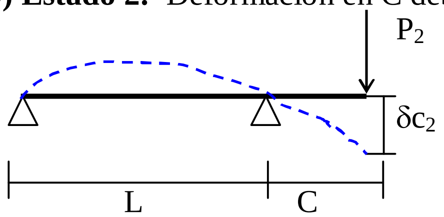


$$\delta_{C1} = \varphi_B \times 100\, (cm)$$

$$\varphi_B = \frac{P_1 \times L^2}{16.E.I}$$

$$\delta_{C1} = \frac{2\text{ t} \times (400cm)^2 \times 100\text{ (cm)}}{16 \times 2100\text{ tn/cm}^2 \times I} = \frac{952{,}38(cm^5)}{I}$$

b) Estado 2: Deformación en C debida a P2



$$\delta_{C2} = \frac{P_2}{E.I} \times \frac{(L+C) \times C^2}{3}$$

$$\delta_{C2} = \frac{3\,t \times (400cm + 100cm) \times (100cm)^2}{2100\text{ tn/cm}^2 \times I \times 3} = \frac{2380{,}96}{I}(cm^5)$$

c) Deformación Total

$$\delta_C = \delta_{C_1} + \delta_{C_2} = \frac{-952{,}38}{I} + \frac{2380{,}96}{I} = \frac{1428{,}58}{I}$$

4- Dimensionamiento por condición de deformación

$$\delta_C \leq \delta_{adm}$$

$$\delta_C = \frac{-952{,}38}{I} + \frac{2380{,}96}{I} \leq \delta_{adm}$$

$$\Rightarrow I \geq \frac{(-952{,}38 + 2380{,}96)\,cm^5}{1\,cm} = 1428{,}58\,cm^4$$

De tabla de Perfiles, corresponde a 1PNI N° 18 $\begin{cases} W_x = ...cm^3 \\ I_x = 1450\,cm^4 \end{cases}$

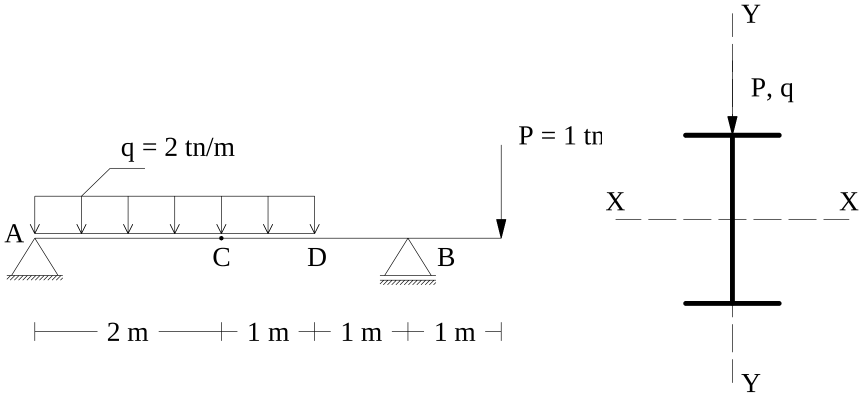
5- Sección adoptada

Se adopta 1PNI N° 20 , con $\begin{cases} W_x = 214\,cm^3 \\ I_x = 2140\,cm^4 \end{cases}$

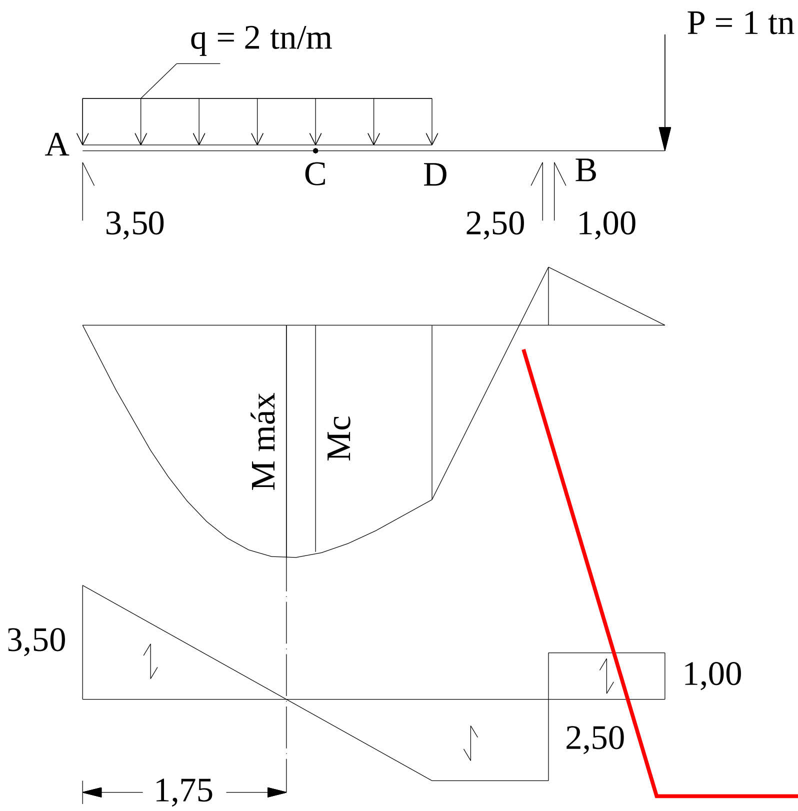
Que satisface simultáneamente ambas condiciones

PRACTICO 8.3
Dada la viga dimensionada en el PRACTICO 8.1, calcular el valor del descenso y la rotación en el punto "C" aplicando el ***Método de Mohr (método de la Viga Conjugada).***

Rdos:
a) φ_C = -6,9 x 10^{-4}
b) δc = 1,05 cm



1- Solicitaciones M-Q-N



Reacciones
R_A=3,5tn
R_B=3,5tn

Solicitaciones
Mmax= 3,0625 tm
M_C=3,0 tm
Mc=1,5 tm
M_B=1,0 tm

Dimensionamiento

De tabla adopto $\begin{cases} \text{P.N.I : N° 200} \\ W_x = 214\ cm^3 \\ I_x = 2140\ cm^4 \end{cases}$

Calculo de z para Mz=0
$$M(z) = Q_D \times z - M_D = 0$$
$$\Rightarrow z = \frac{M_D}{Q_D} = \frac{1{,}5t.m}{2{,}5t} = 0{,}6m$$
con z medido desde D.

De otra forma:
P z – R_B (z-1) = 0
(P – R_B)z =– R_B
Z = -3,5/2,5= 1,4 (medido desde el extremo en que está aplicado P)

2 – Cálculo de las deformaciones

Para la determinación de las deformaciones utilizando el ***"Método de la viga conjugada o Método de Mohr"***, se parte de la analogía entre la ecuación (1) (relación entre la elástico y el momento flector reducido M/EI) y la ecuación (2) (relación entre el momento flector y la carga aplicada). Como puede observarse ambas funciones (*"y":descensos y "M":momento flector*) son continuas y derivables, y sus derivadas resultan semejantes.

$$\boxed{\frac{d^2y}{dz^2} = -\frac{M}{E \times I}} \quad (1) \qquad \boxed{\frac{d^2M}{dz^2} = -q} \quad (2)$$

Entonces, se puede considerar una viga ficticia (o conjugada) cargada con un carga ficticia $q^* = \frac{M}{E \times I}$ ***(que es igual al diagrama de momento reducidos M/EI), tal que los momentos flectores de la viga ficticia*** M^* ***resultan ser los descensos de la viga real*** $"y"$.

$$\boxed{q^* = \frac{M}{E \times I} \Rightarrow \frac{d^2M}{dz^2} = \frac{d^2y}{dz^2} \Rightarrow M^* = y}$$

Esto se conoce como el "Teorema de Morh sobre la línea elástica".

Derivando la ecuación anterior:

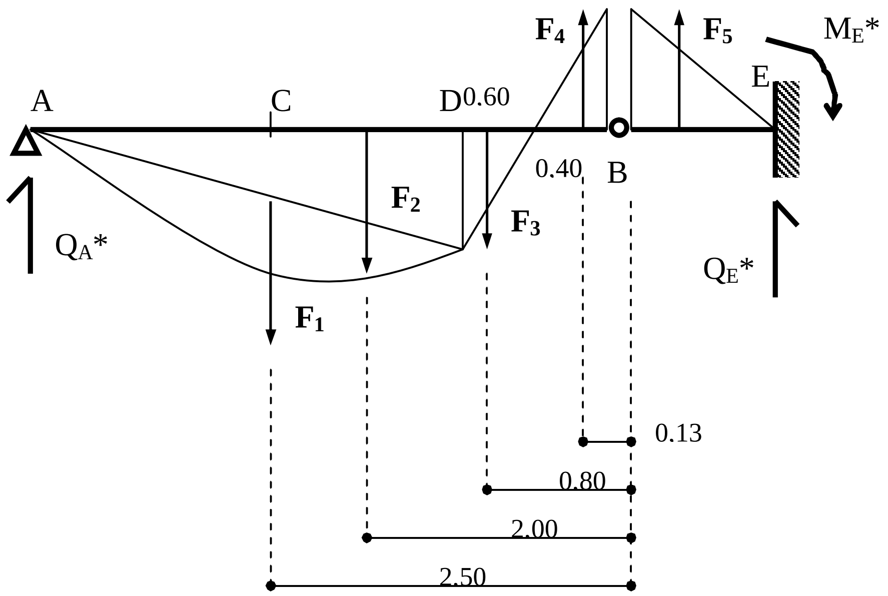
$$\boxed{y' = \frac{dM^*}{dz} = Q^* = tg\varphi = \varphi}$$

resulta que el esfuerzo de corte de la viga conjugada Q^****, representa el valor de la tangente a la línea elástica de la viga real en una sección*** $"tg\varphi"$***, que representa las rotaciones de la sección de la viga real*** $"\varphi"$.

Aplicación práctica:

- Se determina una viga ficticia (recordar las condiciones de apoyo) y se la carga con la carga ficticia $q^*=M/EI$.
- Se divide la carga ficticia en figuras geométricas conocidas.
- Se calcula la fuerza concentrada Fi, como el área del diagrama de momentos reducidos.
- Se aplica la fuerza Fi que reemplaza a la carga ficticia q*, en el baricentro de cada figura.
- Se determinan las reacciones de la viga ficticia (R_A^* y R_B^*) que representan las rotaciones en los extremos de la viga real (φ_A *y* φ_B).
- Se determinan los Momentos Flectores de la viga ficticia (M^*) que representan los descensos de la viga real (y) en cada sección.
- Se determina el esfuerzo de corte de la viga ficticia (Q^*) que representa las rotaciones de la viga real (φ) en cada sección.

En la viga ficticia:



a) Calculo de las fuerzas concentradas Fi

$$F_1 = \frac{2}{3} \times \left(\frac{2t/m \times (3m)^2}{8} \right) \times \frac{3m}{E \cdot I} = \frac{4{,}5\,tm^2}{E \cdot I}$$

$$F_2 = \frac{1{,}5tm \times 3m}{2 \cdot E \cdot I} = \frac{2{,}25\,tm^2}{E \cdot I}$$

$$F_3 = \frac{1{,}5tm \times 0{,}6m}{2 \cdot E \cdot I} = \frac{0{,}45\,tm^2}{E \cdot I}$$

$$F_4 = \frac{1{,}0tm \times 0{,}4m}{2 \cdot E \cdot I} = \frac{0{,}20\,tm^2}{E \cdot I}$$

b) Calculo de la rotación en A (φ_A).

Para conocer la rotación en la viga real (φ_A), se debe calcular la reacción de la viga ficticia en A (R_A^*).

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow R_A^* \times 4m - F_1 \times 2{,}5m - F_2 \times 2m - F_3 \times 0{,}8m + F_4 \times 0{,}13m = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow R_A^* = \frac{4{,}021tm^2}{E \cdot I} = \varphi_A$$

c) Calculo del descenso (δ_C) y rotación (φ_C) en C

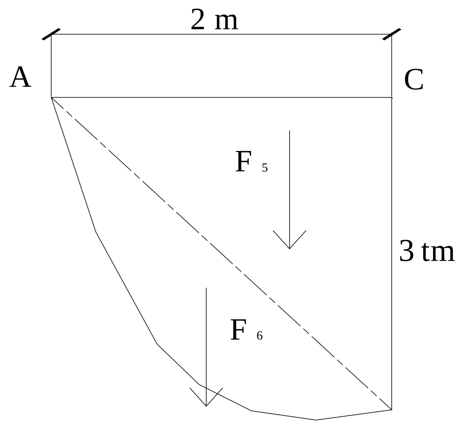
Para conocer la rotación en C de la viga real (φ_C), se debe calcular el esfuerzo de corte en C de la viga ficticia (Q_C^*).

Para conocer el descenso en C de la viga real (δ_C), se debe calcular el momento flector en C de la viga ficticia (M_C^*).

c.1) Planteamos el esfuerzo de corte en C, de la viga ficticia:

$$Q_C^* = R_A^* - \int_A^C q^* \times dz$$

donde $\int_A^C q^* \times dz$ = área del diagrama de momento reducido entre A y C y $q^* = \dfrac{M}{E.I}$



$$F_5 = \frac{3t.m \times 2m}{2.E.I} = \frac{3{,}0tm^2}{EI}$$

$$F_6 = \frac{2}{3} \times \left(\frac{2t/m \times (2m)^2}{8} \right) \times \frac{2m}{E.I} = \frac{1{,}33tm^2}{EI}$$

Luego:

$$Q_C^* = 4{,}021 \frac{tm^2}{E.I} - 3 \frac{tm^2}{E.I} - 1{,}\overset{\frown}{33} \frac{tm^2}{E.I} = -0{,}3125 \frac{tm^2}{E.I} = \varphi_C$$

$$\varphi_C = \frac{0{,}3125\, tm^2 \times \left(10^4 \ {cm^2}/{m^2}\right)}{2100 \text{ tn/cm}^2 \times 2140\, cm^4} = -6{,}95^{\rho} \times 10^{-4} = 0{,}000695^{\rho} \Rightarrow \varphi\,(-)$$

c.2) Planteamos el momento flector en C, de la viga ficticia:

$$M_C^* = R_A^* \times 2m - \int_A^C q^* \cdot z \cdot dz$$

donde $\int_A^C q^* \cdot z \cdot dz$ = momento estático del diagrama de momento reducido entre A y C

$$M_C^* = R_A^* \times 2 - F_6 \times 1m - F_5 \times \frac{2m}{3}$$

$$M_C^* = 4{,}021tm^2 \times 2m - 1{,}\overset{\frown}{33}tm^2 \times 1m - 3tm^2 \times \frac{2m}{3} = 4{,}7083 \frac{tm^3}{E.I} = y_C$$

$$y_C = \frac{4{,}7083tm^3 \times \left(10^6 \ {cm^3}/{m^3}\right)}{2100 \text{ tn/cm}^2 \times 2140\, cm^4} = 1{,}05\, cm$$

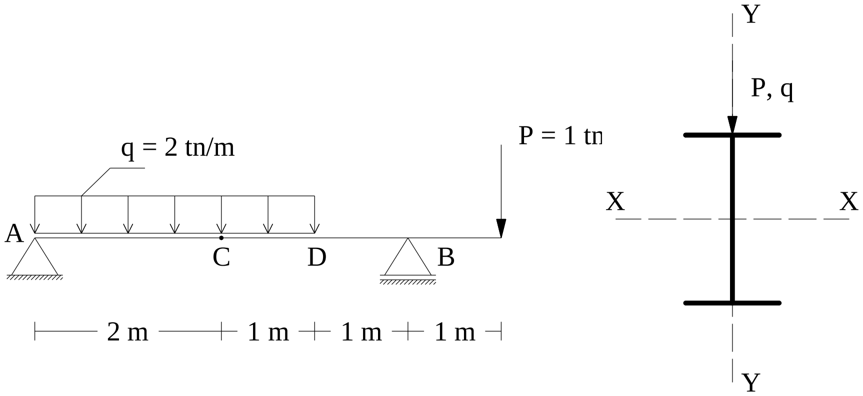
Puede observarse que los valores obtenidos concuerdan con los del Practico 8.1.

$$\boxed{\varphi_C = -0{,}3125 \frac{tm^2}{E.I} = -6{,}95^{\rho} \times 10^{-4}}$$

$$\boxed{y_C = 4{,}7083 \frac{tm^3}{E.I} = 1{,}05\, cm}$$

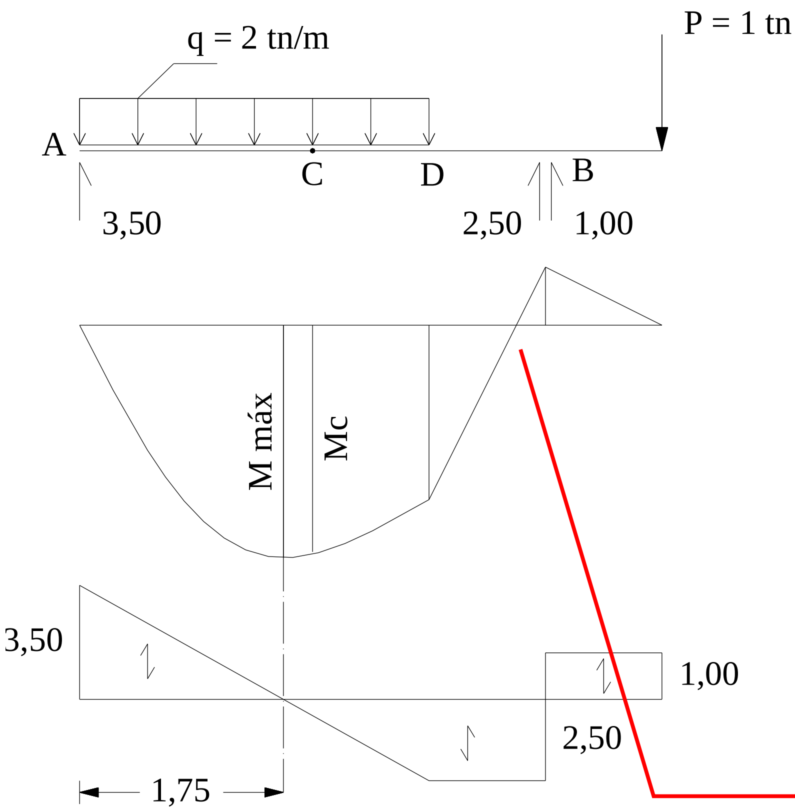
PRACTICO 8.4

Dada la viga dimensionada en el PRACTICO 8.1, calcular el valor del descenso y la rotación en el punto "C" aplicando el ***Método del Diagrama de Momentos Reducidos***.



Rdos:
c) φ_C = -6,9 x 10^{-4}
d) δc = 1,05 cm

1- Solicitaciones M-Q-N



Reacciones
R_A=3,5tn
R_B=3,5tn

Solicitaciones
Mmax= 3,0625 tm
M_C=3,0 tm
Mc=1,5 tm
M_B=1,0 tm

Dimensionamiento

De tabla adopto $\begin{cases} \text{P.N.I : N° 200} \\ W_x = 214\ cm^3 \\ I_x = 2140\ cm^4 \end{cases}$

Calculo de z para Mz=0

$$M(z) = Q_D \times z - M_D = 0$$

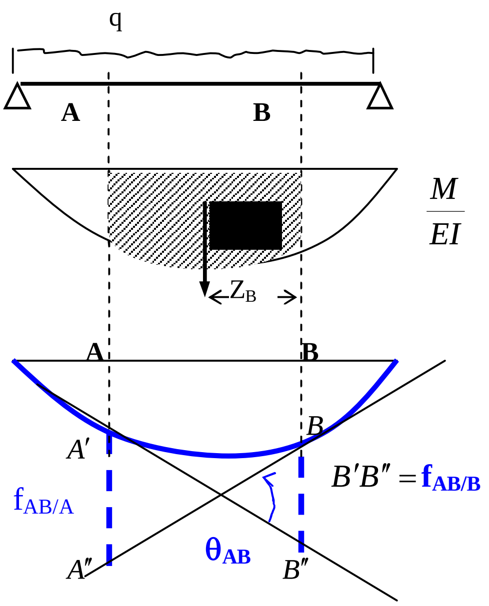
$$\Rightarrow z = \frac{M_D}{Q_D} = \frac{1{,}5t.m}{2{,}5t} = 0{,}6m$$

con z medido desde D.

2 – Cálculo de las deformaciones

Para la determinación de las deformaciones utilizando el ***"Método del Diagrama de Momentos Reducidos"***, se parte de las propiedades del diagrama de momentos reducidos M/EI o Teoremas de los momentos reducidos.

Diagrama de momentos reducidos (M/EI): se define como el diagrama de momentos flectores divido por la rigidez a la flexión de la viga (EI).



Teorema I: el ángulo comprendido **"θ"** entre las tangentes a dos puntos cualesquiera A' y B' de la línea elástica, es igual al área del diagrama de momentos reducidos entre las secciones A y B, correspondientes.

$$\theta = \int_A^B d\theta = \int_A^B \frac{M}{E.I}\,dz = A_{AB}$$

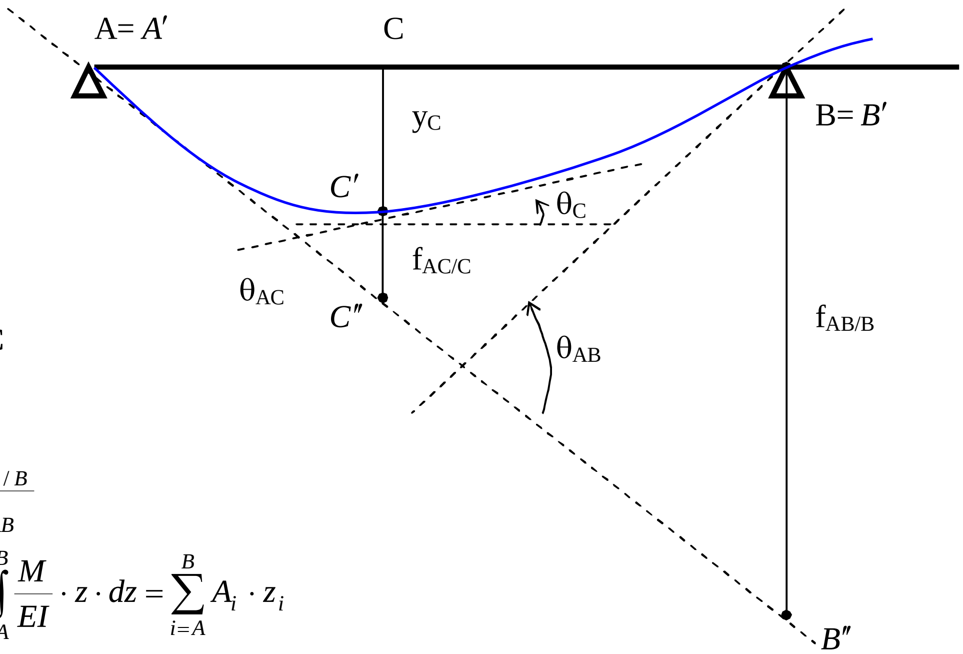
Teorema II: la ordenada comprendido **"f"** entre las tangentes a dos puntos cualesquiera A' y B' de la línea elástica, es igual al momento estático del área del diagrama de momentos reducidos entre las secciones A y B, correspondientes, con respecto a B (si la ordena se mide en B) o con respecto a A (si la ordenada se mide en A)

$$f_{AB/B} = \int_A^B z \cdot d\theta = \int_A^B \frac{M}{E.I} \cdot z \cdot dz = A_{AB} \cdot Z_B$$

Aplicación práctica:

- El método consiste en determinar el área del diagrama de momentos reducidos (*M/EI)* y aplicar los teoremas citados para determinar las rotaciones y descensos de la viga.
- Para ello se divide el diagrama de momentos reducidos (*M/EI)* en figuras geométricas conocidas y se calcula el área Ai de cada una de ellas.
- Las áreas Ai se aplican en el baricentro de cada figura geométrica.
- Aplicando los teoremas se determinan las rotaciones relativas θ_{AB} y las ordenadas relativas $f_{AB/B}$ entre dos secciones convenientemente elegidas.
- Mediante la construcción geométrica conveniente de las magnitudes relativas antes determinadas (θ_{AB} y $f_{AB/B}$), se determinan los descensos y rotaciones absolutas en la viga.

Analizamos el tramo AB



a) Rotación en C

$$\boxed{\theta_C = \theta_A - \theta_{AC}}$$

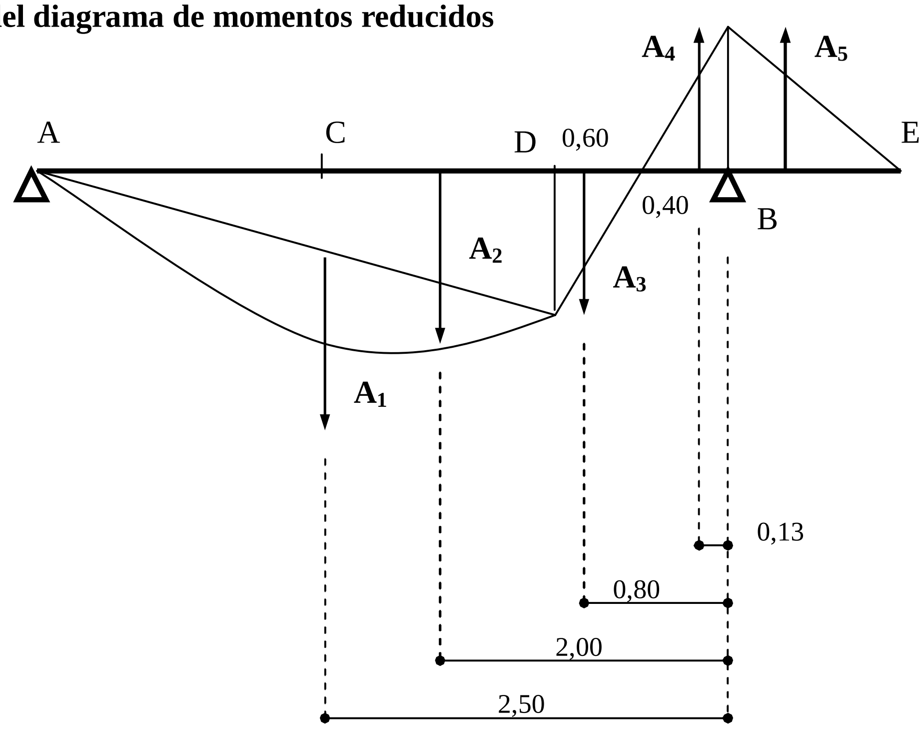
con
$$\begin{cases} \theta_A = \dfrac{f_{AB/B}}{L_{AB}} \\ f_{AB/B} = \displaystyle\int_A^B \frac{M}{EI} \cdot z \cdot dz = \sum_{i=A}^{B} A_i \cdot z_i \end{cases}$$

b) Descenso en C

$$\boxed{y_C = \overline{CC'} + \overline{C'C''}}$$

con
$$\begin{cases} \overline{CC'} = \theta_A \cdot L_{AC} \\ \overline{C'C''} = f_{AC/C} = \displaystyle\int_A^C \frac{M}{EI} \cdot z \cdot dz = \sum_{i=A}^{C} A_i \cdot z_i \end{cases}$$

Cálculo de las áreas del diagrama de momentos reducidos



Calculo de las áreas Ai

$$A_1 = \frac{2}{3} \times \left(\frac{2t/m \times (3m)^2}{8} \right) \times \frac{3m}{E \cdot I} = \frac{4{,}5\,tm^2}{E \cdot I} \qquad z_{1B} = 1m + \frac{1m}{2} = 2{,}50m$$

$$A_2 = \frac{1{,}5tm \times 3m}{2 \cdot E \cdot I} = \frac{2{,}25\,tm^2}{E \cdot I} \qquad z_{2B} = 1m + \left(\frac{1}{3} \times 3m \right) = 2m$$

$$A_3 = \frac{1{,}5tm \times 0{,}6m}{2 \cdot E \cdot I} = \frac{0{,}45\,tm^2}{E \cdot I} \qquad z_{3B} = 0{,}40m + \left(\frac{2}{3} \times 0{,}60m \right) = 0{,}80m$$

$$A_4 = \frac{1{,}0tm \times 0{,}4m}{2 \cdot E \cdot I} = \frac{0{,}20\,tm^2}{E \cdot I} \qquad z_{4B} = \left(\frac{1}{3} \times 0{,}40m \right) = 0{,}13m$$

a) Calculo de la rotación en A (θ_A)

Debemos Calcular la ordenada relativa entre A y B $(f_{AB/B})$,aplicando el Segundo Teorema

$$f_{AB/B} = \overline{BB''} = \frac{1}{E \cdot I} \left(-A_4 \times z_{4B} + A_2 \times z_{2B} + A_3 \times z_{3B} + A_1 \times z_{1B} \right) =$$

$$\Rightarrow f_{AB/B} = \frac{1}{E \cdot I} (-0{,}2 \times 0{,}13 + 2{,}25 \times 2 + 0{,}45 \times 0{,}80 + 4{,}5 \times 2{,}5) = \frac{16{,}08\overset{\frown}{3}\,tm^2}{E \cdot I}$$

Luego:

$$\Rightarrow \theta_A = \frac{f_{AB/B}}{L_{AB}} = \frac{1}{4m} \times \frac{16{,}08\overset{\frown}{3}tm^2}{E \cdot I} = \frac{4{,}021\,(tm^2)}{E \cdot I}$$

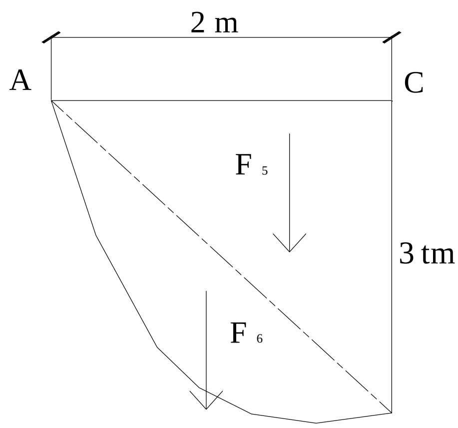
$$\Rightarrow \theta_A = \frac{4{,}021\,(tm^2)}{E \cdot I} = \frac{4{,}021tm^2 \times \left(10^4\ {}^{cm^2}\!/\!_{m^2}\right)}{2100\ {}^{t}\!/\!_{cm^2} \times 2140cm^4} = 0{,}00895^{\rho}$$

b) Calculo de la rotación en C (θ_C)

Debemos calcular la rotación relativa entre A y C (θ_{AC}), aplicando el Primer Teorema

$$F_5 = \frac{3t.m \times 2m}{2.E.I} = \frac{3{,}0tm^2}{EI}$$

$$F_6 = \frac{2}{3} \times \left(\frac{2t/m \times (2m)^2}{8} \right) \times \frac{2m}{E.I} = \frac{1{,}33tm^2}{EI}$$



Luego:

$$\theta_{AC} = F_5 + F_6 = 3\frac{tm^2}{E.I} + 1{,}\overset{\frown}{33}\frac{tm^2}{E.I} = 4{,}333\frac{tm^2}{E.I}$$

Resultando:

$$\theta_C = \theta_A - \theta_{AC} = 4{,}021\frac{tm^2}{E.I} - 4{,}333\frac{tm^2}{E.I} = -0{,}3125\frac{tm^2}{E.I}$$

$$\theta_C = \frac{0{,}3125\,tm^2 \times \left(10^4\ {}^{cm^2}\!/\!_{m^2}\right)}{2100\ \text{tn/cm}^2 \times 2140\,cm^4} = -6{,}95^{\rho} \times 10^{-4} = -0{,}000695^{\rho} \Rightarrow \varphi\,(-)$$

c) Calculo del descenso en C (δ_C)

Debemos calcular el descenso relativo entre A y C $(f_{AC/C})$, aplicando el Segundo Teorema

$$f_{AC/C} = \overline{C'C''} = \frac{1}{E \cdot I}\left(F_5 \times z_{5C} + F_6 \times z_{6C}\right)$$

$$\Rightarrow f_{AC/C} = \frac{1}{E \cdot I}(3{,}0 \times 0{,}67 + 1{,}3\widehat{3} \times 1) = \frac{3{,}33\widehat{3}\, tm^2}{E \cdot I}$$

Luego:

$$y_C = \overline{CC'} - \overline{C'C''} = \theta_A \cdot L_{AC} - f_{AC/C}$$

$$y_C = \frac{4{,}021 tm^2}{E \cdot I} \times 2m - \frac{3{,}33\widehat{3} tm^3}{E \cdot I} = 4{,}708\widehat{3}\, \frac{tm^3}{E.I}$$

$$y_C = \frac{4{,}7083 tm^3 \times \left(10^6\, {cm^3}/{m^3}\right)}{2100 \text{ tn/cm}^2 \times 2140\, cm^4} = 1{,}05\, cm$$

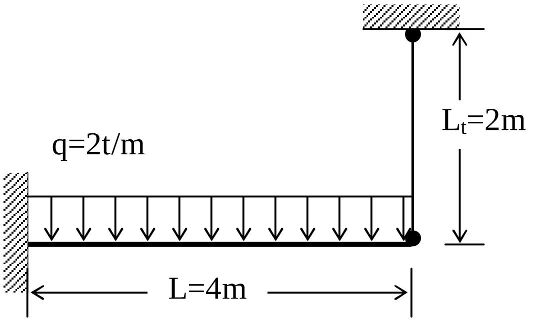
Puede observarse que los valores obtenidos concuerdan con los del Practico 8.1.

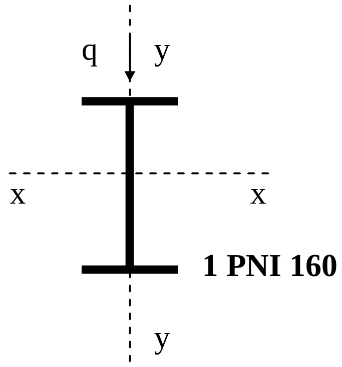
$$\boxed{\theta_C = -0{,}3125 \frac{tm^2}{E.I} = -6{,}95^{\rho} \times 10^{-4}}$$

$$\boxed{y_C = 4{,}7083 \frac{tm^3}{E.I} = 1{,}05\, cm}$$

PRACTICO 8.5

Determinar las solicitaciones M,Q,N en al siguiente viga hiperestática.

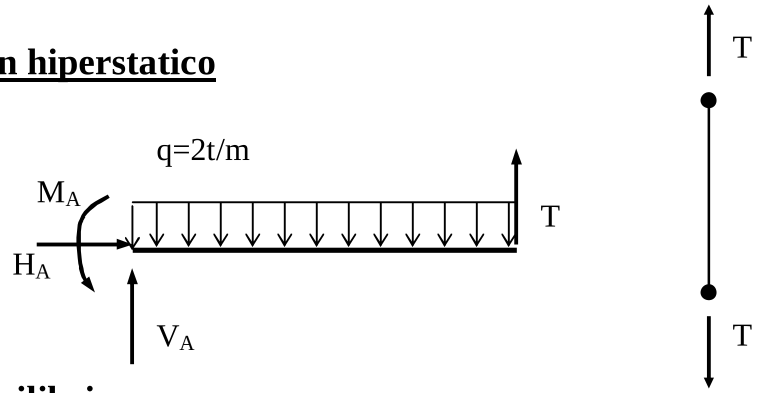




Rdos:
T= 2,97tn

Planteo resolución hiperstatico

D.C.L.



Ecuaciones de equilibrio

Planteando las ecuaciones de equilibrio, se observa que existen 4 incognitas (V_A, H_A, M_A, T) y se cuenta con solo tres ecuaciones de la estática, para resolver el problema.

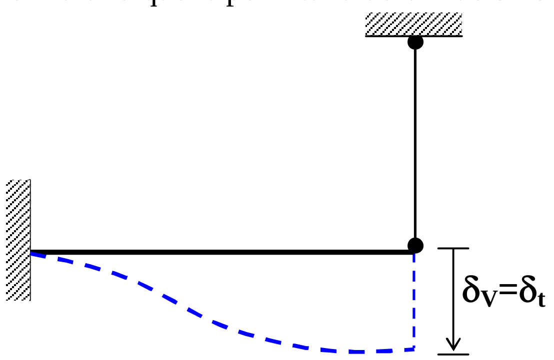
$$\sum F_V = 0 \Rightarrow V_A + T - q \cdot L = 0$$
$$\sum F_H = 0 \Rightarrow H_A = 0$$
$$\sum M = 0 \Rightarrow M_A + T \cdot L - \frac{q \cdot L^2}{2} = 0$$

SISITEMA HIPERESTATICO
DE PRIMER GRADO
Existe una incógnita hiperestática
GrH = 4incog-3ecuac =1 GrH

Ecuaciones de deformación

La solución del problema requiere plantear una ecuación que tenga en cuenta la deformación de la estructura, por cada incógnita hiperetática existente.

Para ello debemos analizar la deformación de la estructura: se observa que la viga en el punto B se deformará lo que le permita la deformación del tensor, es decir:



$\boxed{\delta_V = \delta_t}$ Ec. Deformación

siendo
δ_V= deformación de la viga en B
δ_t= alargamiento del tensor

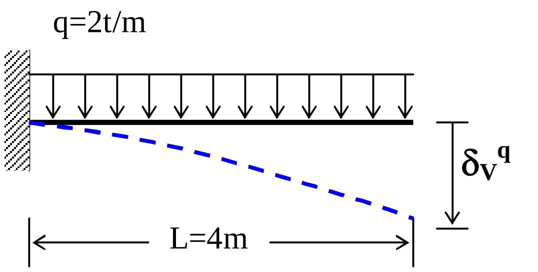
En el tensor, el alargamiento se obtiene por Hooke:

$$\delta_t = \frac{T \cdot l_t}{\Omega_t \cdot E}$$

$$\Omega_t = \frac{\pi \times (1cm)^2}{4} = 0{,}785cm^2$$

$$\delta_t = \frac{T \times 200cm}{0{,}785cm^2 \times 2100 \, {}^{t}\!/_{cm}} = 0{,}121 \times T\left({}^{cm}\!/_{t}\right)$$

En la viga, el desplazamiento del punto B lo obtenemos de las tablas de elastica:

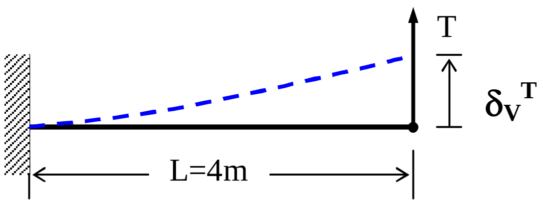


$$\delta_V{}^q = \frac{q \times L^4}{8 \cdot E \cdot I}$$

$$\Rightarrow \delta_V{}^q = \frac{2 \, {}^{t}\!/_{m^2} \times (4m)^4}{8 \cdot E \cdot I} = \frac{64tm^3}{E \cdot I}$$

$$\Rightarrow \delta_V{}^q = \frac{64tm^3 \times \left(10^6 \, {}^{cm^3}\!/_{m^3}\right)}{2100 \, {}^{t}\!/_{cm^2} \times 935cm^4} = 32{,}595(cm)$$

+



$$\delta_V{}^T = \frac{T \times L^3}{3 \cdot E \cdot I}$$

$$\Rightarrow \delta_V{}^q = \frac{T \times (4m)^3}{3 \cdot E \cdot I} = \frac{21{,}333tm^3}{E \cdot I}$$

$$\Rightarrow \delta_V{}^q = \frac{21{,}333tm^3 \times \left(10^6 \, {}^{cm^3}\!/_{m^3}\right)}{2100 \, {}^{t}\!/_{cm^2} \times 935cm^4} = 10{,}865 \times T\left({}^{cm}\!/_{t}\right)$$

Resultando la deformación en la viga:

$$\delta_V = \delta_V{}^q + \delta_V{}^T$$

$$\Rightarrow \delta_V = \frac{q \times L^4}{8 \cdot E \cdot I} - \frac{T \times L^3}{3 \cdot E \cdot I}$$

$$\Rightarrow \delta_V = \frac{64tm^3}{E \cdot I} - \frac{21{,}333 \times T(m^3)}{E \cdot I}$$

$$\Rightarrow \delta_V = 32{,}595(cm) - 10{,}865 \times T\left({}^{cm}\!/_{t}\right)$$

Planteando la ecuación de deformación:

$$\delta_V = \delta_t$$

$$\Rightarrow \frac{q \times L^4}{8 \cdot E \cdot I} - \frac{T \times L^3}{3 \cdot E \cdot I} = \frac{T \cdot l_t}{\Omega_t \cdot E}$$

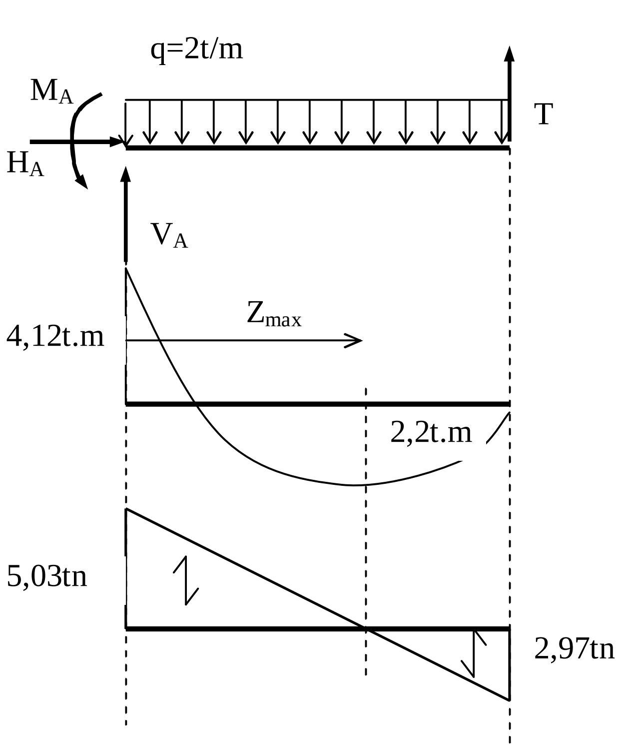
$$\Rightarrow 32{,}595(cm) - 10{,}865 \times T\left({}^{cm}\!/_{t}\right) = 0{,}121 \times T\left({}^{cm}\!/_{t}\right)$$

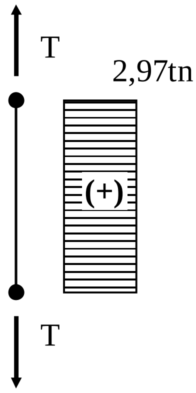
$$\mathrm{Re}\,sul\,\mathrm{tan}\,do$$

$$\Rightarrow 32{,}595(cm) = (0{,}121 + 10{,}865) \times T\left({}^{cm}\!/_{t}\right)$$

$$\Rightarrow T = \frac{32{,}595(cm)}{(0{,}121 + 10{,}865) \, {}^{t}\!/_{cm}} = 2{,}97tn$$

Solicitaciones





Despejando de las ecuaciones de equilibrio, resulta:

$$\Rightarrow \boldsymbol{T = 2{,}79tn}$$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow V_A = q \cdot L - T = 2\, {}^{t}\!/\!{}_{m} \times 4m - 2{,}97t = 5{,}03tn$$

$$\sum F_H = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow M_A = \frac{q \cdot L^2}{2} - T \cdot L = \frac{2\, {}^{t}\!/\!{}_{m} \times (4m)^2}{2} - 2{,}97t \times 4m = 4{,}12tm$$

$$M_{\max} = M_A - V_A \times Z_{\max} + \frac{q \cdot Z_{\max}{}^2}{2} = 4{,}12tm - 5{,}03t \times 2{,}515m + \frac{2\, {}^{t}\!/\!{}_{m} \times (2.515m)^2}{2} = 2{,}2tm$$

$$\Rightarrow Z_{\max} = \frac{V_A}{q} = \frac{5{,}03t}{2\, {}^{t}\!/\!{}_{m}} = 2{,}515m$$