Tema II – Potencial eléctrico - Capacidad

Integral curvilínea del campo eléctrico. Circulación. Diferencia de potencial, potencial y función potencial. Superficies y Líneas equipotenciales. Unidades. Gradiente de la función potencial. Potencial debido a distribuciones discretas y continuas de cargas eléctricas. Potencial y Campo de un dipolo. Osciloscopio de rayos catódicos.

Capacidad y capacitores. Capacitores planos, cilíndricos y esféricos. Cálculos de sus Capacidades. Asociación de capacitores en serie y en paralelo. Energía almacenada en un Capacitor. Densidad de energía. Dieléctrico. Polarización eléctrica. Desplazamiento. Relación entre los vectores E, P y D.

Índice

Introducción

Hasta ahora vimos que el efecto de una distribución e cargas puede describirse usando el concepto de campo eléctrico producido por esa distribución. El campo eléctrico $\vec{E}$ esta definido por la fuerza eléctrica, $\vec{F}_e$, por unidad de carga y como la fuerza es un vector, el campo también lo es .

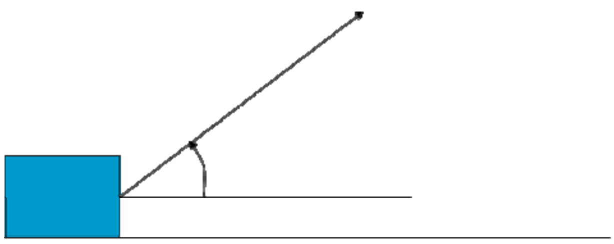
Vamos a introducir otro tipo de campo llamado ***potencial eléctrico o potencial***, definimos el potencial V como la energía potencial por unidad de carga, y como la energía es un escalar , el potencial también lo será. Debido a que V es un escalar, muchas veces en la técnica es recomendable el uso de V, en lugar de $\vec{E}$. A partir de uno siempre se puede obtener el otro. La relación entre $\vec{E}$ y V es análoga a la que existe entre una fuerzo conservativa y la energía potencial que lleva asociada.

Sistemas conservativos

Al igual que en el estudio de la mecánico, resulta útil con frecuencia razonar en términos del trabajo realizado por las fuerzas eléctricas, y además el concepto de energía potencial constituye una importante ayuda para entender el comportamiento de las cargas eléctricas.

La integral de línea o integral sobre una trayectoria o camino representa un concepto muy importante en temas relacionados con el trabajo que realiza una fuerza.

En la figura siguiente vemos que el trabajo se puede calcular como:



$$dW = F\cos\alpha dl$$

$$W = \int_A^B F\cos\alpha dl$$

en el cual el camino recorrido va desde el punta A hasta el punto B, en forma vectorial queda

$$W = \int_A^B \vec{F} x \alpha d\vec{l}$$

la integral en el caso del trabajo se debe hacer a lo largo de toda la trayectoria. Las integrales de línea y los conceptos de trabajo son muy importantes cuando se trabaja con sistemas *conservativos.* Se dice que un campo es conservativo porque el conserva se conserva la energía asociada con la posición. Así el trabajo que es necesario para mover un cuerpo es independiente del camino seguido y además podemos recuperar toda la energía invertida permitiendo que el cuerpo vuelva al punto de partida. Esta energía almacenada en virtud de la posición, se llama *energía potencial.*

El requisito para que un sistema sea conservativo es precisamente que la energía potencial de un cuerpo en el campo quede definida exclusivamente por su posición. Este requisito se cumple si el trabajo exterior para mover un cuerpo de un punto a otro es independiente del camino seguido entre dos puntos. Solo con esta condición será único el trabajo necesario para llevar el cuerpo de una posición determinada desde un punto de referencia y por lo tanto solo en este caso quedará la energía potencial definida unívocamente.

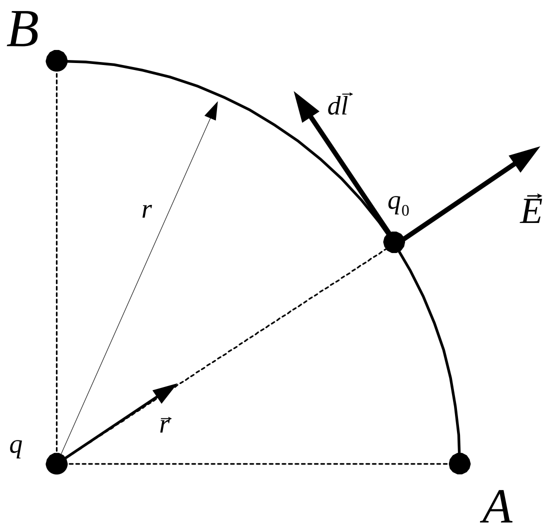
Vamos a ver que cualquier posible distribución espacial de campo eléctrico debido a cargas en reposo, constituye un campo conservativo

Energía potencial eléctrica

Teniendo en cuenta que el potencial eléctrico es la energía potencial eléctrica por unidad de carga, antes de analizar el potencial eléctrico, desarrollemos las expresiones para la energía potencial eléctrica, partimos de dos bases: el campo eléctrico producido por una carga puntual y el principio de superposición.

Energía potencial de una partícula de prueba en el campo de una carga puntual.

Consideramos el trabajo realizado por la fuerza eléctrica cuando una partícula de prueba con carga q_0 se mueve en el campo creado por otra carga puntual q, el camino es un arco centrado en la carga puntual desde el punto A hasta el punto B



La fuerza eléctrica que actúa sobre la partícula de prueba es:

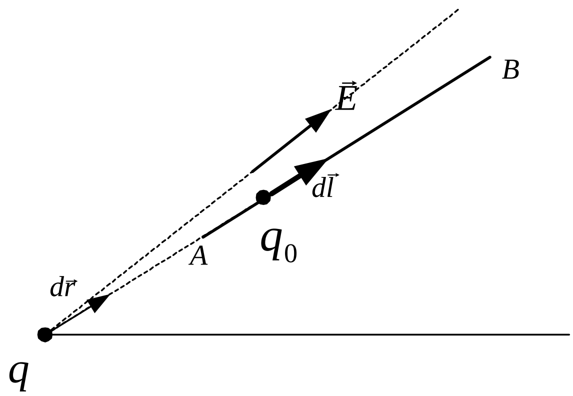
$$\vec{F} = q_0\vec{E}$$

$$W = \int_A^B \vec{F} x d\vec{l} = q_0 \int_A^B \vec{E} x d\vec{l}$$

$$W = q_0 \int_A^B E dl \cos 90^0 = 0$$

el trabajo realizado es nulo, para cualquier recorrido circular centrado en la carga puntual

Veamos ahora una situación similar a la anterior, pero la carga sigue un camino radial entre el punto A y el punto B



La fuerza eléctrica que actúa sobre la partícula de prueba es:

$$\vec{F} = q_0\vec{E}$$

$$W = \int_A^B \vec{F} x d\vec{l} = q_0 \int_A^B \vec{E} x d\vec{l}$$

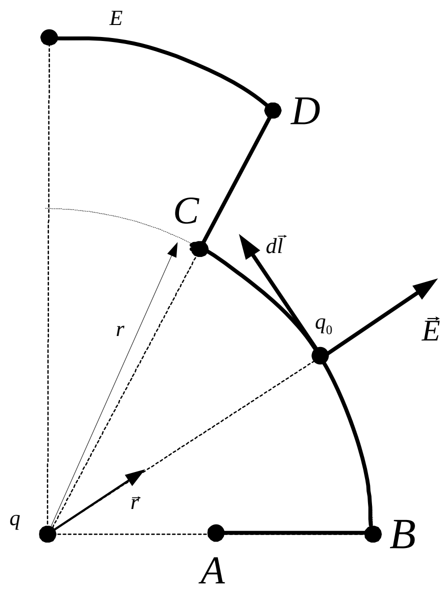
como $d\vec{l} = \vec{r} d\vec{r}$

$$W = q_0 \int_{r_a}^{r_b} \vec{E}\vec{r} d\vec{r} \cos 0^0 =$$

$$q_0 \int_{r_a}^{r_b} E r dr =$$

$$W = q_0 \int_{r_a}^{r_b} \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{r} \right) d\vec{r} = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0} \int$$

Analizamos una tercera situación, que es una combinación de los dos casos anteriores, según se ve el la figura:



La partícula de prueba se mueve ahora a lo larg del camino ABCD, el camino es un arco de círcu en AB, es radial en BC y finalmente es otro arco círculo en CD.

Por lo tanto el trabajo realizado por la fuerza eléctrica será:

$$W = \int_A^D \vec{F} x d\vec{l} = q_0 \int_A^D \vec{E} x d\vec{l} =$$

$$W = q_0 \int_{r_a}^{r_b} \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{r} \right) d\vec{r} + 0 + q_0 \int_{r_c}^{r_d} \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{r} \right) d\vec{r} + 0$$

$$W = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) + 0 + \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_c} - \frac{1}{r_d} \right)$$ como $r_b = r_c$ se anulan y queda:

$$W = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_d} \right)$$

Cualquier camino de forma arbitraria puede ser descompuesto en una superposición sucesiva de pequeños tramos radiales más tramos de arcos circulares centrados en la carga. De manera tal que cuando la partícula se mueva de un punto A hasta un punto B, a lo largo de un camino de forma arbitraria, el trabajo realizado por la fuerza eléctrica en los trozos infinitesimales de arco es cero y el trabajo total es la suma de las contribuciones de los tramos radiales infinitesimales.

La idea de energía potencial, como forma de energía asociada a la posición de los cuerpos, está presente también en los campos eléctricos. Así, una carga q negativa situada en un punto P a una distancia r de otra carga central positiva Q acumula en esa posición una cierta energía potencial, energía que podría liberarse si se dejara en libertad, ya que se desplazaría hacia Q por efecto de la fuerza atractiva. Situarla de nuevo en la posición inicial supondría la realización de un trabajo en contra de la fuerza atractiva ejercida por Q. Este trabajo exterior a las fuerzas del campo se invierte precisamente en aumentar su energía potencial Ep y puede escribirse en la forma

Esto nos dice que el trabajo realizado por la fuerza eléctrica para llevar una carga desde hasta solo depende de los extremos de la trayectoria*. Por tanto fuerza eléctrica es conservativa, y la variación de la energía potencial eléctrica entre los puntos y es igual al trabajo realizado por la fuerza, cambiado de signo.*

$$U_b - U_a = -\int_a^b \vec{F} x d\vec{l} = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right)$$

Teniendo presente que solo podemos hablar de variaciones de energía potencial, es conveniente seleccionar una posición para la cual definamos como de energía potencial cero. De esta forma podemos definir la energía potencial de un punto, vemos entonces

$U_b - U_a = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right)$, que podemos escribir como $U(r)$

$U(r) = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ esto es definir como $U(r) = 0$, para $r \to \infty$.

$$U(\infty) = 0$$

Es decir tomamos la energía potencial igual a cero cuando las partículas están tan separadas, que los efectos eléctricos de una sobre la otra son despreciables. Podemos escribir el potencial de una articula entonces como

$$U(r) = -\int_\infty^b \vec{F} x d\vec{l}$$

Decimos entonces que $U(r)$*, es el trabajo realizado por un agente externo contra la fuerza eléctrica cuando una partícula de prueba se lleva desde un punto muy lejano hasta un punto separado una distancia* r *de la carga puntual*

Energía potencial de una partícula de prueba en el campo de varias cargas puntuales.

Supongamos que la partícula de prueba se encuentra en el campo creado por dos cargas puntuales q_1 y q_2. Por el principio de superposición, la fuerza eléctrica que actúa sobre la partícula de prueba será:

$\vec{F} = q_0 x\vec{E} = q_0 x\left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2\right)$, donde $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ son las contribuciones al campo debidas a q_1 y q_2 .. Cuando la partícula de prueba se mueve entre los dos puntos a y b, el trabajo realizado por la fuerza eléctrica $\vec{F}$ será:

$$\int_a^b \vec{F} x d\vec{l} = \int_a^b q_0 \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2\right) x d\vec{l} = q_0 \left[\int_a^b \vec{E}_1 x d\vec{l} + \int_a^b \vec{E}_2 x d\vec{l}\right]$$

Es decir el trabajo puede ser dividido en dos sumas, ambas independientes del camino recorrido entre a y b, al igual que para una carga puntual $U(\infty) = 0$,

$U = \dfrac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{q_1}{r_1} + \dfrac{q_2}{r_2}\right)$ donde r_1 y r_2, son las distancias entre la partícula de prueba y las cargas puntuales q_1 y q_2, respectivamente.

Ampliando este resultado para el caso de tener n cargas puntuales la energía potencial será :

$U = \dfrac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\sum_{n=1}^{i}\dfrac{q_i}{r_i}$ donde r_i son las distancias entre la partícula de prueba y las cargas puntuales q_i, respectivamente.

Potencial eléctrico

Hemos visto que la energía potencial eléctrica es proporcional a la carga q_0, para poder independizarnos, dividimos la expresión de U por la carga q_0, y obtenemos una cantidad que llamaremos por definición *potencial eléctrico* (V), es decir

$V = \frac{U}{q_0}$, el igual que hemos visto para el campo eléctrico $\vec{E}$, el potencial V, es un campo porque posee un valor para cada punto del espacio. Como U es un valor escalar, entonces V, también es escalar. La carga q_0 de la partícula de prueba utilizada para medir el potencial debe ser pequeña ya que de lo contrario su presencia podría alterar la distribución de cargas que produce el potencial, con lo cual cambiaría el potencial que queremos medir.

Unidades de potencial eléctrico

La unidad es el *voltio* o *volts , definido como:*

$$[volts] = \frac{[joule]}{[coulomb]}$$

Potencial producido por partículas cargadas.

El potencial producido en un punto por una distribución de partículas cargadas será

$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{n=1}^{i} \frac{q_i}{r_i}$, para el caso más simple cuando tenemos una sola carga

será $V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

Potencial producido por una distribución continúas de carga.

De las ecuaciones para el potencial producido por partículas cargadas, podemos ver

$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=1}^{i}\frac{q_i}{r_i}$, si tenemos ahora una distribución continua de cargas a estas las podemos considerar como un numero infinito de cargas infinitesimales, y el potencial total vendrá dado por la suma de los potenciales debido de cada una de estas infinitas cargas infinitesimales, es decir por :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lim\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i}$$

y cuando $N \to \infty$ y $qi \to 0$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r}$$

Diferencia de potencial

Nuestra definición de potencial se baso en la posición de referencia que escogimos para le energía potencial, $U(r) = 0$, para $r \to \infty$, es decir para puntos muy alejados de la distribución de cargas el potencial V vale cero. Una posición particular de referencia siempre queda determinada por conveniencia, para los circuitos eléctricos será la que llamamos *masa o tierra*, pero tenemos que tener presente que solo tiene significado físico un cambio de energía potencial y consecuentemente sólo un cambio en potencial o diferencia de potencial.

La diferencia de potencial a partir de la diferencia de energía potencial para una partícula cargada con q_0 , cuando se mueve entre los puntas a y b será:

$$V_b - V_a = \frac{U_b - U_a}{q_0}$$

dado que la diferencia de energía potencial es, con signo cambiado, el trabajo realizado por la fuerza eléctrica en ese desplazamiento, nos queda:

$$U_b - U_a = -q_0 \int_a^b \vec{E} x d\vec{l}$$

reemplazando

$$V_b - V_a = \frac{U_b - U_a}{q_0} = -\frac{q_0}{q_0} \int_a^b \vec{E} x d\vec{l} = -\int_a^b \vec{E} x d\vec{l}$$

$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E} x d\vec{l}$ Como la fuerza eléctrica es conservativa, se puede usar cualquier camino entre los puntos a y b.

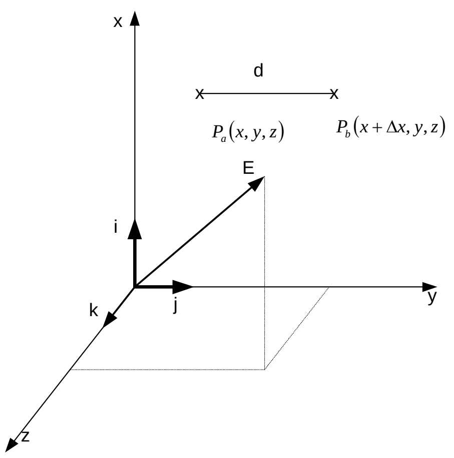
Relación entre el campo eléctrico y la diferencia de potencial.

Como hemos visto $V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E} x d\vec{l}$, si elegimos ahora

$a \to \infty \Rightarrow V_a = V_\infty = 0$, y $b \equiv P \Rightarrow V_b = V(P) = V$

nos queda $V = -\int_\infty^P \vec{E} x d\vec{l}$, en consecuencia conociendo el valor de $\vec{E}$, podemos conocer el valor de V .

Veamos ahora como analizar el caso inverso, es decir conocido V , encontrar el valor de $\vec{E}$, supongamos que calculamos la diferencia de potencial entre dos puntos próximos $Pa(x, y, z)$ y $Pb(x + \Delta x, y, z)$, como se ve en la figura



$$V(x,y,z)-V(x+\Delta x,y,z)=-\int_{x}^{x+\Delta x}\vec{E}xd\vec{l}$$ pero

$$\vec{E}xd\vec{l}=\left(E_x\vec{i}+E_y\vec{j}+\vec{E}_z\vec{k}\right)xdx\vec{i}=\vec{E}_x dx$$

cuando $\Delta x \to 0 \Rightarrow E_x = cte$ entonces

$$V(x,y,z)-V(x+\Delta x,y,z)=-\int_{x}^{x+\Delta x}E_x x \cong -E_x\Delta x$$

$$\frac{V(x,y,z)-V(x+\Delta x,y,z)}{\Delta x}\cong -E_x$$ para $\Delta x \to 0$

$$\lim\frac{V(x,y,z)-V(x+\Delta x,y,z)}{\Delta x}=-E_x$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}=-E_x$$ realizando el mismo análisis para los otros ejes, será

$$\frac{\partial V}{\partial y}=-E_y \qquad\qquad \frac{\partial V}{\partial z}=-E_z$$

Encontramos así que la componentes de $\vec{E}$ están dadas por las derivadas parciales cambiadas de signo. Si conocemos la expresión de V para una distribución de cargas, podemos conocer el campo eléctrico $\vec{E}$ a través de estas ecuaciones. Matemáticamente estas ecuaciones definen la función gradiente, por lo que escribimos:

$$\vec{E}=\vec{\nabla}V$$

Vemos el caso particular de una distribución de cargas que posee simetría esférica, V dependerá únicamente de la coordenada radial r, y el campo eléctrico $\vec{E}$ tendrá solamente radial E_r, dada por

$$E_r = -\frac{dV}{dr}$$

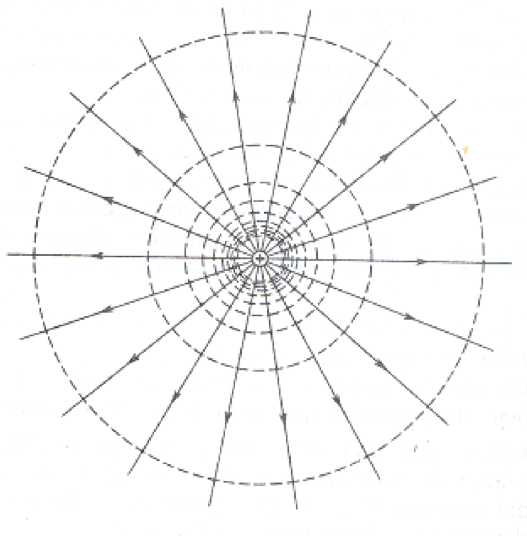
para el caso de la carga puntual será

$$E_r = -\frac{dV}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d}{dr}\frac{1}{r} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r^2}\right) =$$

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Superficies equipotenciales

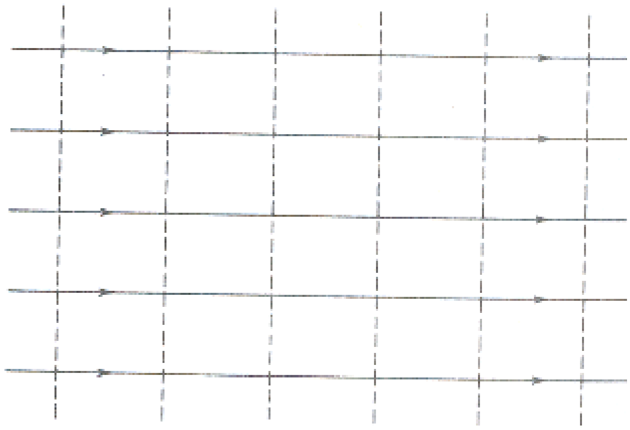
Una superficie equipotencial es aquella en la que el potencial es constante, decir tiene el mismo valor para todos sus puntos. Debido a esto, cuando partícula se mueve a lo largo de una superficie equipotencial las fuerzas eléctricas no realizan trabajo alguno. Al igual que las líneas de campo sirven para visualizar el campo, las superficies equipotenciales son útiles para visualizar el comportamiento espacial del potencial.



La figura muestra las superficies equipotenciales y las líneas de campo en el exterior de una esfera uniformemente cargada. Ya vimos que

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$ de forma que V es constante si r es constante, y las superficies equipotenciales son superficies esféricas concéntricas con la esfera carga.

Sabemos ya que en un campos uniforme las superficies equipotenciales son planos paralelos entre si y perpendiculares a la dirección del campo



Esta figura nos muestra el corte de placas plano-paralelas cargadas donde el campo E es uniforme, junto con las líneas de campo y las superficies equipotenciales entre las placas.

En las figuras anteriores las líneas de campo son perpendiculares a superficies equipotenciales que cruzan. Esto debe ocurrir siempre, porque si tuvieran una componente tangencial a una de las superficies equipotenciales cuando una partícula cargada se moviese sobre dicha superficie la fuerza eléctrica realizaría un trabajo, y por tanto $\vec{E}$ no puede tener una componente tangencial una superficie equipotencial. En cada punto $\vec{E}$ debe ser perpendicular a la correspondiente superficie equipotencial.

En un dibujo donde se mantenga igual la diferencia de potencial entre superficies equipotenciales sucesivas, su espaciado indicara el valor de $\vec{E}$. Las superficies estarán mas juntas en las regiones donde $\vec{E}$ sea mayor, de igual manera que las curvas de nivel en un mapa indican una pendiente mas pronunciada cuando están mas juntas. En la primera figura el espaciado entre líneas equipotenciales aumenta conforme crece r debido a que el campo $\vec{E}$ disminuye al aumentar r. En segunda figura las superficies están igualmente espaciadas porque $\vec{E}$ es uniforme, en este caso , V varia linealmente en la dirección perpendicular a las placas. Como $-E_x = \dfrac{\partial V}{\partial x}$, la dirección de $\vec{E}$ es opuesta a la dirección en que V aumenta.

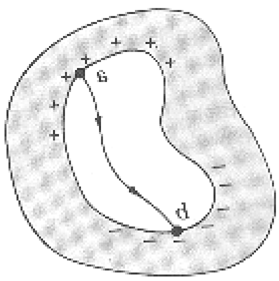
Otras propiedades electroestáticas de los conductores

Ya vimos que $\vec{E} = 0$ en el interior de un conductor condiciones estáticas. También vimos que, como consecuencia de lo anterior, los puntos del interior de un conductor no puede haber un exceso de carga. La carga en exceso que posea un conductor se colocara en su superficie. Obtuvimos, además que el campo eléctrico justamente fuera de la superficie de conductor tiene la dirección perpendicular a la superficie, y su valor es

$$\vec{E} = E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Dado que $\vec{E} = 0$ en el interior de un conductor, en la región del espacio, ocupada por un conductor el potencial debe ser uniforme. Para probar esto, aplicaremos la ecuación de la definición de potencial a eléctrico a dos puntos a y b interiores a un conductor:

$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E} x d\vec{l}$$



Para resolver esta integral de línea tomaremos un camino de integración comprendido completamente dentro del conductor, de forma que $\vec{E} = 0$ en todos sus puntos y por tanto la integral es cero, con lo que

$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E} x d\vec{l} = 0 \Rightarrow V_a = V_b$$

. Esto será cierto para cualquier par de puntos interiores al conductor, por lo que concluimos que todos los puntos del interior de un conductor tienen el mismo potencial. En particular resulta útil tener siempre presente que la superficie de un conductor en equilibrio es una superficie equipotencial.

Hasta ahora hemos hablado del potencial en un punto del espacio, pero como todos los puntos de un conductor están al mismo potencial, asignaremos un único valor de potencial al conductor completo, siempre que se encuentre en condiciones electrostáticas.
Por el contrario, no se puede asignar un único valor de potencial a un aislante, ya que éste puede ser distinto en diferentes puntos de su interior y de su superficie.

No sólo es cierto que el campo es cero y el potencial uniforme en el interior de un conductor, sino que esto también es válido para una cavidad en el interior de un conductor, siempre que no existan objetos cargados dentro de ésta.

De estas consideraciones se pude deducir que una región del espacio puede mantenerse libre de campo eléctrico rodeándola con un conductor. Este procedimiento se conoce como electrostático *apantallamiento electrostático.*

Supongamos que deseamos dotar a un conductor de una carga muy grande, y por tanto de un potencial muy alto, veamos que es lo que determina la máxima carga y el máximo potencial que puede adquirir un conductor, consideremos que un conductor esta rodeado por un medio aislante, por ejemplo el aire. La propiedad del medio que tiene importancia en este caso se llama *límite dieléctrico.* El límite dieléctrico de un material aislante es el máximo valor de campo eléctrico, $E_{\max}$, que puede existir en ese material sin que se produzca su ruptura dieléctrica. Cuando ocurre la ruptura dieléctrica de un material, las moléculas que lo forman se ionizan y el material comienza a conducir. En un material gaseoso como el aire este efecto va acompañado de una emisión luminosa, debida a la recombinación de los electrones con las moléculas, fenómeno conocido como *corona de descarga.*

Por simetría es fácil entender que en un conductor esférico la carga se distribuya uniformemente por la superficie, pero si el conductor no es esférico la densidad superficial σ tiende a ser mayor en aquellos puntos donde la superficie tiene un menor radio de curvatura, y lo mismo sucede con el campo eléctrico justamente fuera de la superficie. En particular σ puede llegar a tener un valor muy grande en la punta de una varilla metálica en forma de aguja, como la punta de un pararrayos.

Capacidad y Capacitores - Introducción

El condesandor es uno de los diferentes dispositivos que se utilizan en los circuitos eléctricos y electrónicos. La función principal de los condensadores es proporcionar un almacenamiento temporal de energía en los circuitos. Están hechos para almacenar y ceder energía eléctrica de acuerdo con las necesidades de cada circuito*. La propiedad que caracteriza las posibilidades de almacenamiento de energía de un condensador es su capacidad eléctrica.*

Cuando se almacena energía en un condensador aparece un campo eléctrico en su interior. Esta energía almacenada puede asociarse al campo eléctrico. De hecho todo campo eléctrico lleva asociada una energía. El estudio de los condensadores y la capacidad nos acerca a un importante aspecto de los campos eléctricos: *la energía de un campo eléctrico.*

Este estudio también nos servirá de base para aprender algunas propiedades de los aislantes. Debido a su comportamiento en el seno de campos eléctricos, los aislantes se denominan frecuentemente *dieléctricos.*

Los condensadores son aparatos muy útiles, de gran interés a físicos e ingenieros. Por ejemplo, algunos conceptos que queremos resaltar:

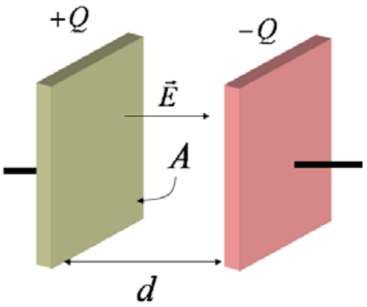
1. Debemos tener presente la importancia de los *campos* para entender los fenómenos naturales. Se puede usar un condensador para establecer configuraciones de campo eléctrico deseadas con diversas finalidades. Por ejemplo cuando describíamos la desviación de un haz de electrones en un campo uniforme producida por dos placas planas paralelas, realmente esto era un condensador, aun cuando no usamos tal vocablo en momento. Más adelante veremos el comportamiento de materiales dieléctricos colocados dentro de un campo eléctrico (proporcionado en forma conveniente por un condensador) y veremos cómo se pueden generalizar las leyes del electromagnetismo para tomar más fácilmente en cuenta la presencia de cuerpos dieléctricos.
2. Un segundo concepto importante a tener siempre presente es el de la energía. Al analizar un condensador cargado demostraremos que puede considerarse que la energía eléctrica está almacenada en el campo eléctrico entre las placas, y, de hecho, que está almacenada en cualquier campo eléctrico, cualquiera que sea la forma como se genere. Debido a que los condensadores pueden confinar fuertes campos eléctricos en pequeños volúmenes, pueden servir como dispositivos útiles para almacenar energía.

3. La edad electrónica no podría existir sin los condensadores. usan, junto con otros aparatos, para reducir fluctuaciones de voltaje en fuentes de poder electrónicas, para transmitir señales pulsantes, para generar oscilaciones electromagnéticas en radiofrecuencia y para lograr -retardos de tiempo. En la mayoría de estas aplicaciones, la diferencia de potencial entre las placas no es constante, como hasta ahora hemos supuesto, sino que varía el tiempo, a menudo en forma sinusoidal o en forma de pulsaciones.

CONDENSADORES Y CAPACIDAD

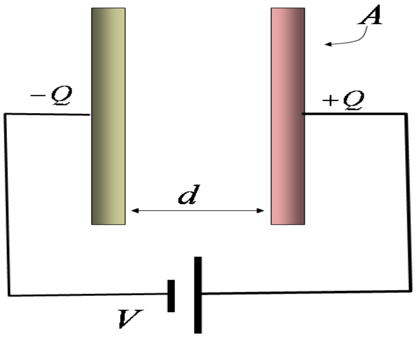
Un condensador es un dispositivo formado por dos conductores cercanos y aislados entre sí. Independientemente de su forma cada uno de los conductores es denominado «placa» del condensador.

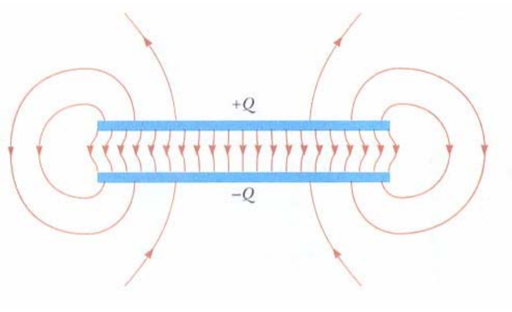
En la figura siguiente vemos un condensador de placas plano-paralelas, se observan, en la misma, los alambres conductores que salen de cada una de las placas, y que se usan para conectar las placas del condensador a otros componentes de los circuitos. En el caso más sencillo podemos decir que dos conductores aislados con cargas iguales y opuestas forman un condensador



En su funcionamiento normal, las dos placas poseen el mismo valor de carga pero de signos contrarios. La carga está distribuida de manera superficial, en su mayor parte sobre las superficies que se encuentran enfrentadas.

Un condensador puede ser cargado conectando los alambres de sus placas a los terminales de una batería, como en el siguiente esquema





Dejaremos el funcionamiento de una batería para más adelante (ya que por ahora lo único que necesitamos saber es que cuando se conecta una batería a un condensador, los portadores de carga se mueven de una placa a la otra. Si la batería permanece conectada hasta que se establece el equilibrio, es decir hasta que cesa el flujo de portadores de carga, la diferencia de potencial V entre las placas del condensador es la misma que entre los terminales de la batería.

En el equilibrio, la batería habrá transferido una carga positiva $+Q$ a la placa conectada al terminal positivo y una carga $-Q$ a la placa conectada al terminal negativo. Las placas poseerán cargas iguales pero de signos contrarios, por lo que la carga neta del condensador será cero. Cuando hablemos de la carga Q de un condensador nos referiremos al valor de la carga en cada una de sus placas y no a la carga neta en el conjunto.

Analizando la relación entre la diferencia de potencial V y la carga Q que adquieren sus placas se puede llegar a la conclusión de que la relación $\frac{Q}{V}$ es una característica de cada condensador: cuando aumentamos V en cierto factor, Q aumenta en el mismo factor. Llamaremos a este cociente *capacidad* C de un condensador:

$$C = \frac{Q}{V}$$

Por convenio todas las magnitudes de esta ecuación se toman positivas, Q el valor de la carga en cada placa y V la diferencia de potencial entre ellas. Por lo tanto la capacidad C será siempre positiva.

La palabra capacidad utilizada para C nos indica que se trata de algo que condensador contiene o puede contener, un condensador contiene cargas de signos opuestos en sus placas. La capacidad de un condensador es la medida de sus posibilidades para almacenar estas cargas. De la ecuación vemos que cuanto mayor es la capacidad de un condensador mayor es la carga que puede almacenar para el mismo valor de diferencia de potencial. Veremos que un condensad también almacena energía.

Unidades

Por su definición, las dimensiones de capacidad son carga dividido por potencial, y la unidad en el Sistema Internacional será el culombio dividido por voltio, a esta unidad se le dado el nombre de faradio (F) en honor de Mitchell Faraday. Un faradio una unidad de capacidad bastante grande, de forma que los condensadores que usualmente se encuentran en los circuitos tienen capacidades mucho menores.

$$[C] = \frac{[Q]}{[V]} = \frac{[coulomb]}{[volts]} = [Faradio]$$

Las unidades más comunes en la técnica son:

$$\mu F = 10^{-6} F$$

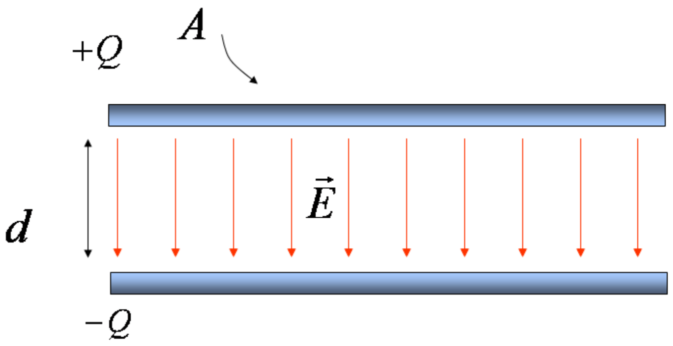
$$\eta F = 10^{-9} F$$

$$pF = 10^{-12} F$$

Calculo de capacidades

Condensador de placas planas paralelas

La figura siguiente muestra un condensador de placas paralelas formado por dos placas conductoras paralelas de área A separadas una distancia d .



Si conectamos cada placa a la terminal de una batería aparecerá una carga $+q$ en una placa y una carga $-q$ en la otra. Si d es pequeña, comparada con las dimensiones de la placa, la intensidad del campo eléctrico $\vec{E}$ será uniforme, lo cual quiere decir que las líneas de fuerza serán paralelas y uniformemente espaciadas. Las leyes del electromagnetismo, requieren que haya algunas "deformaciones" de las líneas en los bordes de las placas, pero si la d es suficientemente pequeña, para el objeto que ahora perseguimos, se pueden pasar por alto tales deformaciones.

Podemos calcular la capacitancia de este dispositivo aplicando la ley de Gauss. Nuestra figura muestra una superficie gaussiana de forma de cilindro de altura h cerrada con tapas planas de área A que tienen la forma y tamaño de las placas del condensador. El flujo de $\vec{E}$ es cero para la parte de la superficie gaussiana que está dentro de la placa superior del condensador porque el campo eléctrico dentro de un conductor que tiene carga estática es cero. El flujo de $\vec{E}$ a través de la pared del cilindro es cero porque, si no se toman en cuenta las irregularidades de las líneas de fuerza en los bordes, se puede aceptar que $\vec{E}$ queda por completo en la pared del cilindro.

Así pues, sólo queda la cara de la superficie gaussiana que está entre las placas. En ella $\vec{E}$ es constante y el flujo Φ_E es simplemente $\Phi_E = EA$

La ley de Gauss da $\Phi_E = EA = \dfrac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow q = \varepsilon_0 EA$

El trabajo requerido para llevar una carga de prueba q_0 de una placa a la otra puede expresarse calcularse de

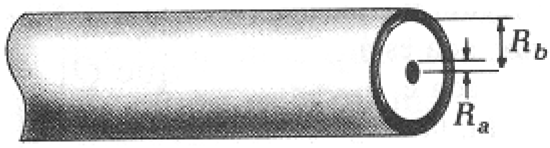
$V = -\int \vec{E} d\vec{l}$ siendo V la diferencia de potencial entre las placas. La integral puede tomarse siguiendo cualquier trayectoria que comience en una placa y termine en la otra porque cada placa es un cuerpo equipotencial y la fuerza electrostática es independiente de la trayectoria. Aun cuando la trayectoria más sencilla entre las placas es una línea recta perpendicular a ellas, es válida cualquiera que sea la trayectoria de integración que se escoja, queda en nuestro caso

$V = -\int \vec{E} d\vec{l} = Ed$, para calcular la capacidad sabemos que

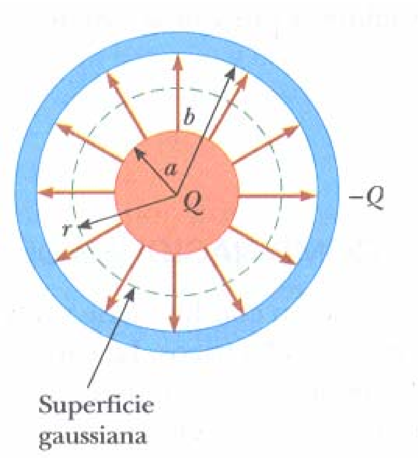
$C = \dfrac{q}{V} = \dfrac{\varepsilon_0 EA}{Ed} = \dfrac{\varepsilon_0 A}{d}$ esta ecuación es válida sólo para condensadores del tipo de placas paralelas; para condensadores de diferente geometría se aplican fórmulas diferentes.

Condensador cilíndrico.

Un condensador cilíndrico consiste de dos cilindros coaxiales de radios a y b , de longitud l . Dentro de esta clasificación podemos hablar de los cables coaxiales que se usan comúnmente para señales eléctricas, siendo su capacidad una de sus principales características. Este cable está formado por un conductor rodeado por un cilindro también conductor con un material aislante entre ambos. Un condensador con este diseño se llama condensador cilíndrico



longitud del cable es en general mucho mayor que su radio . Queremos determinar la capacidad de un trozo de longitud l de cable coaxial. Suponemos que o entre alambre y cilindro está vacío, además consideramos que $l >> R_b$ de modo que se pueden pasar por alto las irregularidades de las líneas de fuerza en los extremos al calcular la capacitancia.



Una sección transversal de un condensador cilíndrico. El circulo dibujado línea interrumpida es una superficie gaussiana cilíndrica de radio r longitud l

De la ley de Gauss tenemos:

$$q = \varepsilon_0 \oint \vec{E} d\vec{S} \Rightarrow q = \varepsilon_0 E(2\pi r l),$$

esto se debe a que el flujo eléctrico es ta totalmente a través de las superficies cilíndricas y no a través de las tapas externas, despejando el valor del campo eléctrico queda:

$$E = \frac{q}{\varepsilon_0 (2\pi r l)}$$

la diferencia de potencial entre las placas la podemos calcular mediante

$$V = -\int_a^b \vec{E} d\vec{l}$$

, en la figura vemos que $\vec{E}$ y dl o dr, apuntan en direcciones opuestas es decir que nos queda

$$V = -\int_a^b \vec{E} d\vec{l} = \int_{r_a}^{r_b} E dr = \int_{r_a}^{r_b} \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l} \frac{1}{r} dr = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l} \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{r} dr =$$

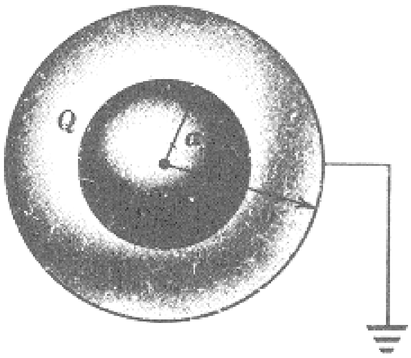
$$V = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l} \ln \frac{r_b}{r_a}$$

Reemplazando en la ecuación de capacidad

$$C = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l} \ln \frac{r_b}{r_a}} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln \frac{r_b}{r_a}}$$

Vemos que al igual que para el condensador de placas paralelas su capacidad solo depende de factores geométricos.

Condensador cilíndrico.



La figura nuestra un condensador esférico, constituido por dos esferas, una interior de radio a y otra exterior b, ambas cargadas con una carga q

Solo existe campo en la región entre las esferas y la diferencia de potencial la obtenemos integrando

$$V = -\int_a^b \vec{E} d\vec{l}$$

nos queda

$$V = -\int_a^b \vec{E} d\vec{l} = \int_{r_a}^{r_b} E dr = \int_{r_a}^{r_b} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{r^2} dr =$$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

Reemplazado en la ecuación de la capacidad

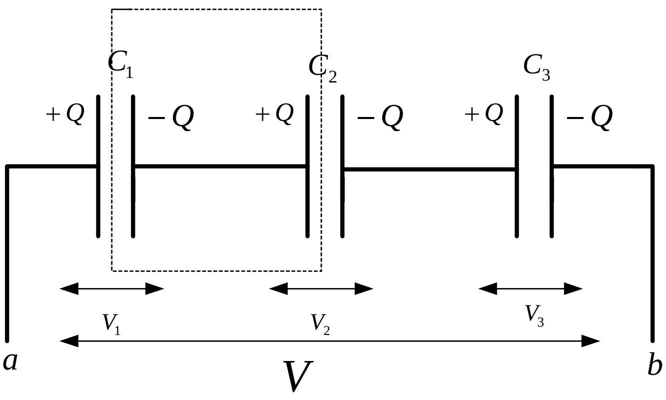
$$C = \frac{q}{V} = \frac{q}{\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_a} - \dfrac{1}{r_b}\right)} = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{r_a r_b}{r_b - r_a}\right)$$

Condensadores en serie y en paralelo

Los componentes de los circuitos pueden ser conectados de muy diferentes formas; las más simples de éstas son las conexiones en serie y en paralelo. Se dice que un capacitor es el equivalente a un conjunto de capacitores si podemos verificar que el capacitor equivalente puede reemplazar al conjunto de capacitores si alteraciones en el resto del circuito, es decir si tuviésemos encerrados al conjunto de capacitores dentro de una caja no podríamos determinar mirándola desde el exterior si adentro tenemos un circuito completo o un capacitor equivalente del mismo

Condensadores en serie.

La figura siguiente nos muestra tres condensadores de capacidades C_1 , C_2 y C_3 conectados en serie, es decir uno tras otro.



Para los condensadores conectados como se nuestra la magnitud de la carga en cada placa debe ser la misma. Así debe ser porque la carga neta en la parte del circuito encerrada por línea de puntos debe ser cero, esto es la carga existentes en estas placas es inicialmente cero y al conectar una batería entre los puntos a y b, sólo da lugar a una separación de cargas , la carga neta entre esas placas sigue siendo cero.

De la ecuación de definición de capacidad $C = \frac{q}{V} \Rightarrow V = \frac{q}{C}$, aplicando esta ecuación a cada condensador tenemos entonces:

$$V_1 = \frac{q}{C_1} \qquad V_2 = \frac{q}{C_2} \qquad V_3 = \frac{q}{C_3}$$

La diferencia de potencial total será la suma de las diferencias de potencial sobre cada condensador $V = V_1 + V_2 + V_3$ reemplazando

$V = V_1 + V_2 + V_3 = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)$, la capacidad equivalente será

$$C_{eq} = \frac{q}{V} = \frac{1}{\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)} \Rightarrow$$

$\frac{1}{C_{eq}} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)$, generalizando podemos decir, que para n condensadores conectados en serie se cumple que:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_n}$$

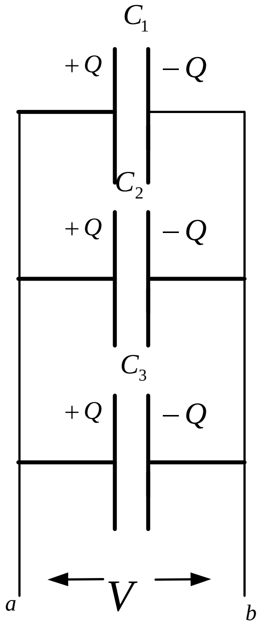
> La capacidad equivalente en serie es siempre menor que la más pequeña de las capacidades de la conexión.

Condensadores en paralelo

La figura siguiente nos muestra tres condensadores de capacidades C_1, C_2 y C_3 conectados en paralelo, es decir todos tienen en sus bornes la misma diferencia de potencial V, estos es así ya que todas las placas de la izquierda están conectadas al mismo punto a y los de la derecha al punto b. Aplicando la ecuación de la definición de capacidad tenemos $C = \frac{q}{V} \Rightarrow q = CV$, será entonces en cada condensador

$q_1 = C_1 V \qquad\qquad q_2 = C_2 V \qquad\qquad q_3 = C_3 V$,

la carga total del conjunto de condensadores será $q_T = q_1 + q_2 + q_3$



$$q_T = q_1 + q_2 + q_3 = C_1 V + C_2 V + C_3 V$$

$$q_T = V\left(C_1 + C_2 + C_3\right)$$

La capacidad equivalente la definimos como

$$C_{eq} = \frac{q_T}{V} \Rightarrow C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3$$

Generalizando podemos decir, que para n condensadores conectados en paralelo se cumple que:

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^{n} C_n$$

Energía eléctrica en un condensador

Cuando se carga un condensador con una batería, la batería realiza un trabajo al transportar portadores de carga desde una placa hasta la otra, elevando así la energía potencial de los portadores. Este aumento de la energía potencial de los portadores constituye la energía eléctrica almacenada en un condensador, esta energía U es igual al trabajo W que fue necesario para cargarlo

Si en el instante t ha pasado una carga $q'(t)$ de una placa a otra. La diferencia de potencial $V(t)$, en ese momento será $V(t) = \dfrac{q'(t)}{C}$

Si se le comunica un pequeño incremento de carga extra $dq'(t)$, la cantidad adicional de trabajo para ello será

$dW = Vdq = \frac{q'}{C} dq'$, si se continua este proceso hasta comunicar una carga total q el trabajo total será

$W = \int dW = \int_0^Q Vdq = \int_0^Q \frac{q'}{C} dq' = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$, es decir la energía almacenada por un condensador es entonces

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Cargar un condensador es similar a cavar un pozo o un agujero hondo en el suelo; es más fácil cavar el principio que el final, ya que la tierra sacada al principio no debe ser levantada tanto como la del final. De igual forma el aumento en energía potencial de los primeros portadores transferidos por la batería es menor que la de los últimos portadores, pues la diferencia de potencial en el condensador es mayor cuando los últimos son transferidos. Esto explica la variación de $V'(t)$ conforme se realiza el trasvase de carga, y es la razón física de que $V'(t)$, no pueda sacarse fuera de la integral.

Usando la definición de capacidad, podemos expresar la energía de un condensador cargado en función de cualquiera de las tres magnitudes V , Q y C

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \qquad U = \frac{CV^2}{2} \qquad U = \frac{QV}{2}$$

Densidad de energía de un campo eléctrico.

Vimos anteriormente que se puede asociar la energía de un condensador con la energía potencial de sus cargas, un punto de vista alternativo es atribuir esta energía al campo eléctrico que existe entre las placas. Para un condensador de placas plano-paralelas (con placas de gran superficie y pequeña separación entre ellas), vimos que se cumple que

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$ y además $V = Ed$ entonces reemplazando en

$$U = \frac{CV^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_0 A}{d}\right)(Ed)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 (Ad)$$

El factor Ad es el volumen que hay entre las placas, que corresponde con el volumen ocupado por el campo eléctrico E (despreciando los efectos de borde). Como la energía es proporcional al volumen ocupado por el campo, podemos obtener la densidad de energía (o energía por unidad de volumen) u en el espacio que ocupa el campo:

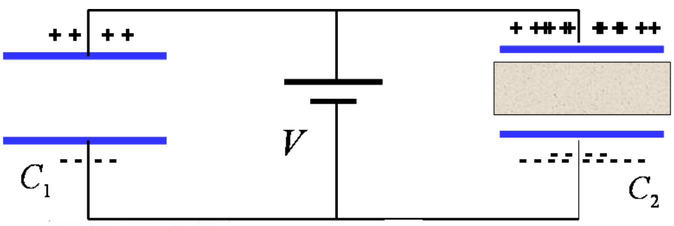
$$u = \frac{U}{Ad} = \frac{\frac{\varepsilon_0 E^2 Ad}{2}}{Ad} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E$$ o sea $$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E$$

Esta ecuación es algo más que otra forma de expresar la energía de un condensador cargado, sugiere que podemos atribuir la energía eléctrica de una distribución de carga al campo eléctrico E producido por la distribución. Aunque no lo probaremos aquí, esta ecuación es válida en general, y nos da la densidad de energía que hay en cualquier punto del espacio debido al campo eléctrico E que existe en dicho punto, cualquiera que sea la distribución de carga que lo produzca. La densidad de energía eléctrica es un ejemplo de campo escalar.

Condensador de placas paralelas con dieléctrico

La ecuación $C = \frac{Q}{V}$ es válida solamente para un condensador de paralelas las cuales estén en el vacío. Michael Faraday, en fue el primero que investigó el efecto de llenar el espacio en placas con un dieléctrico, digamos mica o aceite, actualmente podríamos decir plásticos.

Faraday construyo dos condensadores idénticos, en uno de los cuales colocó un dieléctrico, y en el otro condensador lo dejó con aire a la presión normal. Cuando ambos condensadores se cargaron hasta obtenerse la misma diferencia de potencial, Faraday encontró experimentalmente que la carga en el que contenía el dieléctrico era mayor que la carga en el otro, según vemos en la figura

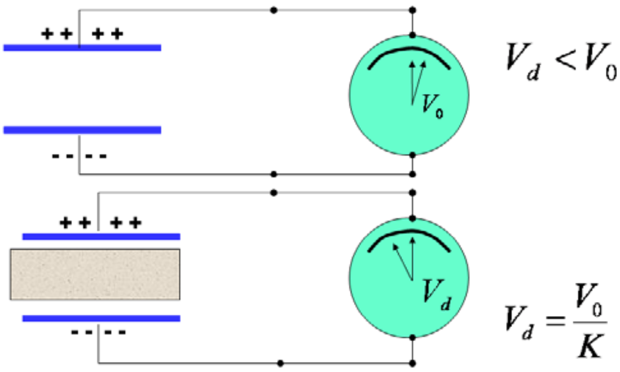


Faraday midió las cargas relativas sobre las placas de los dos condensadores haciendo contacto con una bola metálica (provista de un mango aislador) con las placas, muestreando así la carga cuantitativamente.

Puso entonces esta bola en una balanza de torsión de Coulomb y midió la fuerza eléctrica de repulsión sobre una segunda carga (patrón) montada en el brazo de la balanza.

Ya que para la misma V, la carga q es mayor, cuando hay un dieléctrico, se deduce de la relación $C = \frac{Q}{V}$ que la capacitancia de un condensador aumenta si se coloca un dieléctrico entre las placas. La relación de la capacitancia con el dieléctrico a la capacitancia sin él se llama la *constante dieléctrica* K del material

En vez de conservar los dos condensadores a la misma diferencia de potencial, podemos aplicarles la misma carga, como se ilustra en la figura.



El experimento muestra entonces que la diferencia de potencial V_d entre las placas del condensador de la derecha es menor que la del condensador de la izquierda V_0, en un factor $\frac{1}{K}$ o sea $V_d = \frac{V_0}{K}$

Llegamos una vez más a la conclusión, a partir de la relación $C = \frac{Q}{V}$, de que el efecto del dieléctrico es aumentar la capacidad en un factor .Vemos, en la siguiente tabla los valores de algunos dieléctricos.

Material	Constante dieléctrica	Resistencia dieléctrica
Vacío	1	∞
Aire	1.00054	0.8
Agua	78	-
Papel	3.5	14
Mica	5.4	160
Dióxido de titanio	100	6
Titanato de estroncio	250	8
Titanato de estroncio y bario	10^4	-

Resistencia dieléctrica: es el máximo gradiente de potencial que puede existir en el dieléctrico sin se rompa eléctricamente.

Para un condensador de placas paralelas podemos entonces escribir, como resultado experimental,

$$C = \frac{K\varepsilon_0 A}{d}$$

La ecuación $C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$ ya vista es un caso especial de esta relación que se obtiene poner $K = 1$ y que corresponde al caso de vacío entre las placas. Los experimentos ponen de manifiesto que la capacitancia de todos los tipos de condensadores aumenta en un factor K si el espacio entre las placas se llena con un dieléctrico. Así pues, la capacitancia de cualquier condensador puede escribirse así:

$$C = K\varepsilon_0 L$$

Epresión en la cual L depende de la geometría y tiene las dimensiones de una longitud. Para un condensador de placas paralelas será $L = Ad$; para un condensador cilíndrico

$$L = \frac{2\pi l}{\ln \frac{r_b}{r_a}}$$

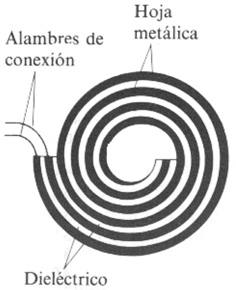
Vemos que ocurre con la energía eléctrica que almacena el dieléctrico, hemos visto que $V_d = \frac{V_0}{K}$, entonces como $V = \frac{2U}{Q}$, podemos hacer

$$K = \frac{V_0}{V_d} = \frac{\frac{2U_0}{Q}}{\frac{2U_d}{Q}} = \frac{U_0}{U}$$ o sea $$U = \frac{U_0}{K}$$

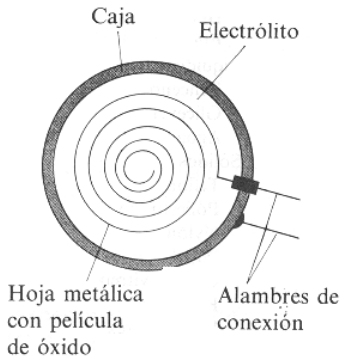
Le energía del condensador se reduce en un factor $\frac{1}{K}$ al insertar el dieléctrico. Como U se reduce a medida que el dieléctrico es introducido, aparece una fuerza que tiende a meter el dieléctrico entre las placas.

Existen varios factores a la hora de escoger un dieléctrico para construir un condensador útil, en primer lugar dado que C es proporcional a K, es preferible una constante dieléctrica alta para que conseguir una gran capacidad no sea necesario aumentar excesivamente el área de las placas. En segundo término un alto limite eléctrico $E_{\max}$ permitirá la presencia de grandes campos eléctricos en el condensador sin que se produzca ruptura dieléctrica. Para un condensador de placas planas paralelas, donde $V = Ed$, de forma que $V_{\max} = E_{\max} d$ y por lo tanto, si $E_{\max}$ es grande, d podrá ser pequeña sin restringir la diferencia de potencial máxima de trabajo, y un valor menor de d significa una mayor capacidad, por lo tanto se requiere un dieléctrico con un valor grande $E_{\max}$ si se espera que V sea grande o si d tiene que ser pequeño. En tercer lugar un aislante sólido proporcionará un soporte rígido entre las placas, evitando que éstas puedan llegar a estar en contacto eléctrico entre si.

Vemos dos diseños de condensadores prácticos



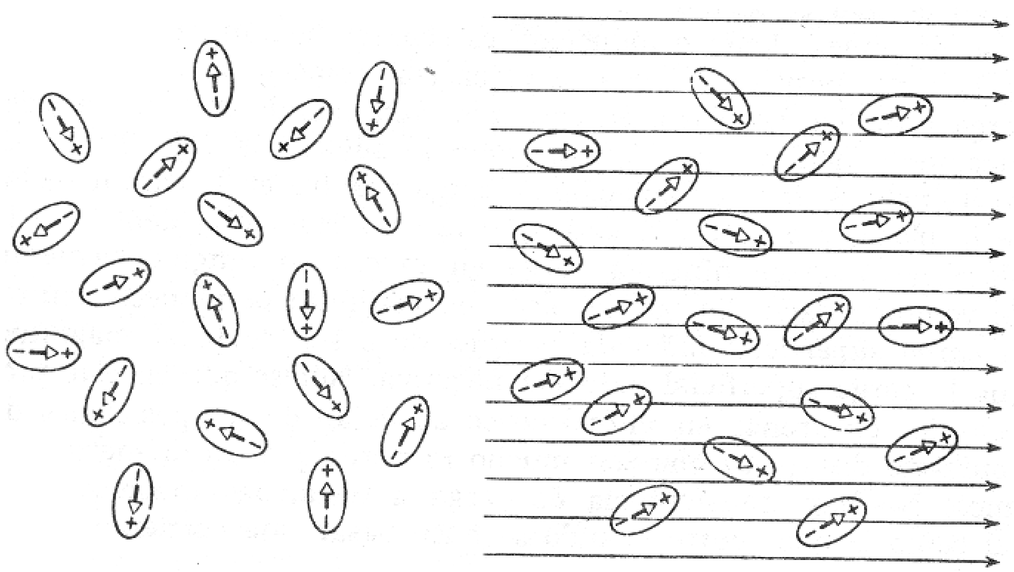
Dos laminas de dieléctrico y dos laminas metálicas alternadas y enrolladas en forma de cilindro



Los condensadores electrolíticos usan un electrolito (solución conductora) como una de las placas y la otra es una lámina metálica. El dieléctrico es una fina capa de oxido formada sobre la lamina metálica

Dieléctricos-Comportamiento de los átomos

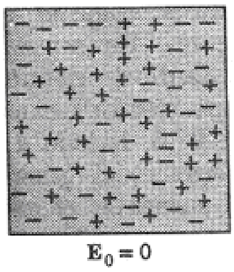
Tratemos ahora de entender, en términos atómicos, lo que ocurre cuando se coloca un dieléctrico en un campo eléctrico, hay dos posibilidades, las moléculas de algunos dieléctricos, como el agua, tienen momentos de dipolo eléctrico permanentes. En materiales esta clase (llamados polares) los momentos de dipolo eléctrico p tienden a alinearse bajo la acción de un campo eléctrico externo, como se muestra en la siguiente figura



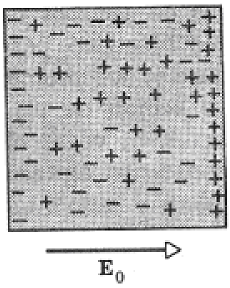
Debido a que moléculas están en constante agitación térmica, el grado de alineamiento no será completo y aumentará al aumentar el campo eléctrico aplicado o al disminuir la temperatura.

Ya sea que las moléculas tengan momentos de dipolo eléctrico permanente o no, los adquieren por inducción cuando se colocan un campo eléctrico. Sabemos que el campo eléctrico externo tiende a separar la carga negativa de la positiva en el átomo o en la molécula. Este momento de *dipolo eléctrico inducido* existe sólo cuando hay un campo eléctrico. Es proporcional al campo eléctrico (para intensidades de campo normales) al crearse se forma ya alineado con el campo eléctrico.

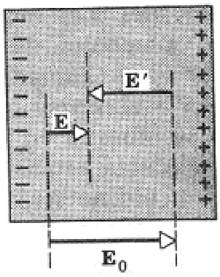
Consideremos un condensador de placas paralelas que tiene una carga fija q y que no está conectado con una batería, para producir un campo eléctrico externo uniforme E_0 en el cual colocamos una placa de dieléctrico. El efecto conjugado de alineamiento e inducción es separar ligeramente el centro de la carga positiva de toda la placa con respecto al centro de la carga negativa.



Una placa de dieléctrico mostrando las cargas positivas y negativas distribuidas al azar



Un campo externo E_0, que se obtiene al colocar el bloque del dieléctrico entre las placas de un condensador separa ligeramente el centro de las cargas positivas y negativas, haciendo que aparezcan cargas en la superficie, la carga neta sigue siendo igual a cero



Las cargas superficiales producen un campo E', que se opone al campo externo E_0, asociados a las cargas en la placa del condensador, por consiguiente el campo resultante $E = E_0 + E'$, es menor que el campo original E_0

Podemos resumir el ejemplo a
eléctricamente neutra, se polariza, como lo sugiere la figura central. El efecto neto es una acumulación de carga positiva en la cara derecha de la placa, y de carga negativa en la cara izquierda; dentro placa no aparece ninguna carga en exceso en ningún elemento de volumen dado. Ya que la placa en conjunto permanece neutra la *carga superficial inducida positiva* debe ser de igual magnitud que la carga superficial inducida negativa. Nótese que en este proceso, los electrones en el dieléctrico se alejan de sus posición equilibrio distancias que son mucho menores que un diámetro atómico. No hay transferencia de carga a distancias macroscópicas tal como la que ocurre cuando se hace pasar una corriente e conductor.

La figura de la derecha se muestra que las cargas superficiales inducidas aparecerán siempre, de tal manera que el campo eléctrico producido por ellas E' se opone al campo eléctrico externo

E_0. El campo resultante en el dieléctrico E es la suma vectorial de E_0 y E'. Apunta en la misma dirección que E_0 pero es más pequeña. *Si se coloca un dieléctrico en un campo eléctrico, aparecen cargas superficiales inducidas cuyo efecto es debilitar al campo original dentro del dieléctrico.*

Este debilitamiento del campo eléctrico se pone de manifiesto en la forma de una reducción de la diferencia de potencial entre las placas de un condensador aislado cuando se introduce un dieléctrico entre las mismas. La relación $V = Ed$ para un condensador de placas paralelas es válida ya sea que exista o no un dieléctrico y pone de manifiesto que la reducción en la V está íntimamente relacionada con la reducción en la E.

0 bien, en forma más específica, si se introduce una placa de dieléctrico dentro de un condensador cargado de placas paralelas, entonces:

$$\frac{E_0}{E} = \frac{V_0}{V_d} = K$$

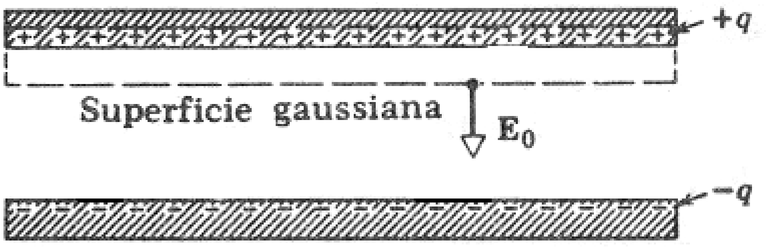
La carga superficial inducida es la explicación del hecho más elemental de la electricidad estática, a saber, que una barra cargada atrae pedazos descargados de papel, etc.

La figura muestra un pedazo de papel en el campo de una barra cargada.

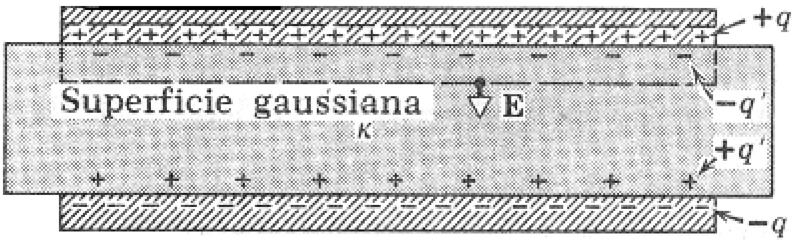
Las cargas superficiales aparecen en el papel como se muestran. El extremo del papel cargado negativamente será atraído hacia la barra y el extremo cargado positivamente será repelido. Estas dos fuerzas no tienen la misma magnitud debido a que el extremo negativo, por estar más cerca de la barra se encuentra en un campo intenso y experimenta una fuerza más intensa. El efecto neto una atracción. Un cuerpo dieléctrico en un campo eléctrico un cuerpo dieléctrico no experimenta una fuerza neta.

Los dieléctricos y la ley de Gauss

Hasta aquí nuestro uso de la ley de Gauss se ha limitado a casos en los cuales no había dieléctrico. Apliquemos ahora esta ley a condensador de placas paralelas que contiene un dieléctrico de constante dieléctrica K, como vemos en la figura



Condensador de placas paralelos sin dieléctricos



Condensador de placas paralelos con dieléctrico

Se supone que la carga principal q en las placas es la misma en ambos casos. Se han dibujado superficies gaussianas de la manera en ambos casos

Si no hay dieléctrico la ley de Gauss da:

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} d\vec{S} = \varepsilon_0 E_0 A = q \Rightarrow E_0 = \frac{q}{\varepsilon_0 A}$$

Si hay dieléctrico la ley de Gauss da:

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} d\vec{S} = \varepsilon_0 E A = q - q' \Rightarrow E = \frac{q}{\varepsilon_0 A} - \frac{q'}{\varepsilon_0 A}$$

en esta expresión q' ', la carga superficial inducida, debe distinguirse de q, la llamada *carga libre* en las placas. Estas dos cargas, ambas dentro de la superficie gaussiana, son de signo contrario; $q - q'$ es la carga neta dentro de la superficie gaussiana. Ya vimos que:

$$\frac{E_0}{E} = K \Rightarrow E = \frac{E_0}{K},$$ de donde escribimos $$E = \frac{E_0}{K} = \frac{q}{K\varepsilon_0 A}$$

$$\frac{q}{K\varepsilon_0 A}=\frac{q}{\varepsilon_0 A}-\frac{q'}{\varepsilon_0 A}$$ si despejamos el valor de q' nos queda

$$q'=q\left(1-\frac{1}{K}\right)$$ Esta expresión muestra correctamente que la carga superficial inducida q' es siempre de menor magnitud que la carga principal q y es igual a cero si no hay dieléctrico, esto es, si $K=1$

Ahora escribamos la ley de Gauss para el caso de tener dieléctrico entre las placas de la forma

$\varepsilon_0 \oint \vec{E}d\vec{S}=q-q'$, siendo $q-q'$ es la carga neta dentro de la superficie gaussiana, sustituyendo a q' nos queda

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}d\vec{S}=q-q\left(1-\frac{1}{K}\right)=q\left(1-1-\frac{1}{K}\right)=q\frac{1}{K}$$ de donde podemos escribir

$$\varepsilon_0 \oint K\vec{E}d\vec{S}=q$$

Esta relación es importante, aun cuando se ha derivado para un condensador de placas paralelas, es aplicable en todos los casos y es en esta forma como ordinariamente se escribe la ley de Gauss cuando hay dieléctricos. Notamos que:

1. La integral de flujo ahora contiene un factor K.
2. Se toma solamente como carga libre la carga q contenida dentro de la superficie gaussiana. La carga superficial inducida deliberadamente se pasa por alto en el segundo miembro de esta ecuación, puesto que se la ha tornado en cuenta al introducir K en primer miembro.

Tres vectores eléctricos

Para todos los casos que vimos hasta ahora es suficiente el procedimiento que hemos seguido para estudiar el comportamiento de los dieléctricos en un campo eléctrico. No obstante, los problemas que tratamos son simples, tales como el de una placa rectangular colocada perpendicularmente a un campo eléctrico uniforme. Para problemas más difíciles, tales como el de encontrar en campo eléctrico $\vec{E}$ en el centro de un elipsoide de dieléctrico colocado en un campo eléctrico externo (posiblemente no uniforme), se logra mayor simplificación en el trabajo y mas profunda comprensión de los problemas si introducimos un nuevo formalismo.

Volvamos a escribir la ecuación $$\frac{q}{K\varepsilon_0 A} = \frac{q}{\varepsilon_0 A} - \frac{q'}{\varepsilon_0 A}$$

que se vimos se aplica a un condensador de placas paralelas que contiene un dieléctrico en la siguiente forma: $$\frac{q}{K\varepsilon_0 A} + \frac{q'}{\varepsilon_0 A} = \frac{q}{\varepsilon_0 A}$$ de donde

$$\frac{q}{A} = \varepsilon_0 \left(\frac{q}{K\varepsilon_0 A} \right) + \frac{q'}{A}$$

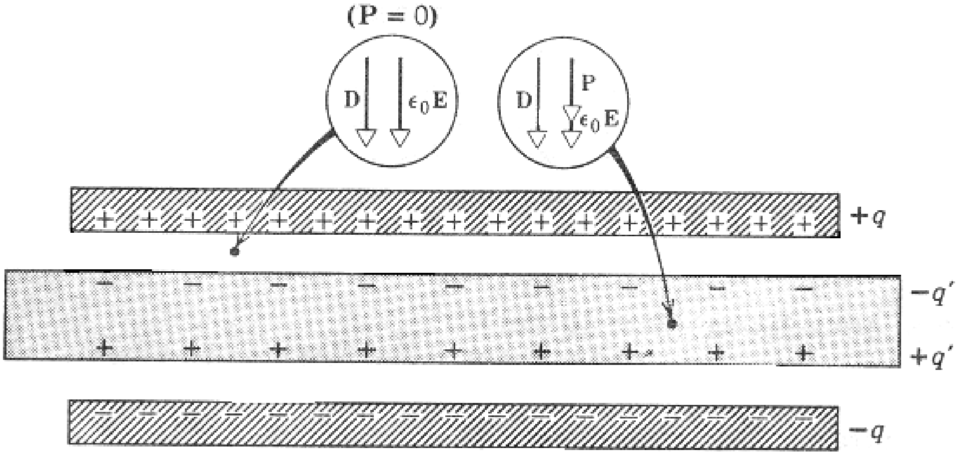
La expresión que esta entre paréntesis es la intensidad del campo eléctrico E en el dieléctrico. El ultimo termino en la ecuación es la carga superficial inducida por unidad de área, la llamamos *polarización eléctrica* P, o sea,

$$P = \frac{q'}{A}$$

El nombre es adecuado porque la carga superficial inducida q' aparece cuando se polariza el dieléctrico. La polarización eléctrica P se puede definir de una manera equivalente multiplicando el numerador y el denominador ecuación de su definición por d, que es el espesor de la placa del dieléctrico

$$P = \frac{q'}{A}\frac{d}{d}$$

El numerador es el producto $q'd$ de la magnitud de las cargas de polarización (iguales y opuestas) por su separación. Así pues, es el momento de dipolo eléctrico inducido de la placa dieléctrica. Puesto que el denominador Ad es el volumen de la placa, vemos que la polarización eléctrica se puede definir también como el momento de dipolo eléctrico inducido por unidad de volumen en el dieléctrico. Esta definición sugiere que, puesto que el momento de dipolo eléctrico es un vector, la polarización eléctrica también es un vector de magnitud P. La dirección de $\vec{P}$ es de la carga inducida negativa a la carga inducida positiva, como para cualquier dipolo. En la figura siguiente, que muestra un condensador con una placa de dieléctrico, que llena la mitad del espacio entre las placas, $\vec{P}$ apunta hacia abajo.



Entonces podemos volver a escribir la ecuación como :

$$\frac{q}{A} = \varepsilon_0 E + P$$

La expresión del segundo miembro ocurre tan a menudo en problemas de electrostática que se le da el nombre especial de *desplazamiento eléctrico* D, o sea,

$$D = \varepsilon_0 E + P$$

El nombre sólo tiene importancia histórica.

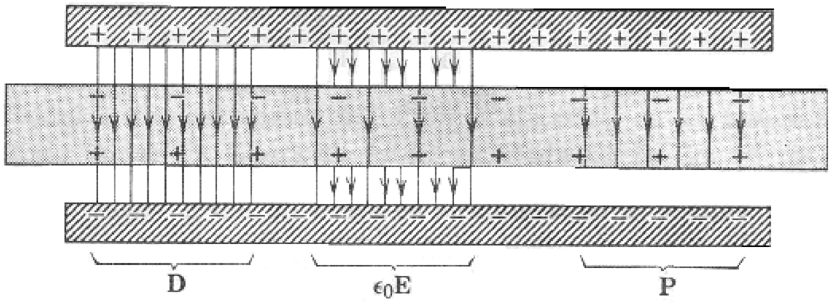
Puesto que E y P son vectores, D también debe serlo, de modo que en el caso más general tenemos:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

En la figura anterior todos los vectores apuntan hacia abajo y cada uno de ellos tiene una magnitud constante para cada punto en el dieléctrico (y también para cada punto en el hueco de aire) de tal manera que la naturaleza vectorial la ecuación no es muy importante en este caso. No obstante, en problemas mas complicados, $\vec{E}$, $\vec{P}$ y $\vec{D}$ también pueden variar en magnitud y dirección de un punto a otro.

De sus definiciones deducimos lo siguiente:

1. $\vec{D}$ esta relacionado únicamente con la carga libre Podemos representar el campo vectorial de $\vec{D}$ por líneas de $\vec{D}$, tal como representamos el campo de $\vec{E}$ por líneas de fuerza. La figura siguiente muestra las líneas de $\vec{D}$ comienzan y terminan en las cargas libres.
2. $\vec{P}$ esta relacionado únicamente con la carga de polarización. También es posible representar este campo vectorial por líneas, la figura muestra que las líneas $\vec{P}$ comienzan y terminan en las cargas polarización.
3. $\vec{E}$ esta relacionado con todas las cargas que existen, ya sean libres a de polarización, las líneas de $\vec{E}$ reflejan la presencia de ambas clases de cargas.



4. Tengamos presente que las unidades de $\vec{P}$ y de $\vec{D}$ son $coul/m^2$ mientras que las de $\vec{E}$ son $N/coul$

El campo vectorial eléctrico $\vec{E}$, que es lo que determina la fuerza obra sobre una carga de prueba colocada convenientemente, sigue siendo interés fundamental. $\vec{P}$ y $\vec{D}$ son vectores auxiliares útiles como ayuda en solución de problemas más complejos.

Los vectores $\vec{P}$ y $\vec{D}$ se pueden expresar en función de $\vec{E}$ sola. Un punto de partida conveniente es la identidad:

$$\frac{q}{A} = K\varepsilon_0\left(\frac{q}{K\varepsilon_0 A}\right)$$

Al comparar esta expresión con las anteriores se pone de manifiesto que la expresión anterior, ampliada a la forma vectorial, se puede escribir así:

$$\vec{D} = K\varepsilon_0\vec{E}$$

También podemos escribir la polarización de la siguiente forma:

$P = \frac{q'}{A} = \frac{q}{A}\left(1 - \frac{1}{K}\right)$ como sabemos que $D = \frac{q}{A}$ podemos volver a escribir la expresión anterior, expresando el resultado en forma vectorial de la siguiente manera:

$$\vec{P} = \vec{D}\left(1 - \frac{1}{K}\right) = \vec{D}\left(\frac{K-1}{K}\right) = K\varepsilon_0\vec{E}\left(\frac{K-1}{K}\right) = \varepsilon_0(K-1)\vec{E},$$

Se ve claramente que en el vació $K = 1$, entonces el vector de polarización $\vec{P}$ es cero. Las ecuaciones ponen de manifiesto que para materiales isótropos, para los cuales se puede asignar una constante dieléctrica K, tanto $\vec{P}$ como $\vec{D}$ apuntan en la dirección de $\vec{E}$ en un punto dado.

La definición de $\vec{D}$ nos permite escribir la ley de Gauss en presencia de un dieléctrico, simplemente así:

$$\oint \vec{D}d\vec{S} = q$$

Ecuación en la cual q represente la carga libre solamente, quedando excluidas las cargas superficiales inducidas. Realizamos una tabla a modo de resumen de los vectores eléctricos

Nombre	Símbolo	Relacionado con	Condiciones de frontera
Intensidad de campo eléctrico	E	Todas las cargas	Componente tangencial continua
Desplazamiento eléctrico	D	Sólo cargas libres	Componente normal continua
Polarización	P	Solo cargas de polarización	Desaparece en el vació

Ecuación de definición de $\vec{E}$	$\vec{F} = q\vec{E}$
Relación entre los tres vectores	$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$
Ley de Gauss cuando hay medios dieléctricos	$\oint \vec{D} d\vec{S} = q$
Relaciones empíricas entre algunos materiales dieléctricos	$\vec{D} = K\varepsilon_0 \vec{E}$, $\vec{P} = (K-1)\varepsilon_0 \vec{E}$