UNIDAD I: CARGA Y CAMPO ELECTRICO

Carga eléctrica. Inducción eléctrica. Conservación y cuantización de la carga. Conductores y aisladores. Ley de Coulomb. Analogía entre la Ley de Coulomb y la Ley de Gravitación Universal. Unidades. Campo eléctrico. Definición. Ventajas de introducir este concepto. Unidades. Líneas de fuerzas. Flujo del Campo Eléctrico. Ley de Gauss. Comparar la Ley de Gauss y la Ley de Coulomb. Cálculo de campos eléctricos originados por distribuciones discretas y continuas de cargas eléctricas a partir de la Ley de Coulomb y a partir de la Ley de Gauss. Movimientos de partículas cargadas en campos eléctricos uniformes

Índice

Carga Eléctrica

El término eléctrico, y todos sus derivados, tiene su origen en las experiencias realizadas en la antigüedad donde se observo que cuando determinados cuerpos eran frotados con un paño de lana adquirían la propiedad de atraer hacia sí pequeños cuerpos ligeros; los fenómenos análogos a los producidos por Tales con el ámbar o elektron se denominaron fenómenos eléctricos y más recientemente fenómenos electrostáticos.

El desarrollo de la teoría atómica permitió aclarar el origen y la naturaleza de los fenómenos eléctricos.

Hoy sabemos que existen cargas eléctricas negativas (electrones descubiertos experimentalmente por Thomson en 1896) y positivas (protones descubiertos por Ruthenford en 1922).

La noción de fluido eléctrico, introducida por Benjamín Franklin (1706-1790) para explicar la electricidad, fue precisada a principios de siglo al descubrirse que la materia está compuesta íntimamente de átomos y éstos a su vez por partículas que tienen propiedades eléctricas.

La interacción electroestática es la responsable de que los núcleos y los electrones se mantengan unidos formando átomos, de que los átomos se unan a otros para formar moléculas y de que las moléculas se unan entre si para dar lugar a objetos macroscópicos. Los constituyentes del cuerpo humano, sus átomos y moléculas se mantienen unidos gracias a las fuerzas electromagnéticas. Muchos de los efectos naturales que podemos observar son en su origen el resultado de fuerzas electromagnéticas. Por ejemplo las plantas verdes absorben la luz del sol, es decir una onda electromagnética y convierten su energía potencial electromagnética en forma de moléculas de hidratos de carbono, base de la vida en la Tierra.

Hasta ahora nos hemos referido a la palabra electromagnetismo, como combinación de las palabras eléctrica y magnética. Esto es así porque loas fenómenos eléctricos y magnetitos son producidos por la misma propiedad de la materia, propiedad a la que le damos en nombre de carga eléctrica.

Aunque los efectos eléctricos y magnéticos están íntimamente relacionados, no resultan inseparables. Si limitamos el estudio a cargas en equilibrio estable (electroestática), podemos separar electricidad de magnetismo. Pero de la misma manera que la mecánica no nos dice que era la masa, sino solo como se comportaba, el electromagnetismo nos dice como se comportan las cargas y no lo que es.

Constituye una propiedad fundamental de la materia. Se manifiesta a través de ciertas fuerzas, denominadas electrostáticas, que son las responsables de los fenómenos eléctricos. Su influencia en el espacio puede describirse con el auxilio de la noción física de campo de fuerzas. El concepto de potencial hace posible una descripción alternativa de dicha influencia en términos de energías.

La electrostática es la parte de la física que estudia este tipo de comportamiento de la materia, se preocupa de la medida de la carga eléctrica o cantidad de electricidad presente en los cuerpos y, en general, de los fenómenos asociados a las cargas eléctricas en reposo

Como sucede con otros capítulos de la física, el interés de la electrostática reside no sólo en que describe las características de unas fuerzas fundamentales de la naturaleza, sino también en que facilita la comprensión de sus aplicaciones tecnológicas. Podemos afirmar sin lugar a dudas que las aplicaciones técnicas derivadas de los principios eléctricos son los que revolucionaron al mundo en los últimos ciento cincuenta años, desde el pararrayos, los motores eléctricos, la luz, las comunicaciones, la televisión, la revolución informática, el desarrollo de Internet y la amplia variedad de dispositivos científicos y técnicos están relacionados de alguna u otra manera con los fenómenos electrostáticos.

Fenómenos electrostáticos

Electrización

Cuando a un cuerpo se le dota de propiedades eléctricas se dice que ha sido electrizado o cargado. La electrización por frotamiento permitió, a través de unas cuantas experiencias fundamentales y de una interpretación de las mismas cada vez más completa, sentar las bases de lo que se entiende por electrostática.

Si una barra de caucho, de plástico o PVC (históricamente de ámbar) se frota con un paño de lana o una piel, se electriza.

Lo mismo sucede si una varilla de vidrio se frota con un paño de seda. Aun cuando ambas varillas pueden atraer objetos ligeros, como hilos o trocitos de papel, la propiedad eléctrica adquirida por frotamiento no es equivalente en ambos casos.

Así, puede observarse que dos barras de caucho electrizadas se repelen entre sí, y lo mismo sucede en el caso de que ambas sean de vidrio. Sin embargo, la barra de caucho es capaz de atraer a la de vidrio y viceversa.

Este tipo de experiencias se conocían ya desde la época de la Grecia clásica. Fueron realizadas por Tales de Mileto, un filósofo griego que vivió en el siglo sexto antes de Cristo. Tales estudió el comportamiento de una resina fósil, el ámbar. No se realizo ningún progreso notable en la interpretación de este fenómeno hasta los alrededores del 1600, cuando Willian Gilbert (1544-

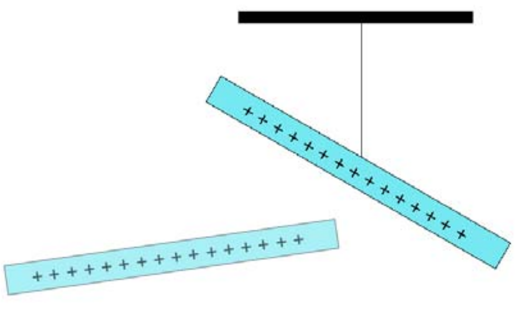
1603), medico de la reina Isabel I de Inglaterra, comenzó un estudio detallado de las distintas clases de sustancias que se comportaban como el ámbar, describió tales características como eléctricos (del nombre griego del ámbar, *elektron*). Gilbert llamo no eléctricos a los materiales en los cuales fue incapaz de encontrar esa fuerza de atracción, hay los llamamos a estos dos tipos de materiales como conductores y aislantes respectivamente. La siguiente etapa de importancia en el desarrollo de las ideas sobre las cargas eléctricas vino unos cien años más tardes, Charles Du Fay (1698-1739) demostró que se podían distinguir, entre la electricidad que adquiere el vidrio (vítrea) y la que adquiere el ámbar (resinosa).

Posteriormente Benjamín Franklin (1706-1790) al tratar de explicar los fenómenos eléctricos consideró la electricidad como un fluido sutil, llamó a la electricidad «vítrea» de Du Fay electricidad positiva (+) y a la «resinosa» electricidad negativa (-). Tengamos en cuenta que el signo atribuido es arbitrario (y sin importancia), pero el establecer un convenio de signos nos permite introducir una formulación matemática muy concisa para los hechos experimentales.

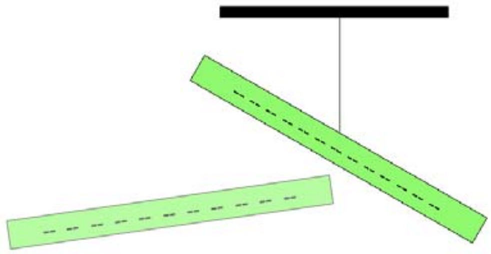
Las experiencias de electrización pusieron en manifiesto que:

Cargas eléctricas de distinto signo se atraen y cargas eléctricas de igual signo se repelen. Una experiencia sencilla sirvió de apoyo a Franklin para avanzar en la descripción de la carga eléctrica como propiedad de la materia.

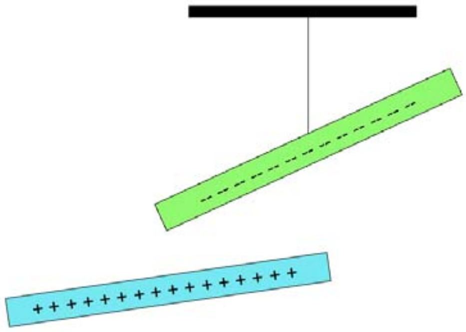
Cuando se frota la barra de vidrio con el paño de seda, se observa que tanto una como otra se electrizan ejerciendo por separado fuerzas de diferente signo sobre un tercer cuerpo cargado. Pero si una vez efectuada la electrización se envuelve la barra con el paño de seda, no se aprecia fuerza alguna sobre el cuerpo anterior. Ello indica que a pesar de estar electrizadas sus partes, el conjunto paño-barra se comporta como si no lo estuviera, manteniendo una neutralidad eléctrica.



Varillas de plásticos cargadas por frotamiento con piel, se repelen entre si



Varillas de vidrio, cargadas por frotamiento con seda, se repelen entre si

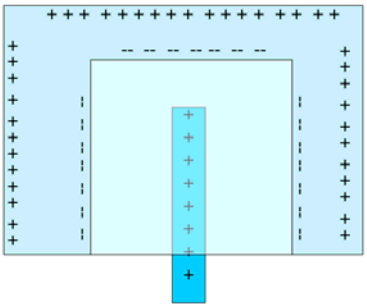


Varilla de plástico cargada, es atraída por la varilla de vidrio cargada

Este fenómeno fue interpretado por Franklin introduciendo el principio de conservación de la carga, según el cual cuando un cuerpo es electrizado por otro, la cantidad de electricidad que recibe uno de los cuerpos es igual a la que cede el otro, pero en conjunto no hay producción neta de carga. En términos de cargas positivas y negativas ello significa que la aparición de una carga negativa en el vidrio va acompañada de otra positiva de igual magnitud en el paño de lana o viceversa, de modo que la suma de ambas es cero.

Cuando un cuerpo cargado eléctricamente se pone en contacto con otro inicialmente neutro, puede transmitirle sus propiedades eléctricas. Este tipo de electrización denominada electrización por contacto se caracteriza porque es permanente y se produce tras un reparto de carga eléctrica que se efectúa en una proporción que depende de la geometría de los cuerpos y de su composición.

Existe, no obstante, la posibilidad de electrizar un cuerpo neutro mediante otro cargado sin ponerlo en contacto con él. Se trata, en este caso, de una electrización a distancia



Si el cuerpo cargado lo está positivamente la parte del cuerpo neutro más próximo se cargará con electricidad negativa y la opuesta con electricidad positiva.

La formación de estas dos regiones o polos de características eléctricas opuestas hace que a la electrización por influencia se la denomine también polarización eléctrica. A diferencia de la anterior este tipo de electrización es transitoria y dura mientras el cuerpo cargado se mantenga suficientemente próximo al neutro.

Un modelo que busca explicar estos efectos eléctricos, muy similar al modelo propuesto por Benjamín Franklin, se lo podría resumir como:

1 – La materia contiene dos tipos de cargas eléctricas, llamadas positivas y negativas. Los objetos no cargados poseen iguales cantidades de cada tipo de carga, de manera que la carga neta es cero. Cuando son cargados por frotamiento la carga se transfiere de un cuerpo a otro. Cuando el proceso ha terminado uno de los objetos tiene un exceso de carga positiva y el otro un exceso de carga negativa.

2 – Objetos cargados con carga del mismo signo se repelen.

3 – Objetos cargados con carga de distinto signo se atraen.

Aparece inherente a este modelo la llamada ley de conservación de la carga: La carga eléctrica no puede ser creada ni destruida, únicamente puede ser transferida.

La naturaleza eléctrica de la materia

La teoría atómica moderna explica el por qué de los fenómenos de electrización y hace de la carga eléctrica una propiedad fundamental de la materia en todas sus formas. Un átomo de cualquier sustancia está constituido, en esencia, por una región central o núcleo y una envoltura externa formada por electrones.

El núcleo está formado por dos tipos de partículas, los protones, dotados de carga eléctrica positiva, y los neutrones, sin carga eléctrica aunque con una masa semejante a la del protón. Tanto unos como otros se hallan unidos entre sí por efecto de unas fuerzas mucho más intensas que las de la repulsión electrostática -las fuerzas nucleares- formando un todo compacto. Su carga total es positiva debido a la presencia de los protones.

Los electrones son partículas mucho más ligeras que los protones y tienen carga eléctrica negativa. La carga de un electrón es igual en magnitud, aunque de signo contrario, a la de un protón. Las fuerzas eléctricas atractivas que experimentan los electrones respecto del núcleo hace que éstos se muevan en torno a él en una situación que podría ser comparada, en una primera aproximación, a la de los planetas girando en torno al Sol por efecto, en este caso de la atracción gravitatoria.

El número de electrones en un átomo es igual al de protones de su núcleo correspondiente, de ahí que en conjunto y a pesar de estar formado por partículas con carga, el átomo completo resulte eléctricamente neutro.

Un núcleo puede tener de 1 a 100 protones, dependiendo del elemento químico de que se trate y normalmente contiene aproximadamente igual numero de neutrones, un protón y un neutrón tienen la misma masa, que es del orden de dos mil veces mayor a la masa del electrón, es decir que la masa del núcleo es aproximadamente cuatro mil veces mayor a la masa del conjunto de sus electrones.

Una característica eléctrica importante de este modelo atómico es la cuantización de la carga. Cuando decimos que una magnitud esta cuantizada, significa que existe una cantidad mínima, que es la más pequeña cantidad posible de esa magnitud. Cualquier cantidad superior de esa magnitud contendrá un número entero de veces esa cantidad mínima. Para la carga eléctrica, la cantidad mínima o elemental es la carga del electrón (o protón) y la designaremos con la letra “e” y es indivisible.

Aunque los electrones se encuentran ligados al núcleo por fuerzas de naturaleza eléctrica, en algunos tipos de átomos les resulta sencillo liberarse de ellas. Cuando un electrón logra escapar de dicha influencia, el átomo correspondiente pierde la neutralidad eléctrica y se convierte en un ion positivo, al poseer un número de protones superior al de electrones. Lo contrario sucede cuando un electrón adicional es incorporado a un átomo neutro. Entonces el ion formado es negativo.

La electrización por frotamiento se explica del siguiente modo. Por efecto de la fricción, los electrones externos de los átomos del paño de lana son liberados y cedidos a la barra de ámbar, con lo cual ésta queda cargada negativamente y aquél positivamente. En términos análogos puede explicarse la electrización del vidrio por la seda. En cualquiera de estos fenómenos se pierden o se ganan electrones, pero el número de electrones cedidos por uno de los cuerpos en contacto es igual al número de electrones aceptado por el otro, de ahí que en conjunto no hay producción ni destrucción de carga eléctrica. Esta es la explicación, desde la teoría atómica, del principio de conservación de la carga eléctrica formulado por Franklin con anterioridad a dicha teoría sobre la base de observaciones sencillas.

La electrización por contacto es considerada como la consecuencia de un flujo de cargas negativas de un cuerpo a otro. Si el cuerpo cargado es positivo es porque sus correspondientes átomos poseen un defecto de electrones, que se verá en parte compensado por la aportación del cuerpo neutro cuando ambos entran en contacto, El resultado final es que el cuerpo cargado se hace menos positivo y el neutro adquiere carga eléctrica positiva. Aun cuando en realidad se hayan transferido electrones del cuerpo neutro al cargado positivamente, todo sucede como si el segundo hubiese cedido parte de su carga positiva al primero. En el caso de que el cuerpo cargado inicialmente sea negativo, la transferencia de carga negativa de uno a otro corresponde, en este caso, a una cesión de electrones.

La electrización por influencia es un efecto de las fuerzas eléctricas. Debido a que éstas se ejercen a distancia, un cuerpo cargado positivamente en las proximidades de otro neutro atraerá hacia sí a las cargas negativas, con lo que la región próxima queda cargada negativamente. Si el cuerpo cargado es negativo entonces el efecto de repulsión sobre los electrones atómicos convertirá esa zona en positiva. En ambos casos, la separación de cargas inducida por las fuerzas eléctricas es transitoria y desaparece cuando el agente responsable se aleja suficientemente del cuerpo neutro.

Conductores, aisladores y semiconductores

Una varilla metálica sostenida en la mano y frotada con una piel, no manifiesta en ningún momento estar cargada. Sin embargo es posible cargar esa varilla si se la provee de un mango de vidrio o plástico y si el metal no se toca con las manos al frotarlo. La explicación es que tanto el metal, como el cuerpo humano y la tierra son conductores de la electricidad y que el vidrio o el plástico son aisladores (o también llamados dieléctricos).

Cuando un cuerpo neutro es electrizado, sus cargas eléctricas, bajo la acción de las fuerzas correspondientes, se redistribuyen hasta alcanzar una situación de equilibrio

En los conductores eléctricos, las cargas se pueden mover libremente a través del material, mientras que en los aisladores no pueden hacerlo o ponen muchas dificultades a este movimiento de las cargas eléctricas por su interior y sólo permanece cargado el lugar en donde se depositó la carga neta. Aun cuando no hay aisladores perfectos, el poder aislante del cuarzo fundido es aproximadamente 10^{25} veces mayor al del cobre, de modo que para muchos fines prácticos, algunos materiales se comportan como si fueran aisladores perfectos.

Esta diferencia de comportamiento de las sustancias respecto del desplazamiento de las cargas en su interior depende de su naturaleza íntima. Así, los átomos de las sustancias conductoras poseen electrones externos muy débilmente ligados al núcleo en un estado de semilibertad que les otorga una gran movilidad, tal es el caso de los metales. En las sustancias aisladoras, sin embargo, los núcleos atómicos retienen con fuerza todos sus electrones, lo que hace que su movilidad sea escasa.

Entre los buenos conductores y los aisladores existe una gran variedad de situaciones intermedias. Es de destacar entre ellas la de los materiales semiconductores por su importancia en la fabricación de dispositivos electrónicos que son la base de la actual revolución tecnológica, tal es el caso del silicio y el germanio. En condiciones ordinarias se comportan como malos conductores, pero desde un punto de vista físico su interés radica en que se pueden alterar sus propiedades conductoras con cierta facilidad, ya sea mediante pequeños cambios en su composición (por ejemplo al silicio se le agregan trazas de boro o de azufre), ya sea sometiéndolos a condiciones especiales, como elevada temperatura o intensa iluminación. El principio de funcionamiento de los semiconductores no se puede describir en forma adecuada sin tener conocimiento de los principios fundamentales de la física quántica.

LA LEY DE COULOMB

Aun cuando los fenómenos electrostáticos fundamentales eran ya conocidos en la época de Charles Coulomb (1736-1806), no se conocía aún la proporción en la que esas fuerzas de atracción y repulsión variaban. Fue este físico francés quien, en 1785, tras poner a punto un método de medida de fuerzas sensible a pequeñas magnitudes, lo aplicó al estudio de las interacciones entre pequeñas esferas dotadas de carga eléctrica. El resultado final de esta investigación experimental fue la ley que lleva su nombre y que describe las características de las fuerzas de interacción entre cuerpos cargados. El dispositivo utilizado recibió el nombre de balanza de torsión, constaba de dos esferas que se podían cargar, suspendidas de manera se pudiese medir el ángulo de torsión de la fibra que las mantenía suspendidas, en ángulo girado era proporcional a la carga de las esferas.

Los primeros resultados experimentales podemos expresarlos como:

$$F \propto \frac{1}{r^2}$$

donde es la magnitud de la fuerza que obra en cada una de las dos esferas cargadas y r es la distancia que las separa. Estas fuerzas, como lo requiere la tercera ley de Newton obran en la línea que une las cargas pero en sentidos opuestos.

Coulomb también estudio como variaba la fuerza eléctrica con el tamaño relativo de las cargas aplicadas a cada esfera y llego a:

$$F \propto \frac{q_1 * q_2}{r^2}$$ donde q_1 y q_2 son medidas de las cargas aplicada a cada esfera .

Cuando se consideran dos cuerpos cargados (supuestos puntuales), la intensidad de las fuerzas atractivas o repulsivas que se ejercen entre sí es directamente proporcional al producto de sus cargas e inversamente proporcional al cuadrado de las distancias que las separa, dependiendo además dicha fuerza de la naturaleza del medio que les rodea.

Como fuerzas de interacción, las fuerzas eléctricas se aplican en los respectivos centros de las cargas y están dirigidas a lo largo de la línea que los une y su sentido depende de los signos de las cargas. Cargas de igual signo se repelen y de signo contrario se atraen.

Teniendo presente la constante de proporcionalidad, la cual depende del medio en el cual plantemos las cargas, podemos escribir la Ley de Coulomb como:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 * q_2}{r^2}$$ Donde ε_0 es la *permitividad del vació* y su valor experimental es

$$\varepsilon_0 = 8{,}854*10^{-12} * \frac{C^2}{N*m^2}$$

De tal manera que podemos escribir la constante de proporcionalidad como:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cong 9*10^9 \frac{N*m^2}{C^2}$$

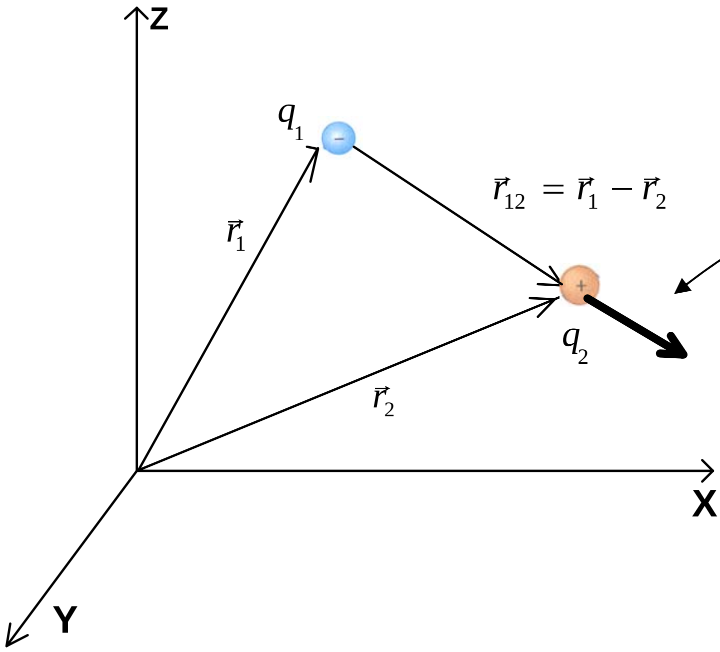
Finalmente, la expresión matemática de la ley de Coulomb es, escribiéndola en forma vectorial

$$\vec{F}_{12} = k\frac{q_1 * q_2}{r_{12}{}^3}\vec{r}_{12}$$ Aquí $\vec{F}_{12}$ es la fuerza que actúa sobre la partícula 2, con carga q_2, debida a la partícula 1, con carga q_1

$\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ son los vectores de posición de las cargas 1 y 2,

$\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ es el vector que va desde la carga q_1 hasta q_2, y

$r_{21} = \left|\vec{r}_{21}\right| = \left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|$ es la distancia entre las cargas, según se ve en la figura



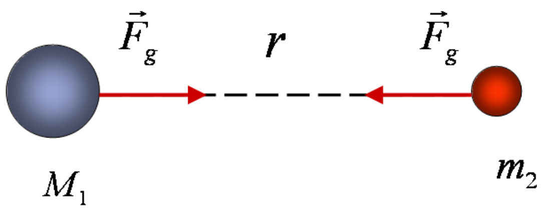
$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 * q_2}{r_{12}^{\ 3}} \vec{r}_{12}$$

Analogía entre la ley de Coulomb y la ley de Gravitación Universal de Newton

La comparación entre la ley de Newton de la gravitación universal y la ley de Coulomb de la electrostática muestra la existencia entre ellas de una cierta analogía o paralelismo.

El campo gravitatorio clásico por excelencia es el llamado campo newtoniano, es decir, un campo de fuerzas que cumple la ley de Newton de la proporcionalidad inversa entre la intensidad y el cuadrado de la distancia al centro. Se denominan campos gravitatorios newtonianos aquellos que cumplen la ley de Newton de la gravitación universal, según la cual *la fuerza con que se atraen dos cuerpos es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre sus centros.*

Si tenemos dos cuerpos como los de la figura



Donde la interacción entre dos cuerpos de masa M y m se describe en término de una fuerza atractiva, cuya dirección es la recta que pasa por el centro de los dos cuerpos y cuyo módulo viene dado por la expresión:

$$\vec{F}_g = -G\frac{M_1 * m_2}{m_{12}^{\ 3}}\vec{m}_{12}$$

Donde G es la constante de la gravitación universal $G = 6.67 * 10^{-11}\, Nm^2 / Kg^2$ y r es la distancia entre los centros de los cuerpos

Tengamos en cuenta que la ley de Coulomb para interacciones entre partículas cargadas viene a decir algo parecido a "*la fuerza con que se atraen / repelen dos cargas de distinto / igual signo es directamente proporcional al producto de sus cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre sus centros*"

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{q_1 * q_2}{r^2}$$

Esta analogía no supone una identidad entre la naturaleza de ambos tipos de fuerzas, sólo indica que los fenómenos de interacción entre cargas y los de interacción entre masas podrán ser estudiados y tratados de un modo similar. A pesar de esta analogía formal, existen algunas diferencias que cabe destacar. La primera se refiere al valor de las constantes G y K. El valor de G resulta ser mucho menor que K:

$G = 6.67 * 10^{-11}$ Unidades del sistema Internacional

$K = 9 * 10^{9}$ Unidades del Sistema Internacional (en el vacío)

Por tal motivo, las fuerzas entre cargas serán mucho más intensas que las fuerzas entre masas para cantidades comparables de una y otra magnitud.

Debemos destacar entre las analogías que las direcciones de las fuerzas actuantes están en ambos casos siempre contenidas en la línea de unión de las partículas

Una diferencia importante, G es una constante universal y no depende del medio donde se encuentren los agentes que interaccionan; K es una constante que depende del medio donde se encuentren las partículas interactuantes.

Además, las fuerzas gravitatorias son siempre atractivas, mientras que las eléctricas pueden ser atractivas o repulsivas en función de los signos de las cargas que interactúan.

Unidades

La unidad de carga en el sistema MKS es el "*coulomb*" , que se lo abrevia como *"coul"*

La ley de Coulomb proporciona una idea de la magnitud del coulomb como cantidad de electricidad.

Así, haciendo en la en la ecuación de la ley de Coulomb:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 * q_2}{r^2}$$ Dando los valores iguales a:

$q_1 = q_2 = 1coul$ y $r_1 = 1m$ y

Resulta la fuerza eléctrica *F = K 9 · 109 N*;

es decir, dos cargas de un coulomb situadas a una distancia de un metro, experimentarían una fuerza electrostática de nueve mil millones de newtons. La magnitud de esta fuerza descomunal indica que el coulomb es una cantidad de carga muy grande, de ahí que se empleen sus submúltiplos para describir las situaciones que se plantean en el estudio de los fenómenos electrostáticos. Los submúltiplos del coulomb más empleados son:

El milicoulomb: $1mCoul = 10^{-3}Coul$

El microcoulomb: $1\mu Coul = 10^{-6}Coul$

El nanocoulomb: $1\eta Coul = 10^{-9}Coul$

Expresada en culombios la cantidad fundamental de carga, es decir la carga del electrón o del protón tiene el valor de

$$e = 1{,}60207 * 10^{-19}coul$$

Por razones prácticas relacionadas con la precisión de las mediciones, la unidad de carga en el sistema MKS no se define usando una balanza de torsión, sino que se la deriva de la unidad de corriente eléctrica. La unidad de corriente eléctrica es el amper, se define el coulomb como la cantidad de carga que pasa por una sección transversal dada de un alambre en 1 segundo si circula por el alambre una corriente constante de 1 Amper.

Sobre esta definición trabajaremos más adelante

Principio de Superposición

Se ha comprobado -también experimentalmente- que las fuerzas eléctricas se comportan en forma aditiva, es decir; la fuerza eléctrica sobre una carga q , debida a un conjunto de cargas

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots\ldots. + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} F_i$$

$q_1 \ldots\ldots q_n$ es igual a la suma de las fuerzas que $\vec{F}_i$, que cada carga q_i , ejerce separadamente sobre la carga q , es decir:

en que las fuerzas $\vec{F}_i$ están dadas por $\vec{F}_i(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{q q_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$

En la ecuación anterior las cargas q_i ocupan las posiciones dadas por los vectores r_i con $i = (1, \ldots. n)$ y la carga q está en el punto $\vec{r}$.

Aplicaciones de la ley de Coulomb

La ley de Coulomb relaciona la magnitud de las fuerzas electrostáticas con las características del medio, reflejadas en su constante K, con el valor de las cargas interactuantes y con la distancia comprendida entre sus centros. Por tal motivo es posible averiguar uno de estos elementos si se conoce el resto, veamos por ejemplo

Cálculo de radio del átomo de hidrogeno:

Un átomo de hidrógeno está formado por un protón y un electrón que se mueve en torno a él; sabiendo que sus cargas, iguales y de signo contrario, equivalen a

$e = 1{,}6 * 10^{-19} coul$ y que la intensidad de la fuerza atractiva que experimentan es de

$$F_e = 8{,}2 * 10^{-18} coul$$

se puede determinar el valor de la distancia media que los separa (radio de Bohr).

De acuerdo con la ley de Coulomb: $F = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1 * q_2}{r^2}$

La distancia entre dos cargas puede expresarse en función de la fuerza de interacción en la forma: $r = \sqrt{\dfrac{Kq_1q_2}{F_e}}$ sustituyendo los valores será igual a:

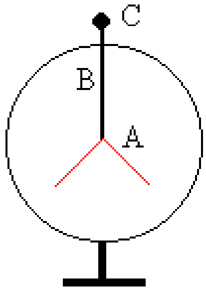
$$r = \sqrt{\frac{9*10^9 \dfrac{Nm^2}{Coul^2} * 1{,}60 * 10^{-19} coul * 1{,}60 * 10^{-19} coul}{8{,}2 * 10^{-18} N}}$$

$$r = 2{,}8 * 10^{-11} m$$

El electroscopio

El electroscopio consta de dos láminas delgadas de oro o aluminio A que están fijas en el extremo de una varilla metálica B que pasa a través de un soporte C de ebonita, ámbar o azufre. Cuando se toca la bola del electroscopio con un cuerpo cargado, las hojas adquieren carga del mismo signo y se repelen siendo su divergencia una medida de la cantidad de carga que ha recibido. La fuerza de repulsión electrostática se equilibra con el peso de las hojas.

Si se aplica una diferencia de potencial entre la bola C y la caja del mismo, las hojas también se separan. Se puede calibrar el electroscopio trazando la curva que nos da la diferencia de potencial en función del ángulo de divergencia.



Distribuciones de Carga

Distribución de carga volumétrica

Consideremos el problema siguiente: Se tiene un cuerpo macroscópico, de volumen V, cargado. Queremos calcular la fuerza que este objeto ejerce sobre una carga puntual q, localizada en un punto r. Supongamos que el volumen V del cuerpo se divide en un número N de pequeños 'cubos', de volumen ΔV y carga Δq_i.

La carga total del cuerpo será $Q = \Delta q_1 + \Delta q_2 + \Delta q_3 + ... + \Delta q_N$ y $V = \Delta v_1 + \Delta v_2 + \Delta v_3 + ... + \Delta v_N$ es su volumen.

Si el número de los elementos de volumen ΔV tiende a infinito, mientras su tamaño tiende a cero, manteniendo las relaciones anteriores, entonces la fuerza que el cuerpo ejerce sobre la carga puntual puede aproximarse por la suma o superposición de aquellas fuerzas $\Delta \vec{F}_i$ debidas a los elementos de carga Δq_i.

$$\vec{F}_q(\vec{r}) \approx q \sum_i^N \frac{\Delta q_i(\vec{r}_i)(\vec{r} - \vec{r}_i)}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

en que se ha puesto $\Delta q_i(\vec{r}_i)$ para hacer resaltar el hecho que la carga contenida en el elemento de volumen ΔV depende de $\vec{r}_i$; en otras palabras, depende de la posición del elemento de volumen en cuestión.

Definamos la densidad de carga -volumétrica- en la vecindad del punto $\vec{r}_i$ como

$$\rho(\vec{r}_i) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q_i(r_i)}{\Delta V} = \frac{dq(r_i)}{dV}$$

Esta es, también, la densidad de carga promedio en un volumen ΔV , cuando este se hace muy pequeño, es decir, 'tiende a un punto'; por lo tanto $\rho(\vec{r}_i)$ se interpreta como la densidad de carga en le vecindad del punto $\vec{r}_i$.

Si se reemplaza $\Delta q_i(\vec{r}_i)$ por $\rho(\vec{r}_i) * \Delta V$ en la ecuación. Por lo tanto, pasando al límite se tiene

$$\vec{F}_T(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}\,)}{r_i^2} * dV \vec{r}_i$$

Distribuciones superficial y lineal de carga.

Densidad superficial de carga σ : Suponemos ahora que la carga se halla distribuida sobre una superficie S , entonces

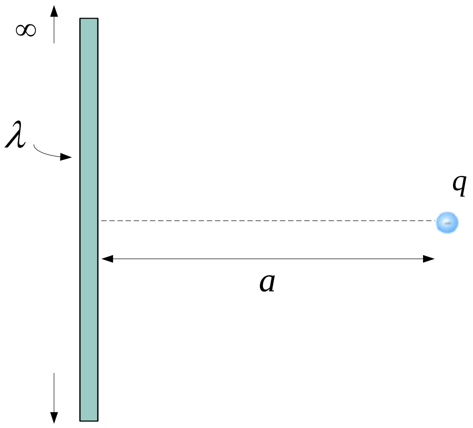
$$\sigma(\vec{r}_i) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q_i(r_i)}{\Delta S} = \frac{dq(r_i)}{dS}$$

Distribución lineal de carga λ : Si la carga se distribuye sobre una línea L , entonces definimos

$$\lambda(\vec{r}_i) = \lim_{\Delta L \to 0} \frac{\Delta q_i(r_i)}{\Delta L} = \frac{dq(r_i)}{dL}$$

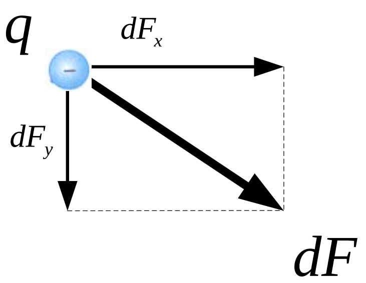
Ejemplo de calculo

Ejemplo: calcular la fuerza ejercida por una varilla de longitud infinita cargada con una distribución lineal constante λ , sobre una carga puntual q situada en un punto P a una distancia a



Para poder aplicar la Ley de Coulomb consideramos un elemento dq

$$dq = \lambda dL \qquad dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qdq}{z^2}\vec{z}$$

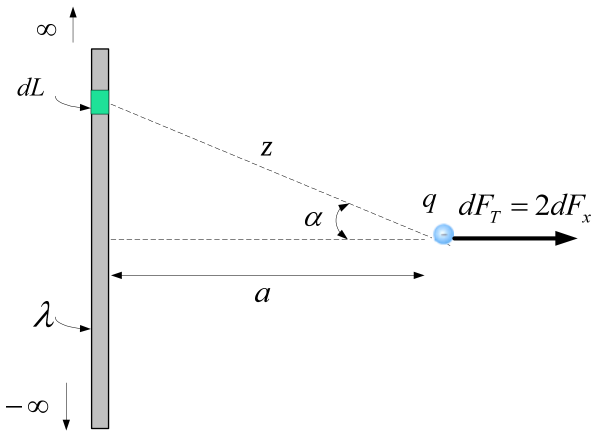


$$\vec{F}_T = \sum \vec{F}_{T_x} + \sum \vec{F}_{T_y}$$

$$\sum \vec{F}_{T_y} = \vec{F}_y - \vec{F}_y = 0$$

$$\sum \vec{F}_{T_x} = \vec{F}_x + \vec{F}_x = 2\vec{F}_x$$

$$d\vec{F} = 2d\vec{F}_x = 2 * \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qdq}{z^2}\cos\alpha = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qdq}{z^2}\cos\alpha$$



$$d\vec{F} = 2d\vec{F}_x = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qdq}{z^2}\cos\alpha$$

Vemos que $-\infty \leq L \leq \infty$

$$\vec{F}_T = \int_L d\vec{F}$$

$$F_T = \int_L d\vec{F} = \int_{-\infty}^{\infty} 2d\vec{F}_x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{qdq}{z^2} \cos\alpha$$

$$\vec{F}_T = \int_L d\vec{F} = \int_{-\infty}^{\infty} 2d\vec{F}_x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{qdq}{z^2} \cos\alpha$$

Teniendo en cuenta que: $dq = \lambda dL$

$$tg\alpha = \frac{L}{a} \Rightarrow L = a * tg\alpha \Rightarrow dL = \frac{a}{\cos^2\alpha} d\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{z} \Rightarrow z = \frac{a}{\cos\alpha} \Rightarrow z^2 = \frac{a^2}{\cos^2\alpha}$$

$$\vec{F}_T = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{qdq}{z^2} \cos\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{q\lambda dL}{z^2} \cos\alpha = \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dL}{z^2} \cos\alpha$$

Reemplazando las ecuaciones anteriores

$$\vec{F}_T = \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dL}{z^2} \cos\alpha = \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{\cos^2\alpha} d\alpha \frac{\cos^2\alpha}{a^2} \cos\alpha =$$

$$\vec{F}_T = \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{\cos^2\alpha} d\alpha \frac{\cos^2\alpha}{a^2} \cos\alpha =$$

$$L \to \infty \Rightarrow \alpha \to \frac{\pi}{2} \qquad L \to -\infty \Rightarrow \alpha \to -\frac{\pi}{2}$$

$$\vec{F}_T = \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{a}{\cos^2\alpha} d\alpha \frac{\cos^2\alpha}{a^2} \cos\alpha = \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\alpha d\alpha$$

$$\vec{F}_T = \frac{q\lambda}{2a\pi\varepsilon_0}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\alpha d\alpha = \frac{q\lambda}{2a\pi\varepsilon_0}\left(sen\frac{\pi}{2} - sen\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right) =$$

$$F_T = \frac{q\lambda}{2a\pi\varepsilon_0} * 2 = \frac{q\lambda}{a\pi\varepsilon_0}$$

$$F_T = \frac{q\lambda}{a\pi\varepsilon_0}$$

EL CAMPO ELÉCTRICO

El concepto físico de campo

Las cargas eléctricas no precisan de ningún medio material para ejercer su influencia sobre otras, de ahí que las fuerzas eléctricas sean consideradas fuerzas de acción a distancia. Cuando en la naturaleza se da una situación de este estilo, se recurre a la idea de campo para facilitar la descripción en términos físicos de la influencia que uno o más cuerpos ejercen sobre el espacio que les rodea. La noción física de campo se corresponde con la de un espacio dotado de propiedades medibles. Por ejemplo, la temperatura del aire en una habitación (el salón de clase por Ej.) posee un valor determinado en cada punto de la misma. Si T representa la temperatura, existe una función T(x, y, z) que da la temperatura en cada punto (x, y, z) de la habitación. Si la temperatura cambia con el tiempo, debemos incluirlo como variable T(x, y, z, t). Como la temperatura es una magnitud escalar,

T(x, y, z, t) es un ejemplo de campo escalar. Además de campos escalares existen campos vectoriales, es decir magnitudes vectoriales que están definidas en cada punto del espacio. El viento en la atmósfera terrestre es un ejemplo. En cada punto de la atmósfera el aire tendrá una velocidad V. Cada una de las tres componentes de este campo vectorial será función de la posición y del tiempo. En coordenadas cartesianas podemos escribir estas tres componentes como V_x (x,y,z,t); Vy (x,y,z,t); Vz (x,y,z,t)

En el caso de que se trate de un campo de fuerzas éste viene a ser aquella región del espacio en donde se dejan sentir los efectos de fuerzas a distancia. Así, la influencia gravitatoria sobre el espacio que rodea la Tierra se hace visible cuando en cualquiera de sus puntos se sitúa, a modo de detector, un cuerpo de prueba y se mide su peso, es decir, la fuerza con que la Tierra lo atrae. Dicha influencia gravitatoria se conoce como campo gravitatorio terrestre. De un modo análogo la física introduce la noción de campo magnético y también la de campo eléctrico o electrostático.

El campo eléctrico

El espacio que rodea a una varilla cargada parece estar afectado por la varilla y a esta espacio lo llamaremos *campo eléctrico.* Podemos decir también que el campo eléctrico asociado a una carga aislada o a un conjunto de cargas es aquella región del espacio en donde se dejan sentir sus efectos.

Así, si en un punto cualquiera del espacio en donde está definido un campo eléctrico se coloca una carga de prueba o carga testigo, se observará la aparición de fuerzas eléctricas, es decir, de atracciones o de repulsiones sobre ella.

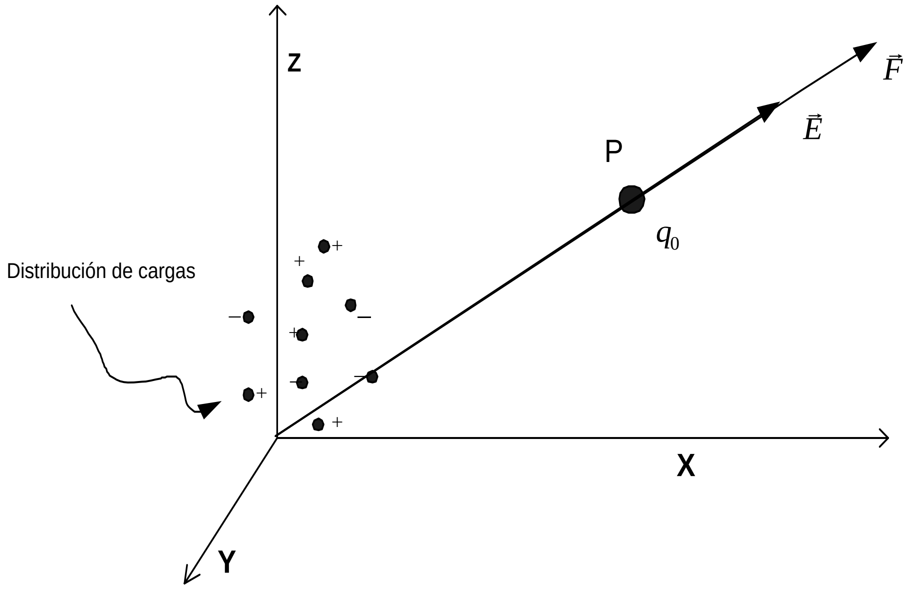
El campo juega un papel intermedio en las fuerzas que obran entre las cargas. Podemos decir que hay dos problemas separados, uno es el cálculo de campos establecidos a partir de distribuciones de cargas dadas y el otro el calculo de las fuerzas que campos dados ejerzan sobra cargas colocadas en ellos.

Todo campo físico queda caracterizado por sus propiedades. En el caso del campo eléctrico, una forma de describir las propiedades del campo sería indicar la fuerza que se ejercería sobre un mismo cuerpo de prueba que tenga una carga q_0. La carga de referencia más simple es la carga puntual (masa despreciable) con carga positiva.

El referirse a la misma carga de prueba permite comparar los distintos puntos del campo en términos de intensidad.. La fuerza eléctrica que en un punto cualquiera del campo se ejerce sobre la carga de prueba q_0 positiva, tomada como elemento de comparación, recibe el nombre de intensidad del campo eléctrico y se representa por la letra E. Por tratarse de una fuerza (vector) por unidad de carga (escalar) la intensidad del campo eléctrico es una magnitud vectorial que viene definida por su módulo E y por su dirección y sentido.

La definición de campo eléctrico es similar a la de campo gravitatorio.

Supongamos que una partícula que denominaremos partícula de prueba tiene una carga pequeña q positiva, se encuentra en las cercanías de un grupo de partículas cargadas



Se define al campo eléctrico $\vec{E}$ en el punto P del espacio que ocupa la carga q_0, debido al grupo de partículas como el cociente entre la fuerza total $\vec{F}$ ejercida por el grupo sobre la partícula de prueba y la carga q de la misma.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{Q * q_0}{r^2 * q_0} \quad \vec{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{Q}{r^2} \vec{r}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{Q}{r^2} \vec{r}$$

donde $\vec{E}$ estará aplicada en el punto P y su dirección estará a lo largo de la recta que une la carga central Q y el punto genérico P, en donde se sitúa la carga de prueba q_0, y su sentido será atractivo o repulsivo según Q sea negativa o positiva respectivamente.

En lo que sigue se considerarán por separado ambos aspectos del campo E.

La expresión del módulo de la intensidad de campo E puede obtenerse fácilmente para el caso sencillo del campo eléctrico creado por una carga puntual Q sin más que combinar la ley de Coulomb con la definición de E.

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{Q}{r^2}$$

Conocido el campo eléctrico es posible determinar la fuerza eléctrica que actuará sobre una carga arbitraria q en cualquier punto del espacio mediante la ecuación:

$$\vec{F} = q * \vec{E}$$

Expresión que indica que la fuerza aplicada a q es igual a q veces el valor de la intensidad de campo E en el punto P. Esta forma de describir las fuerzas del campo y su variación con la posición hace más sencillos los cálculos, particularmente cuando se ha de trabajar con campos debidos a muchas cargas.

Unidades

La unidad de intensidad de campo E es el cociente entre la unidad de fuerza y la unidad de carga; en el Sistema Internacional equivale, por tanto, al $Newton/Coulomb$

$$[E] = \frac{[F]}{[q]} = \frac{Newton}{Coulomb} = \frac{N}{Coul}$$

Campo eléctrico producido por partículas cargadas

Sistema con una carga puntual

La fuerza $\vec{F}$ ejercida sobre una partícula de prueba con carga q_0 por otra partícula q con carga situada en el origen de coordenadas está dada por la ley de Coulomb

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{Q * q_0}{r^2} \vec{r}$$

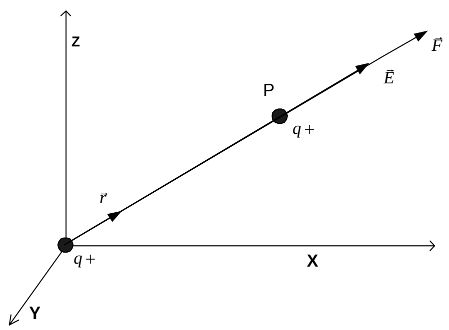
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{q}{r^2} \vec{r}$$

La ecuación anterior nos da el campo eléctrico creado por una partícula puntual de carga q

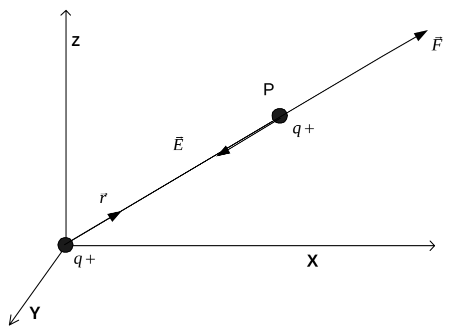
Las principales características de este campo son:

$|E|$ es proporcional a q $|E|$ es proporcional a $\frac{1}{r^2}$

Apunta hacia fuera para una carga positiva y hacia la carga si esta es negativa, según se ve en las figuras siguientes



Carga Positiva



Carga Negativa

Sistema de N cargas puntuales

Supongamos que tenemos ahora un sistema de N cargas puntuales. La fuerza $\vec{F}$ que actuará sobre una carga de prueba situada en un punto P del espacio estará dada por

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{q_0 q_1}{r_1^2}\vec{r}_1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{q_0 q2}{r_2^2}\vec{r}_2 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{q_0 q_3}{r_3^2}\vec{r}_3 + ...+ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{q_0 q_i}{r_i^2}\vec{r}_i$$

$$\vec{F} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0} * \left(\frac{q_1}{r_1^2}\vec{r}_1 + \frac{q_2}{r_2^2}\vec{r}_2 + \frac{q_3}{r_3^2}\vec{r}_3 + ...+ \frac{q_i}{r_i^2}\vec{r}_i \right)$$

$$\vec{F} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0} * \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i^2}\vec{r}_i$$

donde q_i es la carga de la partícula, r_i es la distancia de la partícula i al punto P y $\vec{r}_i$ es el vector unitario que apunta desde la partícula i al punto P.

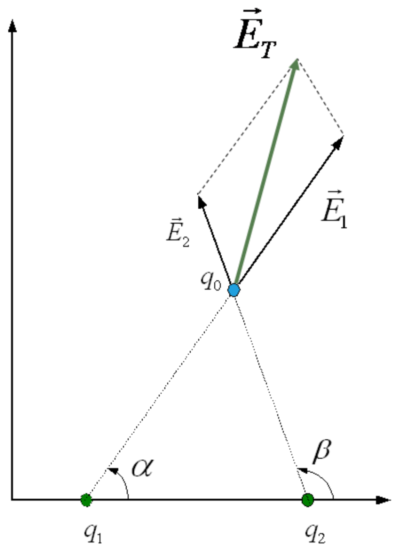
Dividiendo por la carga q_0 se obtiene el campo eléctrico $\vec{E}$ en el punto P

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i^2}\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$$

El campo eléctrico $\vec{E}$ producido por dos o más cargas puntuales es el vector suma de las contribuciones individuales al campo debidas a cada carga por separado.

La obtención del campo eléctrico producido por una distribución de cargas puntuales se reduce esencialmente a un problema de suma de vectores, como podemos ver en los ejemplos siguientes, donde se calcula la E_i debida a cada carga como si fuera la única que existiera y luego se suman vectorialmente esos campos calculados separadamente para encontrar el campo resultante total

Consideremos el sistemas de dos cargas de la figura con dos cargas



q_1 y q_2, ambas positivas y de valores tales que

$$q_1 = 2q_2$$

Donde

$$\vec{E}_T = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Entonces podemos calcular el campo eléctrico debido a la carga q_1 ,como

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{q_1}{r_1^{\;2}} \vec{r}_1$$

cuyas componentes serán

$$\vec{E}_{1x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{q_1}{r_1^{\;2}} \cos\alpha\ \vec{i}$$

en el eje de las X

$$\vec{E}_{1y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{q_1}{r_1^{\;2}} sen\alpha \vec{j}$$

en el eje de las Y

De igual manera el campo eléctrico debido a la carga q_2 , como

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{q_2}{r_2^{\;2}} \vec{r}_2$$

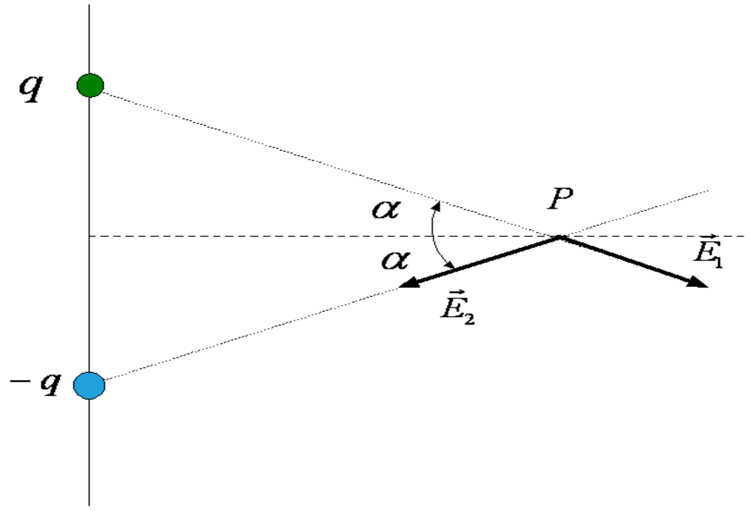
cuyas componentes serán

$$\vec{E}_{2x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{q_2}{r_2^{\;2}} \cos\beta\vec{i}$$ en el eje de las X

$$\vec{E}_{2y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{q_2}{r_2^{\;2}} sen\beta\vec{j}$$ en el eje de las Y

Dipolo eléctrico

Consideremos ahora un caso especial de distribución de cargas, llamado dipolo el eléctrico, donde tenemos dos cargas q de igual valor, pero de signo contrario. Calcularemos el campo eléctrico $\vec{E}$ en la perpendicular bisectriz que une las cargas como se indica en la figura.



$$\vec{E}_T = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$ por simetría en la figura podemos ver que

$$\vec{E}x_T = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}x_i = \vec{E}x_1 + \vec{E}x_2 = 0$$

$$\vec{E}y_T = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}y_i = \vec{E}y_1 + \vec{E}y_2 = 2Ey$$

En consecuencia en campo resultante total es, con dirección del eje Y y apuntando hacia abajo, su magnitud la podemos calcular como

$$Ey = E_1 * \cos\theta$$

$E_T = 2 * Ey = 2E_1 \cos\theta$, donde sabemos que $E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{Q}{x^2}$, donde el valor de $X^2 = a^2 + r^2$, además de la figura podemos ver que: $\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}}$, reemplazando

$$E_T = 2E_1 \cos\theta = 2 * \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{Q}{a^2 + r^2} * \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}} =$$

$$E_T = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{2aQ}{\left(a^2 + r^2\right)^{3/2}}$$

Si consideramos $r >> a$, podemos simplificar la ecuación y queda

$$E_T \cong \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{2aQ}{r^3}$$

llamamos momento del dipolo eléctrico ρ a

$\rho = 2aQ$, de manera tal que la ecuación de campo eléctrico para un dipolo eléctrico para puntos distantes a lo largo de la perpendicular bisectriz queda

$$E_T = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{\rho}{r^3}$$

El dipolo esta constituido por dos cargas iguales y opuestas, colocadas muy cercanas entre si, de tal manera que sus campos separados en puntos alejados casi se anulan, pero no totalmente. Desde este punto de vista vemos que la variación $E_T(r)$ en un dipolo varía proporcionalmente a $E_T(r) \propto 1/r^3$, mientras que para una carga puntual $E_T(r)$ varia más lentamente , puesto que es proporcional a $E_T(r) \propto 1/r^2$

Campo eléctrico producido por una distribución continúa de cargas

En los objetos macroscópicos, como ser las varillas cargadas que vimos anteriormente, la carga es debida a una diferencia entre el número de protones y electrones. Como las cargas tanto del electrón como del protón son muy inferiores a los valores de carga que normalmente encontramos en los objetos macroscópicos, tales cargas macroscópicas están producidas por un gran número de cargas elementales e o electrones ya sea en exceso o en defecto. Por tanto podemos tratar estas cargas macroscópicas como una distribución continua de elementos infinitesimales de carga dq. Si aplicamos la ecuación obtenida para el campo de una carga puntual a uno de estos elementos obtenemos el campo infinitesimal $d\vec{E}$ generado por un elemento infinitesimal de carga dq

$$d\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{dq}{r^2}\,\vec{r}$$

donde r es la distancia del elemento de carga dq al punto P donde evaluamos el campo eléctrico. El campo resultante $\vec{E}_T$ en P se encuentra entonces sumando (es decir integrando) las contribuciones al campo debidas a todos los elementos de carga dq, o sea

$$\vec{E}_T = \int d\vec{E} = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{dq}{r^2}\,\vec{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\,\vec{r}$$

donde los limites de integración están determinados por la extensión de la distribución de carga en el espacio.

Cuando tenemos una distribución volumétrica y continua de carga podemos expresar el elemento infinitesimal de carga dq en función de la densidad de carga. Si la distribución de carga es uniforme, la densidad de carga es el cociente entre la carga total y el volumen que ocupa la misma,

$\rho = \dfrac{Q}{V}$ si la densidad no es uniforme podemos definir $\rho = \dfrac{dQ}{dV}$, donde tomamos elementos volumétricos los suficientemente chicos para considerarlos puntuales, la carga dentro de ese volumen será entonces $dq = \rho * dv$, de tal manera que

$$d\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{dq}{r^2}\vec{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} * \frac{\rho dv}{r^2}\vec{r}$$

El campo resultante debido a toda la distribución se obtiene integrando la expresión anterior

$$\vec{E}_T = \int d\vec{E} = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{\rho dv}{r^2}\vec{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho dv}{r^2}\vec{r}$$

$$\vec{E}_T = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho dv}{r^2}\vec{r}$$

Cuando tenemos ahora una distribución superficial y continua de carga podemos expresar el elemento infinitesimal de carga dq en función de la densidad de carga. Si la distribución de carga es uniforme, la densidad de carga es el cociente entre la carga total y la superficie de la misma, $\gamma = \dfrac{Q}{S}$, donde S es el área de la superficie cargada, si la densidad no es uniforme podemos definir $\gamma = \dfrac{dq}{ds}$, donde tomamos elementos superficiales los suficientemente chicos para considerarlos puntuales, la carga dentro de esa superficie será entonces $dq = \gamma * ds$, de tal manera que

$$d\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} * \frac{\gamma ds}{r^2}\vec{r}$$

integrando obtenemos

$$\vec{E}_T = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\gamma ds}{r^2}\vec{r}$$

De igual manera a los casos anteriores cuando una distribución lineal y continuas de carga podemos expresar el elemento infinitesimal de carga dq en función de la densidad de carga. Si la distribución de carga es uniforme, la densidad de carga es el cociente entre la carga total y la longitud de la misma , $\lambda = \dfrac{Q}{L}$,donde L es el área de la superficie cargada, si la densidad no es uniforme podemos definir $\lambda = \frac{dq}{dl}$, donde tomamos elementos lineales los suficientemente chicos para considerarlos puntuales, la carga dentro de ese volumen será entonces $dq = \lambda * dl$, de tal manera que $d\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} * \frac{\lambda dl}{r^2}\vec{r}$ Al igual que en los casos anteriores, integrando

$$\vec{E}_T = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{\lambda dl}{r^2}\vec{r}$$

Representación del campo eléctrico. Líneas de Fuerza

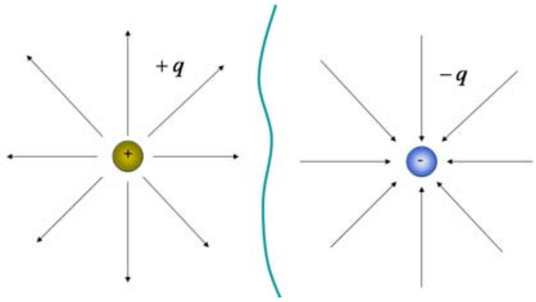
El concepto de campo eléctrico como vector no fue apreciado entre los primeros físicos, de ellos uno de los más importantes fue Michel Faraday (1791 – 1867), quien pensó siempre en función de *líneas de fuerza*. Las líneas de fuerza siguen siendo una manera conveniente de representarse en lamente la forma de los campos eléctricos. Se las usa con este fin, pero en general no se las usa cuantitativamente.

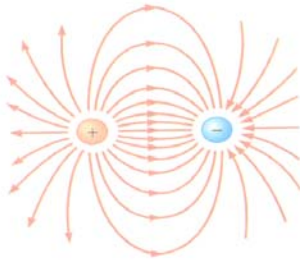
Es posible conseguir una representación gráfica de un campo de fuerzas empleando las llamadas *líneas de fuerza*. Son líneas imaginarias que describen, si los hubiere, los cambios en dirección de las fuerzas al pasar de un punto a otro. En el caso del campo eléctrico, las líneas de fuerza indican las trayectorias que seguirían las partículas positivas si se las abandonase libremente a la influencia de las fuerzas del campo. Le relación entre las líneas de fuerza y el vector intensidad de campo es la siguiente:

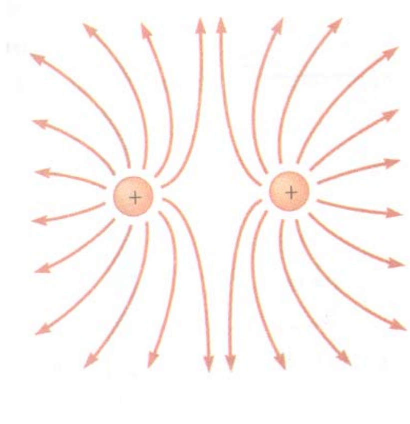
1 - El campo eléctrico será un vector tangente a la línea de fuerza en cualquier punto considerado.

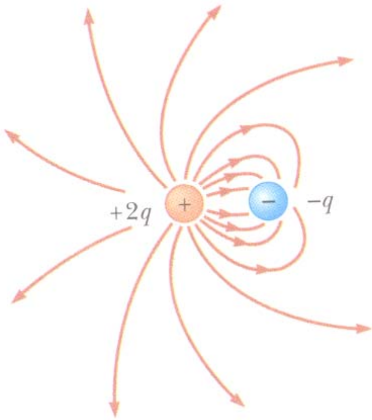
2 – Las líneas de fuerza se dibujan de modo que el número de líneas por unidad de superficie de sección transversal sea proporcional a la magnitud de campo. En donde las líneas están muy cercanas, el campo es grande y en donde están separadas es pequeño.

Una carga puntual positiva dará lugar a un mapa de líneas de fuerza radiales, pues las fuerzas eléctricas actúan siempre en la dirección de la línea que une a las cargas interactuantes, y dirigidas hacia fuera porque las cargas móviles positivas se desplazarían en ese sentido (fuerzas repulsivas). En el caso del campo debido a una carga puntual negativa el mapa de líneas de fuerza sería análogo, pero dirigidas hacia la carga central. Como consecuencia de lo anterior, en el caso de los campos debidos a varias cargas las líneas de fuerza nacen siempre de las cargas positivas y mueren en las negativas. Se dice por ello que las primeras son «manantiales» y las segundas «sumideros» de líneas de fuerza.

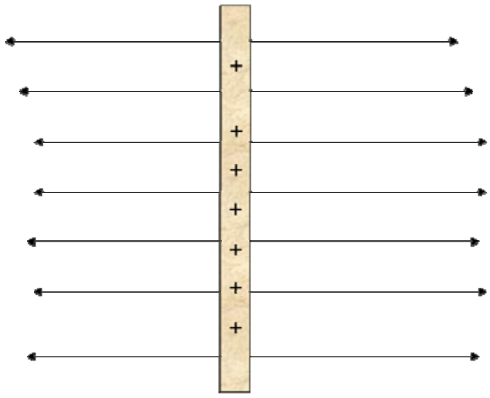








Las líneas de fuerza de una lámina uniforme de carga positiva, de grandes dimensiones uniforme serán igualmente espaciadas, rectas y paralelas



En los dibujos de ejemplo las representamos en 2D, pero podemos imaginarlas en 3D.

Ley de Gauss

Introducción

El campo eléctrico producido por cuerpos cargados estáticos puede obtenerse por medio de dos procedimientos: la ley de Coulomb o mediante la ley de Gauss. La Ley de Gauss se la debemos a Karl F. Gauss (1777-1855), el cual creo muchos de los fundamentos matemáticos de gran parte de la Física Teórica que se desarrollo a finales del siglo XIX y comienzos del siglo XX. Ya hemos visto el método de la ley de Coulomb, veremos ahora la ley de Gauss. La ley de Coulomb es una forma simple y directa de expresar la fuerza eléctrica. Por otro lado la ley de Gauss es más sutil, más elegante y muchas veces más útil, requiere una sofisticación matemática mayor que la Ley de Coulomb. La ley de Gauss se expresa en términos de flujo del campo eléctrico o flujo eléctrico para ello es fundamental entender previamente el concepto de flujo.

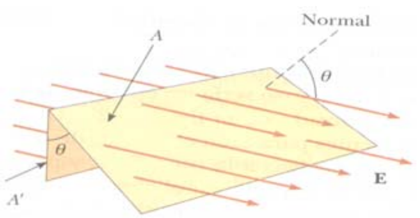
Concepto de Flujo

Este concepto se origina en la Teoría de los Fluidos, donde flujo significa la rapidez con que in fluido pasa a través de una superficie imaginaria.

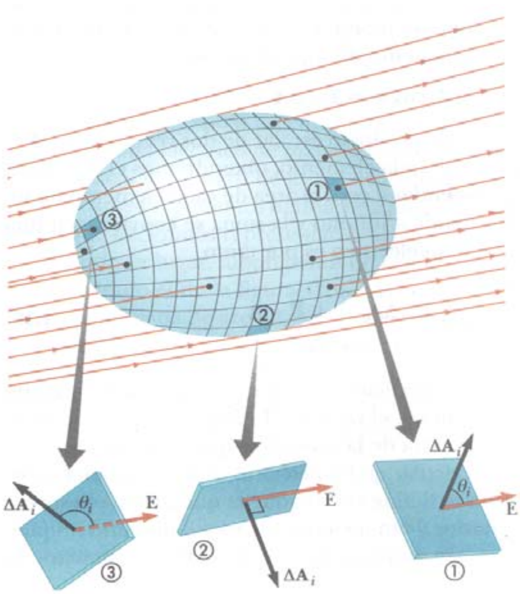
El flujo Φ de un campo vectorial involucra: el campo vectorial y una superficie en la cual el flujo es evaluado. Para obtener el flujo a través de una superficie representamos a la superficie mediante el vector superficie. Para una superficie plana el vector superficie $\vec{\Delta} S$ tendrá un modulo ΔS igual al área de la superficie y como dirección perpendicular a esta superficie paralela al plano determinado por los ejes X e Y, de dimensiones a * b y el flujo de un vector cualquiera por ejemplo $\vec{g}$ (por ejemplo el campo gravitatorio) . El flujo Φ será el producto escalar entre ambos vectores

$\Phi = \vec{g} x \vec{\Delta} S = g * \Delta S * \cos \alpha$ siendo α el ángulo que forman los dos vectores entre si, como en este caso cero grado. El flujo será

$$\Phi = g * \Delta S * \cos \alpha = g * a * b * \cos 0^0 = g * a * b$$



el vector de superficie presenta la ambigüedad den su definición, porque perfectamente podríamos haber tomado el vector que apunta hacia abajo. Como trabajaremos con superficies cerradas, por ejemplo la superficie de una esfera o un cubo, diremos que el vector superficie es por costumbre siempre saliente, es decir apunta siempre hacia fuera de la superficie cerrada.



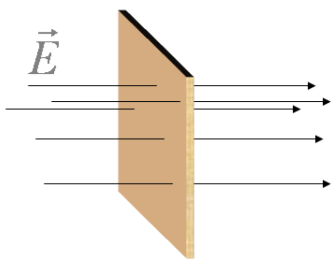
Flujo eléctrico

Definimos entonces el flujo eléctrico como ΦE de un campo eléctrico $\vec{E}$ uniforme a través de una superficie ΔS como:

$\Phi E = \vec{E} x \vec{\Delta S} = E * \Delta S * \cos\alpha$ esto es valido para superficies planas

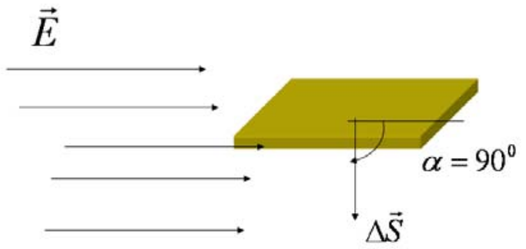
El producto escalar tiene en cuenta la orientación de la superficie con respecto a la dirección del campo, siendo α el ángulo que forman el vector campo eléctrico y el vector de superficie

Ejemplo 1:



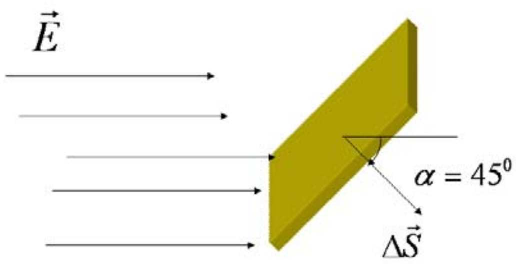
$$\Phi E = \vec{E}x\vec{\Delta}S = E * \Delta S * \cos\alpha = E * \Delta S * \cos 0^0 = E * \Delta$$

Ejemplo 2:



$$\Phi E = \vec{E}x\vec{\Delta}S = E * \Delta S * \cos\alpha = E * \Delta S * \cos 90^0 = 0$$

Ejemplo 3:



$$\Phi E = \vec{E}x\vec{\Delta}S = E * \Delta S * \cos\alpha = E * \Delta S * \cos\theta$$

El flujo eléctrico es una magnitud escalar, y su unidad en el Sistema Internacional es

$$[\Phi E] = \frac{N * m^2}{Coul}$$

Si la superficie es curva o el campo eléctrico varía punto a punto sobre la superficie, el flujo se obtiene dividiendo la superficie en pequeños elementos, tan pequeños que puedan considerarse planos, y que el campo eléctrico no varíe en su superficie. El flujo total será la suma de todas las contribuciones de flujo a través de cada uno de los elementos de superficie. En el limite en que el tamaño de cada elemento se aproxima a cero y el numero de elementos a infinito, la suma se convierte en una integral:

$$\Phi E = \int \vec{E}xd\vec{S}$$

por lo tanto $$\Phi E = \int \vec{E} x d\vec{S} = \int E * \cos \alpha * dS$$

La integral anterior se llama integral de superficie, porque se extiende a toda la superficie considerada. Entonces, el flujo de campo eléctrico a través de una superficie es igual a la integral de superficie de $\vec{E}$ extendida a toda la superficie.

Consideramos el flujo a través de una superficie cerrada, en este caso será

$$\Phi E = \oint \vec{E} x d\vec{S}$$

La superficie cerrada para la cual se calcula el flujo es generalmente imaginaria o hipotética y se la conoce como superficie gaussiana, no corresponde necesariamente a la superficie de un objeto. Cuando usamos la Ley de Gauss podemos diseñar una superficie de cualquier forma y tamaño para usarla como superficie gaussiana. El seleccionar la forma y el tamaño adecuados de una superficie gaussiana es una de las claves principales para la utilización correcta de la Ley de Gauss.

Enunciado de la ley de Gauss

La *ley de Gauss* puede ser enunciada de la siguiente manera*: el flujo eléctrico* ΦE *a través de una superficie cerrada arbitraria es igual a la carga neta encerrada por la superficie dividida por* ε_0. Expresada matemáticamente:

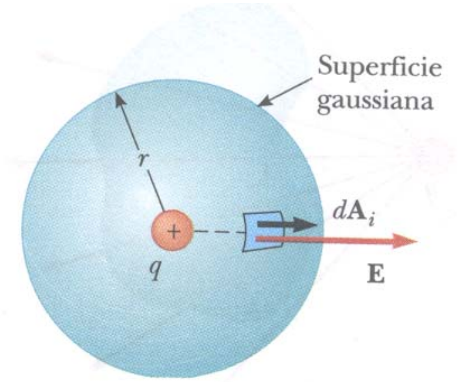
$$\Phi E = \frac{\sum q}{\varepsilon_0}$$ ó $$\oint \vec{E} x d\vec{S} = \frac{\sum q}{\varepsilon_0}$$

donde la superficie cerrada (superficie gaussiana) puede tener cualquier forma y tamaño y el termino $\sum q$ representa la carga neta contenida en el volumen que encierra la superficie. Si no hay ninguna carga dentro de la superficie gaussiana se puede prever que ΦE será igual a cero. Lo que tenemos que tener presente es que la carga neta, tomando en cuenta su signo algebraico tiene que ser cero. Si una superficie gaussiana encierra cargas iguales y opuestas, el flujo ΦE es cero. Las cargas que estén fuera de la superficie no intervienen para nada en el valor de q, ni tampoco intervine el lugar exacto donde se encuentren las cargas dentro de la superficie.

La ley de Gauss se puede aplicar para evaluar a $\vec{E}$, si la distribución de cargas es lo suficientemente simétrica para que se pueda evaluar fácilmente la integral. De igual manera si $\vec{E}$ se conoce para todos los puntos de una superficie cerrada se puede usar para calcular la carga interior. Si $\vec{E}$ tiene una componente hacia afuera para cada punto de la superficie cerrada, se deduce que debe haber una carga positiva neta dentro de la superficie cerrada. Si $\vec{E}$ tiene una componente hacia adentro para cada punto de la superficie cerrada, se deduce que debe haber una carga negativa neta dentro de la superficie cerrada.

Ley de Gauss y la Ley de Coulomb

La ley de Coulomb se puede deducir de la Ley de Gauss y de ciertas condiciones de simetría. Apliquemos la Ley de Gauss a una carga punto aislada q como la que vemos en la figura



Aun cuando la ley de Gauss es válida para una superficie cualquiera, la información puede obtenerse sencillamente si consideramos una superficie esférica de radio r con centro en la carga. La ventaja de esta superficie que, por simetría, $\vec{E}$ debe ser normal a ella y tener la misma magnitud en todo los puntos de la superficie. En la figura tanto $\vec{E}$, como $d\vec{S}$ están dirigidos radialmente hacia fuera, el ángulo entre ellos es cero, entonces

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} x d\vec{S} = \varepsilon_0 \oint E dS \cos\theta = \varepsilon_0 \oint E dS \cos 0^0 = \varepsilon_0 \oint E dS = q$$

como $\vec{E}$ es constante para todos los puntos de la esfera, puede salir de la integral, quedando

$\varepsilon_0 E \oint dS = q$ donde la integral es el área de la esfera $S = 4\pi r^2$

$\varepsilon_0 E\left(4\pi r^2\right) = q$ de donde despejando

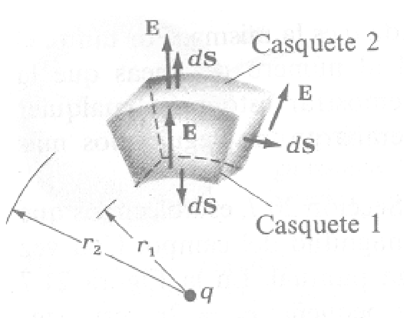
$\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \dfrac{q}{r^2}$ La dirección de campo $\vec{E}$ ya se la conoce por simetría. Si ahora colocamos una carga q_0 a una distancia r, la magnitud de la fuerza $\vec{F}$ que obra sobre ella es:

$F = Eq_0$, reemplazando nos queda

$F = Eq_0 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \dfrac{qq_0}{r^2}$ que es la expresión de la ley de Coulomb. Así hemos deducido la ley de Coulomb de la Ley de Gauss. La ley de Gauss es una de las ecuaciones fundamentales de la teoría electromagnética.

Flujo a través de una superficie arbitraria debido a una partícula cargada exterior

Consideremos el flujo para la superficie gaussiana en forma de bloque redondeado que vemos en la figura



El campo eléctrico esta creado por una partícula cargada exterior al bloque, y la superficie cerrada esta formada por dos casquetes esféricos con centro en la partícula y cuatro planos laterales alineados radialmente con la partícula.

De este forma el flujo $\Phi\vec{E}_L$, a través de las cuatro paredes laterales es nulo porque $\vec{E}$,

es perpendicular a $d\vec{S}$ en todos los puntos, el flujo $\Phi\vec{E}i$ a través del casquete interior es negativo (suponiendo que la carga exterior es positiva) , ya que la dirección de $\vec{E}$ es opuesta a la de $d\vec{S}$ en todos los puntos de este casquete, es decir

$$\Phi E = \int \vec{E}xd\vec{S} = \int E * \cos 180^0 * dS = -\int \vec{E}dS$$

, como $\vec{E}$ es el mismo para todos los puntos de esta superficie y vale

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{q}{r_1^2}$$

, por lo tanto

$$\Phi Ei = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\int dS = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2} * \Delta S_i$$

donde ΔS_i es el área del casquete interior.

De la misma manera calculamos el flujo a través del casquete exterior, quedando

$$\Phi Ee = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_e^2}\int dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_e^2} * \Delta S_e$$

, pero en este caso positivo, ya que la dirección de $\vec{E}$ es la misma que la de $d\vec{S}$ en todos los puntos de este casquete.

Como los dos casquetes están limitados por los mismos planos radiales, la relación entre sus áreas es igual a la relación entre el cuadrado entre sus radios, es decir

$$\frac{\Delta s_e}{\Delta s_i} = \frac{r_e^2}{r_i^2}$$ o sea $$\Delta S_e = \frac{r_e^2}{r_i^2}\Delta S_i$$ reemplazando

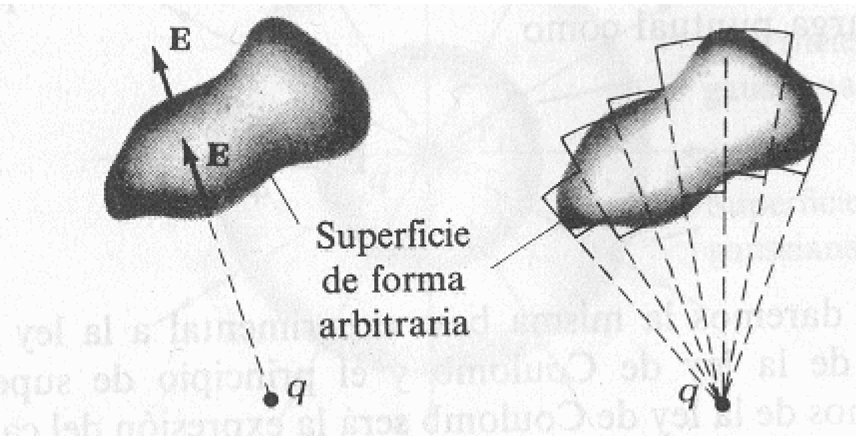
$$\Phi Ee = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_e^2} * \Delta S_e = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_e^2} * \frac{r_e^2}{r_i^2}\Delta S_i = -\Phi E_i$$

Por lo tanto el flujo total para la superficie cerrada es

$$\Phi E_T = \Phi Ei + \Phi E_L + \Phi Ee = \Phi Ei + 0 - \Phi Ei = \Phi Ei - \Phi Ei = 0$$

El flujo neto es cero, ya que el flujo que atraviesa el casquete interior es el que también atraviesa el casquete exterior, pero cambiado de signo

Podemos generalizar diciendo: *Una superficie de cualquier forma puede ser construida con un numero infinito de casquetes esféricos y lados planos radiales de tamaño infinitesimal*, como se ve el la figura

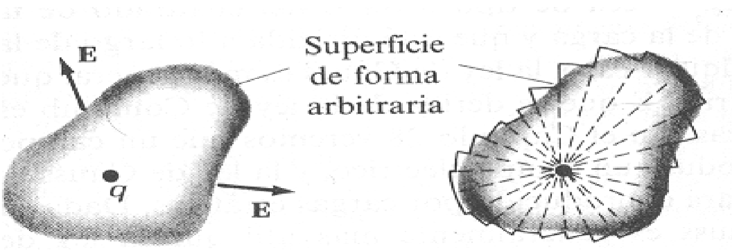


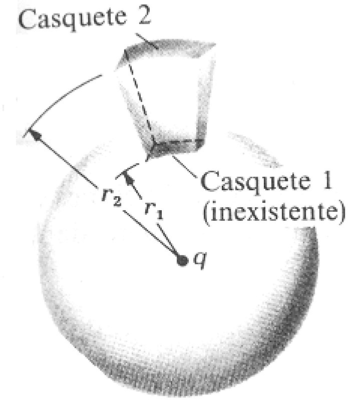
Puede verse que la superficie se la puede reproducir totalmente por medio de un número infinito de casquetes cada uno de ellos de tamaño infinitesimal. Como hemos visto el flujo a través de un casquete, cuando la carga es exterior al mismo es nulo, el flujo a través de cualquier forma arbitraria debido a una carga externa al volumen encerrado por ella, es cero

$$\Phi E_T = 0$$

Flujo a través de una superficie arbitraria debido a una partícula cargada interior

Consideremos ahora el flujo debido a una carga puntual **q** situada en el centro de una superficie gaussiana esférica de radio **r**





En este caso tendremos

$$\Phi E = \oint \vec{E} x d\vec{S} = \oint EdS\cos 0^0 = \oint EdS = E\oint dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Sabiendo que

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} * \frac{q}{r^2}$$ reemplazando

$$\Phi E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} * 4\pi\varepsilon_0 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

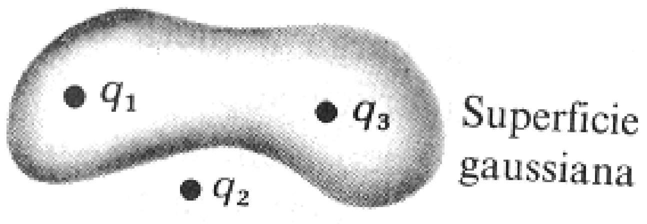
Como el valor de ΦE es independiente del radio de la esfera, el flujo será el mismo para una esfera de cualquier radio.

Por otra parte, cualquier superficie de forma arbitraria puede obtenerse como límite de un número infinito de casquetes esféricos y planes radiales infinitesimales, entonces podemos afirmar que el flujo eléctrico a través de una superficie gaussiana de forma arbitraria debido a una partícula cargada encerrada en su interior será siempre:

$$\Phi E = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Flujo a través de una superficie arbitraria debido a varias partículas cargadas tanto interiores como exteriores

Consideramos el flujo eléctrico debido a más de una partícula, como nuestra la figura



Por el principio de superposición, el campo eléctrico será la suma vectorial de las contribuciones individuales de cada campo

$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$ y por lo tanto el flujo será

$$\Phi E = \oint \vec{E} x d\vec{S} = \oint \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3\right) x d\vec{S}$$

Como la integral de una suma es la suma de las integrales

$$\Phi E = \oint \vec{E}_1 x d\vec{S} + \oint \vec{E}_2 x d\vec{S} + \oint \vec{E}_3 x d\vec{S}$$

Como las cargas q_1 y q_3, están dentro de la superficie y la carga q_2 fuera de la superficie

$$\Phi E = \frac{q_1}{\varepsilon_0} + 0 + \frac{q_3}{\varepsilon_0}$$

generalizando, podemos afirmar

$$\Phi E = \oint \vec{E} x d\vec{S} = \sum_i \frac{q_i}{\varepsilon_0}$$

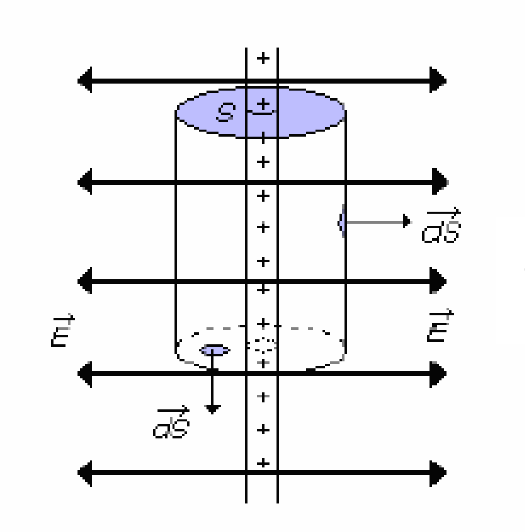
con lo cual llegamos a la Ley de Gauss

Aplicaciones de la Ley de Gauss

Veamos algunos ejemplos de la aplicación de la Ley de Gauss para obtener el campo eléctrico

Campo debido a una distribución lineal de carga

Buscaremos calcular el campo eléctrico $\vec{E}$ cerca de un alambre, largo y recto, uniformemente cargado con una distribución lineal de carga λ, en un punto P, lejano a sus extremos Consideremos una superficie gaussiana cilíndrica de longitud L coaxial con el cable cargado, y que la densidad lineal es $\lambda = \frac{q}{L}$. El campo eléctrico es radial, como se ve en la figura



$$\Phi E = \oint \vec{E}\ x d\vec{S} = \oint_{Sup.Lateral} \vec{E} x d\vec{S} + 2\oint_{Sup.Tapas} \vec{E} x d\vec{S}$$

$$\Phi E = \oint \vec{E}\ x d\vec{S} = \oint_{Sup.Lateral} EdS \cos 0^0 + 2\oint_{Sup.Tapas} EdS \cos 90^0$$

como el campo eléctrico $\vec{E}$ es constante

$$\Phi E = E \oint_{Sup.Lateral} dS + 0 = E * 2\pi r L$$

Por la Ley de Gauss tenemos que

$$\Phi E = \frac{\sum q}{\varepsilon_0} = E * 2\pi r L = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

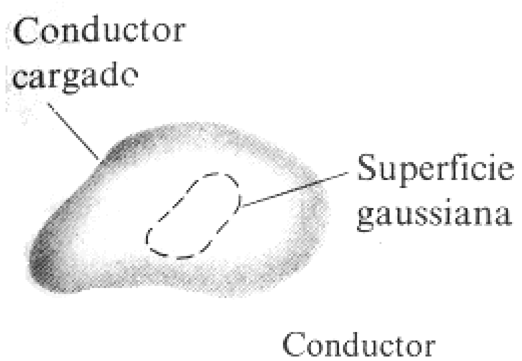
de donde despejando $\vec{E}$ tenemos que

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} * \frac{\lambda}{r}$$

Propiedades electroestáticas de un conductor

En electrostática $\vec{E} = 0$ es dentro del conductor. Esto se debe ser así por dos motivos, por un lado la electroestática estudia los efectos producidos por cargas en estacionarias y cuando un conductor contiene portadores de carga que se mueven dentro de si solo cuando existe un campo eléctrico en su interior, en nuestro caso analizamos la situación donde los portadores de carga no se estén moviendo

Dado que $\vec{E} = 0$ dentro de los conductores podemos utilizar la Ley de Gauss para determinar donde se aloja el exceso de carga en un conductor, en la figura vemos un conductor con una superficie gaussiana totalmente dentro de él,

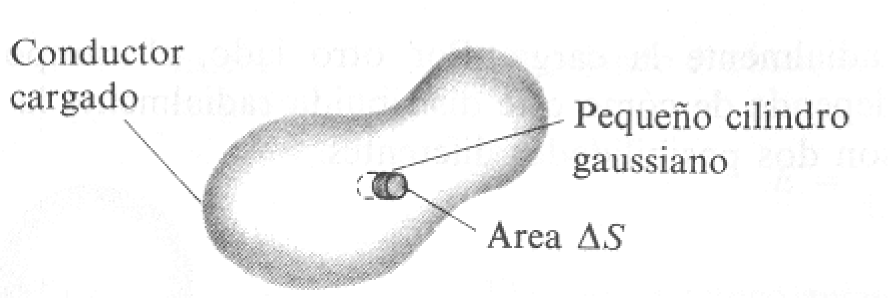


Conductor con una superficie gaussiana completamente dentro.

como $\vec{E} = 0$ en todas las partes dentro del conductor $\Phi_E = 0$ para toda la superficie y por lo tanto la ley de Gauss requiere que la carga neta también sea cero . Esto será cierto para cualquier superficie por grande que sea siempre que este contenida dentro del conductor. Esto quiere decir que no puede haber exceso de carga en ningún punto interior del conductor: la densidad de carga volumétrica ρ debe ser cero para cualquier parte del conductor. Si la carga neta no puede estar dentro del conductor ¿Dónde se ubican las cargas?. En la superficie, y distribuidas de manera que en el interior del conductor el campo eléctrico se anule. En general la densidad superficial de carga de un conductor variará con la posición en su superficie. Un conductor neutro, puede tener carga superficial positiva en una zona de su superficie y negativa en otro, de manera que la carga total neta sea cero..

En la zona exterior inmediata a la superficie el campo eléctrico debe ser perpendicular a ella, dado que si tuviera una componente tangencial, la misma provocaría que las cargas superficiales se moviesen en respuesta a la fuerza tangencial resultante. Por tanto, en un conductor en equilibrio en su superficie el campo es perpendicular. La dirección del campo será hacia fuera si las cargas superficiales son positivas, caso contrario, hacia adentro.

Podemos calcular el valor del campo eléctrico utilizando la ley de Gauss tomando como superficie gaussiana una pequeña pastilla cilíndrica de caras paralelas a la superficie, esta superficie debe ser lo suficientemente pequeña como para que podamos despreciar las variaciones de $\vec{E}$ y de la curvatura. Como vemos en la figura:



En la cara paralela interior al conductor el campo es nulo, en la superficie lateral el campo es tangente a la misma, o sea que $\vec{E}$ es perpendicular a $d\vec{S}$ en todos los puntos y solo habrá flujo en la cara paralela externa. Podemos escribir:

$$\Phi E = \oint \vec{E} \; x d\vec{S} = \oint_{Sup.Lateral} \vec{E} x d\vec{S} + \oint_{Sup.T.\mathrm{int}} \vec{E} d\vec{S} + \oint_{Sup.T.ext.} \vec{E} d\vec{S} =$$

$$\Phi E = 0 + 0 + \oint_{Sup.T.ext.} \vec{E} d\vec{S} = \oint_{Sup.T.ext.} E dS \cos 0^0 = E \Delta S$$

Como toda la carga encerrada esta en la superficie

$\sum q = \gamma * \Delta S$ siendo γ distribución superficial de carga, siendo aplicando la Ley de Gauss nos queda

$$\Phi E = E \Delta S = \frac{\sum q}{\varepsilon_0}$$

reemplazando $E \Delta S = \dfrac{\gamma \Delta S}{\varepsilon_0}$ de donde $E = \dfrac{\gamma}{\varepsilon_0}$

Movimiento de partículas cargadas en campos eléctricos uniformes

Supongamos tener un campo eléctrico, y dentro del espacio afectado por el mismo colocamos una partícula cargada, de acuerdo a lo visto sobre esta partícula actuará una fuerza eléctrica $\vec{F}_e$, la cual será igual a $\vec{F}_e = q\vec{E}$, suponiendo que la fuerza eléctrica sea la única que afecte considerablemente a la partícula entonces aplicando la segunda Ley de Newton será:

$\vec{F}_e = q\vec{E} = m\vec{a}$ de donde $\vec{a} = {q\vec{E}}/{m}$ consideramos dos casos,

Primer caso: Una partícula que esta inicialmente en reposo en un campo uniforme, en este caso se moverá con una aceleración constante a lo largo de una línea paralela al campo eléctrico $\vec{E}$, para analizar el movimiento consideramos a el campo eléctrico $\vec{E}$ paralelo a el eje X, será entonces:

La aceleración de la partícula $a_x = \dfrac{qE}{m}$

La velocidad $v_x = a_x * t = \frac{qE}{m} * t$ La trayectoria $X = \frac{1}{2} v_x * t = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} * t^2$

Si expresamos la velocidad en función de la trayectoria nos queda

$$v_x^{\ 2} = \frac{2qE}{m} * X$$

Segundo caso: Una partícula que esta inicialmente con velocidad inicia v_0 entrando en una región de campo uniforme $\vec{E}$, en este caso se moverá con un movimiento similar al del tiro horizontal, para analizar el movimiento consideramos velocidad inicia v_0 paralela al eje X y al campo eléctrico $\vec{E}$ paralelo a el eje Y, será entonces:

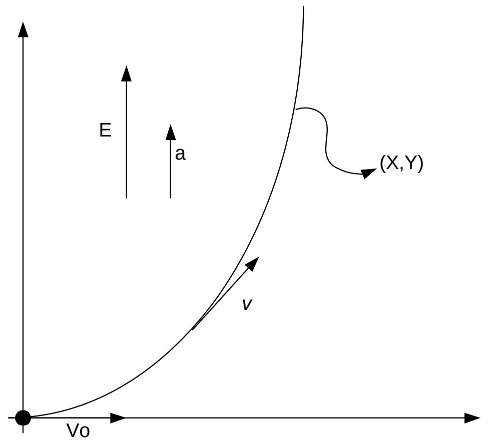
$$a_y = \frac{qE}{m} \qquad a_x = 0 \qquad a_z = 0$$

$$v_y = a_y * t = \frac{qE}{m} * t \qquad v_x = v_0 \qquad v_z = 0$$

$$Y = \frac{1}{2} v_y * t = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} * t^2 \qquad X = v_0 * t \qquad Z = 0$$

El movimiento esta contenido en el plano XY, para obtener la ecuación de la trayectoria parabólica será:

$$Y = \frac{1}{2} \frac{qE}{m_0^2} * X^2$$


E
a
(X,Y)
v
Vo