UNIDAD III*: CORRIENTE ELECTRICA Y CIRCUITOS ELÉCTRICOS*

Desplazamiento de cargas eléctricas. Intensidad y densidad de corriente. Unidades. Resistencia y resistividad. Ley de OHM. Variación de la resistividad con la temperatura. Superconductividad. Energía en un circuito eléctrico. Ley de JOULE. Generadores de energía eléctrica. Fuerza electromotriz. Unidades. Cálculos de corrientes y diferencias de potencial. Leyes de KIRCHOFF. Diferencias de potencial en los terminales de un generador y de un motor. Resistencias en serie y paralelo. Análisis del circuito RC. Carga y descarga de capacitores.

Indice

Introducción

Hasta ahora hemos tratado principalmente la electrostática, es decir los efectos de cargas estacionarias. Comenzaremos ahora a considerar el movimiento de los portadores de carga, la conducción eléctrica. Ya vimos que el campo eléctrico es nulo en el interior de un conductor, $\vec{E} = 0$, sin embargo, si mantenemos un campo eléctrico distinto de cero en un conductor, por ejemplo conectándolo a una batería o una fuente, los portadores de carga del conductor se moverán, y se establecerá una corriente eléctrica. Veremos los efectos de corrientes estacionarias e investigaremos modelos que nos ayuden a comprender la conducción eléctrica en la materia.

Un conductor es un material en el cual algunas de las partículas cargadas se pueden mover libremente, estas partículas son los portadores de carga del conductor. Por ejemplo si pensamos en un metal como una estructura de iones positivos localizados en posiciones de red fijas, y entre éstos se distribuyen los electrones libres. La carga del conjunto de los electrones libres es igual y opuesta a la carga del conjunto de los iones, resultando un material neutro.

Los electrones de un metal pueden moverse entre la red de iones, y constituyen los portadores de carga de un metal.

Los electrones libres en un conductor metálico aislado, tal como trozo de alambre de cobre, se encuentran en movimiento irregular como las moléculas de un gas encerrado en un recipiente. No tienen ninguna dirección de movimiento definida a lo largo del alambre. Si hace pasar un plano hipotético a través del alambre, la rapidez con la cual pasan electrones a través de él de derecha a izquierda, es misma que la rapidez con la cual pasan de izquierda a derecha; *rapidez neta es cero.* Si los extremos del alambre se conectan a una batería, se establece campo eléctrico $\vec{E}$ en todos los puntos dentro del alambre.

Este campo $\vec{E}$ actuará sobre los electrones y les dará un movimiento resultante en la dirección de $-\vec{E}$.

Decimos que se ha establecido una *corriente eléctrica* ,si pasa una carga neta q por una sección transversal cualquiera del conductor en el tiempo t, la corriente, supuesta constante, es:

$$i = \frac{q}{t}$$

La unidad en el sistema internacional será el *Amper* , definido como $[i] = \frac{[q]}{[t]} = \frac{[coul]}{[seg]} = [Amp]$, se le ha dado el nombre de amperio en honor a André Marie Ampére (1775-1836).

Si la velocidad de flujo de carga no es constante al transcurrir tiempo, la corriente varía con el tiempo y estará dada por:

$i = \dfrac{dq}{dt}$, en los primeros análisis consideraremos corrientes constantes.

La corriente i es la misma para todas las secciones transversales de un conductor, aun cuando el área de la sección transversal ser distinta en diferentes puntos. De la misma manera, la velocidad con la cual el agua (supuesta incompresible) fluye a través una sección transversal cualquiera de un tubo, es la misma aun cuando cambie la sección El agua fluye más aprisa en donde el tubo es de menor sección y más lentamente en donde su sección es mayor, tal manera que el caudal, medido por ejemplo en litros / minuto cambia. Esta constancia de la corriente eléctrica se deduce del hecho de que la carga debe conservarse; bajo las condiciones de régimen estable supuestas, ni se acumula continuamente en ningún punto conductor ni se pierde continuamente en ningún punto. Usando expresiones ya vistas no hay "fuentes" ni "sumideros" de carga

La existencia de un campo eléctrico dentro de un conductor no contradice lo que se explicamos anteriormente, ya que antes considerábamos aislado al conductor y que no se conservaba expresamente una diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera de él..

El campo eléctrico que obra sobre los electrones en un conductor no produce una aceleración *neta,* debido a los choques entre los electrones y los átomos (en rigor, los iones) que constituyen el conductor. Esta disposición de los iones, junto con las fuerzas intensas de resorte de origen eléctrico,- se llaman la *red*. El efecto total de estos choques es transformar energía cinética de los electrones que aceleran en energía de vibración de la red. Los electrones adquieren una *velocidad de arrastre* constante media v_d , en dirección $-\vec{E}$. Se puede hacer una analogía con una bola que rueda por una escalinata muy larga y no con una bola que cae libre desde la misma altura. En el primer caso, la aceleración causada por el campo (gravitacional) es contrarrestada efectivamente por los efectos retardadores de los choques con los escalones de tal manera que, condiciones adecuadas, la canica baja por la escalera con una aceración media cero, esto es, a velocidad media constante.

Aun cuando en los metales los portadores de carga son los electrones, en los electrólitos o en los conductores gaseosos los portadores de carga pueden ser también iones positivos, negativos o ambos.

La corriente eléctrica es una magnitud escalar, y aunque no es vectorial, comúnmente se habla de la dirección de una corriente, indicando con esto la dirección en que fluyen los portadores de carga positivos

Se necesita adoptar una convención para asignar las direcciones de las corrientes porque las cargas de signos opuestos se mueven en direcciones opuestas en un campo dado. Una carga positiva que se mueve en una dirección es equivalente, para casi los efectos externos, a una carga negativa que se mueve en dirección opuesta. Por consiguiente, por simplicidad y para establecer a uniformidad algebraica, *suponemos que todos los portadores de carga son positivos y dibujamos las flechas de la corriente en el sentido en que se moverían tales cargas. Si* los portadores de carga negativos, simplemente se mueven en sentido contrario a las flecha de la corriente. Hay casos, como en el *efecto may, que ya veremos* en el cual tiene mucha importancia el signo de los portadores de carga en los efectos externos, en estos a corriente eléctrica I es una magnitud escalar, y aunque no es vectorial, comúnmente se habla de la dirección de una corriente, indicando con esto la dirección en que fluyen los portadores de carga positivos por alto la convención y tomaremos en cuenta la situación real. En las figuras vemos los distintos casos que se nos presentan

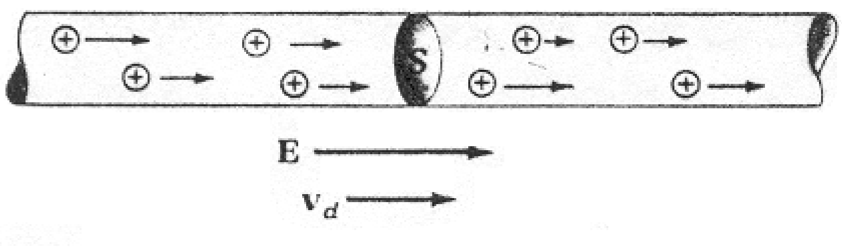


Figura 1

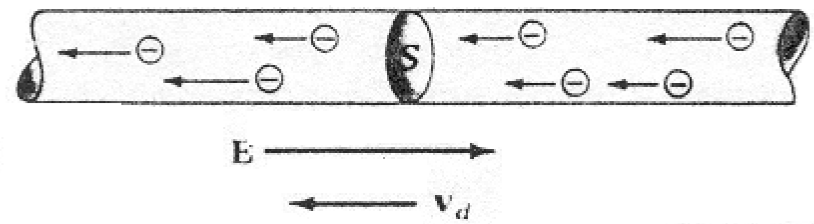


Figura 2

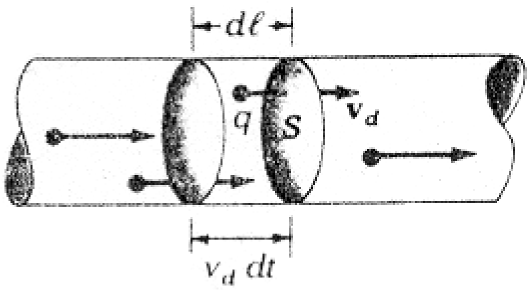
En la figura 1 se muestran portadores de carga positivos moviéndose hacia la derecha, mientras que en la Figura 2 vemos portadores de carga negativos moviéndose hacia la izquierda. En la Figura 1 los portadores de carga positivos que se mueven hacia la derecha tienden a hacer que la parte derecha del alambre sea más positiva y la parte izquierda más negativa. En la Figura 2 los portadores de carga negativos que se mueven hacia la izquierda tienden a hacer que la parte derecha sea más positiva y la izquierda más negativa. Es decir que el movimiento de portadores en ambas figuras produce el mismo resultado, y por tanto el sentido de la corriente es en las dos el mismo, hacia la derecha.

La corriente i es una característica de un conductor dado. Es una magnitud escalar, es una cantidad macroscópica, como la masa de un objeto, o la longitud de varilla. Una magnitud microscópica relacionada con la anterior la densidad de corriente $\vec{J}$ Es un vector y es la característica de punto dentro de un conductor; no es la característica del conductor en conjunto.

Velocidad de arrastre.

Cuando se aplica a un conductor un campo eléctrico externo, éste ejerce una fuerza sobre cada uno de los portadores de carga del conductor produciendo su movimiento a través del material. (Las partículas que no son portadores se desplazan ligeramente, pero continúan ligadas en sus posiciones de la red iónica.) Si sobre los portadores de carga no actuaran otras fuerzas, un campo eléctrico constante produciría sobre ellos una aceleración constante. Sin embargo, los portadores de carga interaccionan con las demás partículas del material, y el efecto combinado de estas interacciones y el campo eléctrico aplicado hace que los portadores se muevan a velocidad constante, v_d , llamada velocidad de arrastre.

Veremos ahora la relación entre la corriente i y el módulo de la velocidad de arrastre, v_d en un alambre de sección S suponiendo que n es la densidad de portadores de carga en el alambre (número de portadores por unidad de volumen) y q la carga de cada portador.



En la figura suponemos que todos los portadores llevan una velocidad v_d , de forma que todos los portadores que hay en el cilindro de longitud de dl pasan a través de la superficie S en un tiempo dt

En condiciones de flujo estacionario, estos portadores son reemplazados por los del siguiente cilindro a la izquierda, de manera que no varía la carga neta en el tramo de alambre.

La longitud del cilindró dl será $dl = v_d dt$

El número de portadores de carga en el cilindro es $nAdl \;=\; nAv_d\,dt$,

y todos ellos pasan por la superficie S en un tiempo dt , el valor de la carga dQ que pasa a través de la superficie S en un tiempo dt ,es

$dQ = nAdlq = nAv_d\,dtq$, como $i = \dfrac{dQ}{dt}$, podemos escribir

$i = \dfrac{dQ}{dt} = nAv_d\,q$, o sea

$i = nAv_d\,q$, la corriente es proporcional a la velocidad de arrastre v_d

Densidad de corriente eléctrica.

Ya dijimos que una magnitud microscópica relacionada con la corriente eléctrica i anterior es la densidad de corriente $\vec{j}$. Es un vector y es la característica de punto dentro de un conductor; no es la característica del conductor en conjunto.

La corriente eléctrica i caracteriza el flujo de carga a través de la sección perpendicular total de un conductor. Para describir el flujo de carga en puntos del interior de un conductor debemos usar la densidad de corriente $\vec{j}$. Si la densidad de corriente es uniforme, el moduló de la densidad de corriente j es igual a la corriente i dividida por el área A de la sección del conductor

$j = \dfrac{i}{A}$, sustituyendo el valor de $i = nAv_d q$ obtenido nos queda

$j = \dfrac{i}{A} = \dfrac{nAv_d q}{A} = nv_d q$, que podemos expresar en forma vectorial

$$\vec{j} = n\vec{v}_d q$$

La densidad de corriente apunta en la misma dirección que v_d para portadores positivos y en contra de v_d para portadores negativos, y por tanto la dirección de $\vec{j}$ coincide con el sentido de la corriente en el alambre.

Si un conductor posee más de un tipo de portadores de carga, existirá una contribución a $\vec{j}$ por cada tipo de portadores. Si tuviésemos dos tipos de portadores de carga, a y b, tendríamos que escribir

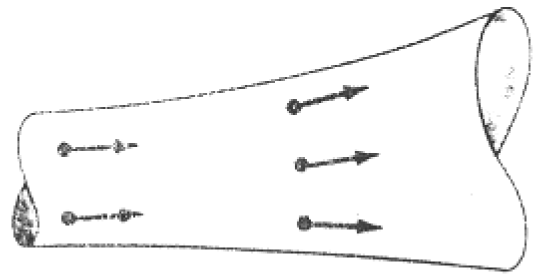
$\vec{j} = n_a \vec{v}_{da} q_a + n_b \vec{v}_{db} q_b$ donde los subíndices a y b designan las magnitudes correspondientes a cada tipo de portadores.

Podemos utilizar la ecuación anterior para demostrar que las contribuciones a $\vec{j}$ debidas a portadores de distinto signo apuntan en la misma dirección. Consideremos la densidad de corriente en una solución salina en la que los portadores son iones con carga $+e$ y $-e$. Si el medio es neutro las densidades de ambos tipos de iones son iguales. Tomaremos el eje x en la dirección del campo, $\vec{E} = E\vec{i}$, con lo que la velocidad de arrastre es $v_{d-} = v_{d+}\vec{i}$ para los iones positivos, y $v_{d-} = -v_{d-}\vec{i}$ para los iones negativos, donde los módulos de las velocidades v_{d+} y v_{d-} son ambos positivos. Es decir, la velocidad de arrastre de los iones positivos tiene la dirección del campo, y la velocidad de arrastre de los iones negativos tiene dirección opuesta al campo. La componente x de $\vec{j}$ será:

$$j_x = nev_{d+} + n(-e)(-v_{d-}) = nev_{d+} + nev_{d-}$$

Como ambos factores son positivos las contribuciones de ambos tipos de iones a $\vec{j}$ también lo son. Por tanto, el sentido de la corriente i corresponde con la dirección de $\vec{j}$ tanto para portadores positivos como negativos. *De nuevo vemos que el efecto externo de los portadores de carga es el mismo, independientemente de su signo.*

La ecuación $\vec{j} = n\vec{v}_d q$ es valida para cualquier clase de distribución de corriente, mientras que la ecuación $j = \dfrac{i}{A}$ solo lo es aplicable cuando la densidad de corriente es uniforma.



Si la velocidad de arrastre de los portadores varía, como se ve en la figura, la densidad de corriente variará en la misma forma

En este caso la corriente i a través de una superficie dada puede obtenerse mediante la integral de superficie de la densidad de corriente $\vec{J}$

$$i = \oint \vec{j}\, d\vec{S}$$

Por lo tanto podemos decir que la corriente a través de una superficie es el flujo de la densidad de corriente a través de dicha superficie.

Resistencia, resistividad y conductividad

Si se aplica la misma diferencia de potencial entre los extremos de una barra de cobre y de una barra de madera se producen corrientes muy diferentes. La característica del conductor que interviene esta diferencia es su *resistencia.* Definimos la resistencia de un conductor (a menudo llamado una *resistencia;* símbolo -~) entre dos puntos aplicando una diferencia de potencial V entre puntos, midiendo la corriente i y dividiendo: $R = \frac{V}{i}$ las unidades de la resistencia serán si V esta en volts e i en Amper , entonces la resistencia estará en ohms, cuyo símbolo es Ω , en honor a Georg Simon Ohm (1787-1854).
El nombre de resistencia eléctrica es apropiado, ya que es una medida de la oposición que ejerce un trozo de material al flujo de carga a través de él. Si un trozo de un material tiene mayor resistencia, la misma diferencia de potencial producirá una corriente menor. En los circuitos se añade a menudo resistencia para limitar o controlar la corriente.

El flujo de carga a través de un conductor se compara a nudo con el flujo de agua a través de un tubo, el cual se debido a que hay una diferencia de presión entre los extremos tubo, establecida, por ejemplo, con una bomba. Esta diferencia presión se puede comparar con la diferencia de potencial establecida entre los extremos de una resistencia mediante una batería.

El de agua (digamos m^3/ seg.) se compara con la corriente (amp). La rapidez de flujo del agua para una diferencia de dada depende de la naturaleza del tubo. ¿Es largo o corto? ¿Es angosto o ancho? ¿Está vacío o lleno de algo, por ejemplo, grava? Estas características del tubo son análogas a la resistencia de un conductor.

Relacionada con la resistencia está la *resistividad* ρ*,* que es una característica de un material y no de una muestra especial del material. Para materiales isótropos, que son los materiales cuyas propiedades, eléctricas en este caso, no varían con la dirección que se tome en el material, se la define como $\rho = \frac{E}{j}$ La resistividad del cobre es de 1.7 X .10^{-8} Ohm-m; la del cuarzo fundido es aproximadamente de 10'° Ohm-m. Pocas propiedades físicas pueden medirse entre márgenes tan amplios de valores. En la tabla siguiente vemos una lista de algunos valores para metales comunes.

	Resistividad a 20°C ohm-m	Coeficiente de temperatura α	Densidad	Punto de fusión °C
Aluminio	$2.8x10^{-8}$	$3.9x10^{-3}$	2.7	659
Plata	$1.6x10^{-8}$	$3.8x10^{-3}$	10.5	960
Cobre	$1.6x10^{-8}$	$3.9x10^{-3}$	8.9	1080
Hierro	$1.0x10^{-7}$	$5.0x10^{-3}$	7.8	1530
Carbono	$3.5x10^{-5}$	$-5x10^{-4}$	1.9	3500

α, es el coeficiente de temperatura, en esta tabla esta definido como $\alpha = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dT}$

la fracción que cambia la resistividad $\frac{d\rho}{dT}$ por unidad de cambio de temperatura. Varía con la temperatura, los valores que aquí se consignan son para 20°C. Para el cobre = 3.9 X 10-'/C°) la resistividad aumenta en 0.39 x 100 para un aumento de temperatura de 1 C° cerca de 20°C. Nótese que a para el carbón es negativa, o sea, que la resistividad disminuye al aumentar la temperatura.

Considérese un conductor cilíndrico de sección transversal A, longitud l que lleva una corriente constante i*.* Apliquemos una diferencia de potencial V entre sus extremos. Si las secciones transversales del cilindro son superficies equipotenciales, la intensidad campo eléctrico y la densidad de corriente serán constantes en todos, los puntos en el cilindro y tendrán los valores:

$$E = \frac{V}{l} \qquad\qquad j = \frac{i}{A}$$

La resistividad ρ puede escribirse entonces así:

$$\rho = \frac{E}{j} = \frac{V/l}{i/A} = \frac{V}{i}\frac{A}{l}$$

Pero $\frac{V}{i}$ es la resistencia R , de manera que se obtiene:

$$\rho = \frac{V}{i}\frac{A}{l} = R\frac{A}{l} \Rightarrow$$

$$R = \rho\frac{l}{a}$$

V, i y R son cantidades macroscópicas, que se aplican a un cuerpo a una región extensa en particular. Las cantidades *microscópicas* correspondientes son E, j y ρ ; éstas tienen sus valores particulares en cada punto de cuerpo. Las cantidades macroscópicas están relacionadas entre sí por medio de la ecuación de la ecuación $V = Ri$ *y* las cantidades microscópicas están relacionadas , en forma vectorial por $E = \rho j$
Las cantidades macroscópicas se pueden encontrar por integración de cantidades microscópicas usando las relaciones ya conocidas:

$$i = \oint \vec{j}\,d\vec{S} \quad \text{y} \quad V_{ab} = -\int_a^b \vec{E}\,d\vec{l}$$

La integral en la ecuación de la corriente es una integral de superficie, que se debe obtener en una sección transversal cualquiera del conductor. La integral en la ecuación de la diferencia de potencial es una integral de línea que se debe efectuar siguiendo una línea arbitraria trazada a lo largo del conductor, uniendo dos superficies equipotenciales cualesquiera, designadas a y b *.* Para un alambre largo conectado con una batería, la superficie equipotencial a podría escogerse como una sección transversal del alambre cerca de la terminal positiva de la batería y b tomarse como una sección transversal cerca de la terminal negativa.

La resistencia de un conductor entre a y b puede expresarse en términos microscópicos dividiendo las dos ecuaciones miembro a miembro así:

$$R = \frac{V_{ab}}{i} = \frac{-\int_a^b \vec{E}\, d\vec{l}}{\oint \vec{j}\, d\vec{S}}$$

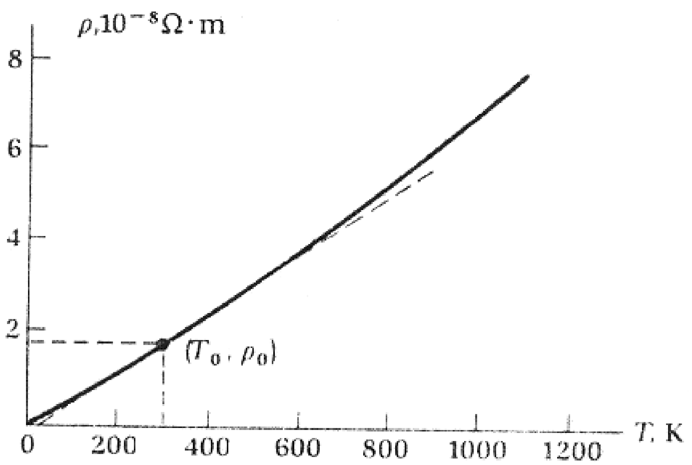
Si el conductor es un cilindro largo de sección transversal A, longitud l y los puntos a y b están en sus extremos, la anterior ecuación de R se reduce a:

$$R = \frac{El}{jA} = \rho \frac{l}{a}$$ ya vista

Las cantidades macroscópicas V, i y R son de interés primordial cuando efectuamos mediciones eléctricas en objetos conductores reales. Son las cantidades que se leen en los medidores. Las cantidades microscópicas E, j y ρ son de importancia primordial cuando nos ocupamos del comportamiento fundamental de la materia, como ocurre ordinariamente en el campo de la *física del estado sólido.* Más adelante nos ocuparemos apropiadamente del punto de vista atómico de la *resistividad* de un metal y no de la *resistencia* de una muestra de metal. Las cantidades microscópicas son también importantes cuando estamos interesados en el comportamiento interior de objetos conductores de forma irregular.

Dependencia de la resistividad de los metales con la temperatura.

La resistividad de muchos metales puros varía casi linealmente con la temperatura en un amplio rango de valores de ésta, como se muestra en la figura siguiente para el cobre.

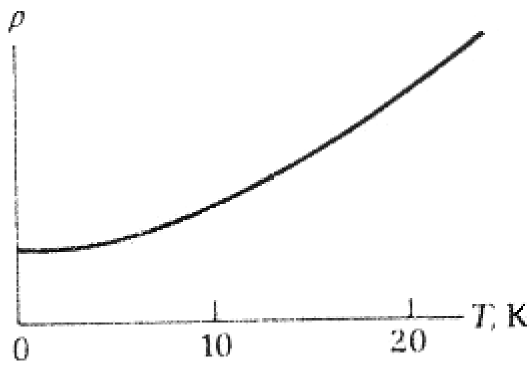


Como generalmente para los metales sólo aparece una ligera curvatura en la gráfica de ρ frente a T, podemos escribir

$$\rho \approx \rho_0 [1 + \alpha (T - T_0)]$$

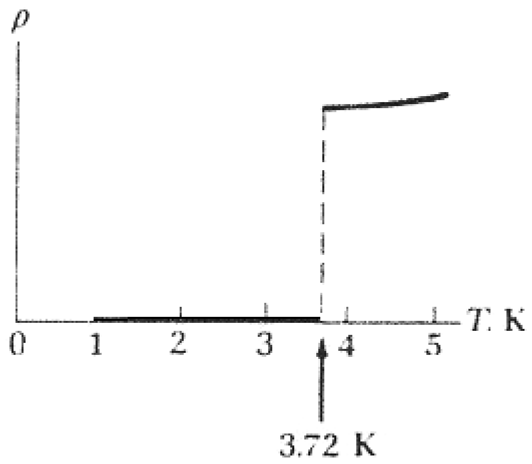
donde ρ es la resistividad a la temperatura T, ρ_0 la resistividad a una temperatura de referencia T_0 *y* α es el llamado *coeficiente térmico de la resistividad.* Es decir, en un rango limitado de temperaturas podemos aproximar la ligera curvatura de la gráfica de ρ frente a T por una recta. Notamos que en la figura la línea recta dada por la ecuación anterior es difícilmente distinguible de la curva para temperaturas cercanas a T_0. En la tabla dimos valores de los coeficientes términos de la resistividad para algunos materiales representativos

La dependencia de la resistividad de los metales con la temperatura altura se aparta claramente de la linealidad a bajas temperaturas, por debajo de 20 K. En la siguiente figura vemos el comportamiento típico en este rango



A estas bajas temperaturas la resistencia de un metal depende fuertemente de las pequeñas cantidades de impurezas que contenga. Realmente en la practica, las medidas de resistividad a bajas temperaturas se usan a menudo o para determinar la cantidad de impurezas que contiene un metal.

En algunos metales aparece un hecho sorprendente cuando son enfriados a muy baja temperatura: su resistencia se anula completamente. Este comportamiento se muestra en la figura siguiente



El fenómeno fue descubierto en 1911 por H. Kamerlingh Onnes (1853-1926), y se conoce como superconductividad. Hoy día la superconductividad constituye una activa área de investigación en física, y cada vez es mayor su importancia en ingeniería.

Todas las experiencias llevadas a cabo parecen indicar que la resistencia de los materiales en el estado superconductor es realmente cero; una vez que se establecen corrientes en un circuito superconductor cerrado, persisten sin disminuir durante muchas semanas, aun cuando no haya batería en el circuito. Si la temperatura se eleva ligeramente sobre el punto superconductor, las corrientes se anulan inmediatamente.

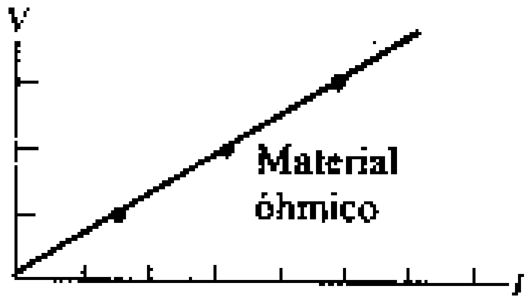
Ley de OHM

Para muchos conductores, la corriente a través de un trozo del conductor es directamente proporcional a la diferencia de potencial aplicada entre los extremos del mismo, de forma que su resistencia es independiente de V (o de i). Así por ejemplo, si se duplica la diferencia de potencial entre los extremos de un conductor, la corriente también se duplicará. En este caso podemos escribir

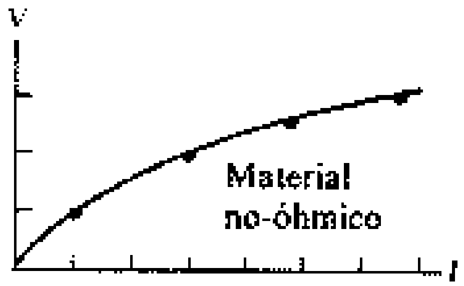
$$V = Ri$$

El nombre de *Ley de Ohm* esta ecuación es posiblemente algo erróneo porque el rango de validez de esta ecuación está en ocasiones demasiado limitado como para garantizarlo utilizando la palabra *ley*. No se trata de un hecho fundamental en la naturaleza, como por ejemplo lo es la ley de Coulomb. Por el contrario se trata de una expresión empírica que describe con precisión el comportamiento de muchos materiales en el rango de valores de V típicamente utilizados en los circuitos eléctricos. En estas circunstancias la ley de Ohm resulta muy útil.

Los materiales que cumplen la ley de Ohm se denominan *óhmicos, y* los que no la cumplen *no-óhmicos.* Un conductor óhmico se caracteriza por tener un único valor de su resistencia.



La grafica, de V con respecto a i, es una recta, de forma que la pendiente en todos los pu de la gráfica es la misma, y corresponde a R.



Un conductor no-óhmico no posee un valor único de resistencia, y su gráfica de V frente a i no es una línea recta

Resistividad - Comportamiento de los átomos

Podemos entender por qué los metales obedecen la ley de Ohm fundándonos en las ideas clásicas sencillas. Si se modifican estas ideas cuando sea necesario de acuerdo con los requisitos de la cuántica, es posible dar un paso más y calcular los valores de la resistividad ρ para diversos metales. Estos cálculos no son sencillos, pero cuando se han efectuado, los resultados ordinarios coinciden con los valores experimentales de ρ.

En un metal, los electrones de valencia no están ligados átomos individuales sino que tiene libertad para moverse dentro la red y se llaman *electrones de conducción.* En el cobre hay uno de estos electrones por cada átomo, los veintiocho restantes están ligados núcleos de cobre formando corazones iónicos.

La distribución de velocidades de los electrones de conducción sólo se puede describir correctamente aplicando la física cuántica. Sin embargo, para nuestras finalidades basta considerar solamente una velocidad media $\overline{V}$ definida en forma conveniente; para el cobre

$\overline{V}$ es igual a 1.6x10⁸ cm / seg. En ausencia de un campo electrónico, las direcciones en que se mueven los electrones están completamente azar, como las de las moléculas de un gas confinado en un depósito.

Los electrones chocan constantemente con los corazones iónicos del conductor, esto es, interactúan con la red, sufriendo a menudo cambios repentinos en la rapidez y dirección. Estos choques concuerdan a los choques de las moléculas de un gas confinado en depósito. Lo mismo que en el caso de los choques moleculares describir los choques del electrón con la red mediante un *recorrido libre medio* λ , siendo λ la distancia media que recorre un electrón entre choques consecutivos, se puede demostrar que los choques entre electrones ocurren muy pocas veces y tienen poco efecto en la resistividad.

En un cristal metálico ideal a 0 ° K no ocurrirían choques electrón-red según pronostica la física cuántica, esto es, $\lambda \rightarrow \infty$, cuando $T \rightarrow 0^0 K$ en los cristales ideales. Los choques ocurren en los cristales ideales por las siguientes causas

(a) los corazones jónicos a cualquier temperatura *T* están vibrando en torno de sus posiciones de equilibrio en una forma desordenada.

(b) pueden existir impurezas, esto es, átomos extraños.

(c) los cristales pueden contener imperfecciones en la red, tales como filas de átomos faltantes y átomos desalineados.

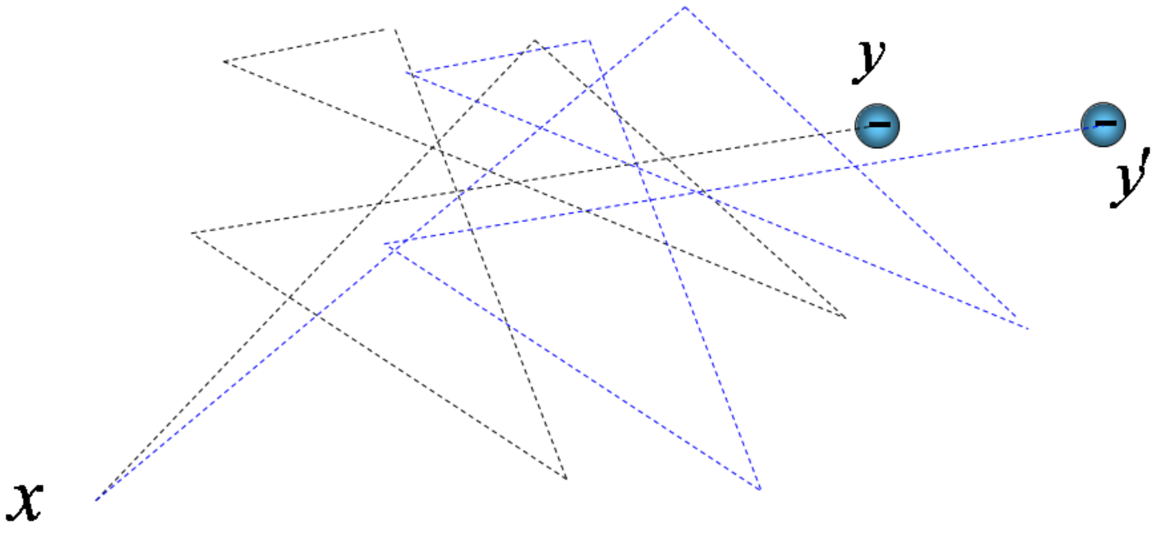
En vista de lo anterior, no es sorprendente que la resistividad de un metal se pueda aumentar de las siguientes maneras:

(a) elevando su temperatura,

(b) agregando pequeñas cantidades de impurezas,

(c) sometiéndolo a esfuerzos severos, por ejemplo, estirándolo a través de una hilera, para aumentar el número de imperfecciones de la red.

Cuando se aplica un campo eléctrico a un metal, los electrones modifican su movimiento irregular de tal manera que son arrastrados lentamente en dirección opuesta a la del campo, con una velocidad media de arrastre v_d. Esta velocidad de arrastre es mucho menor que la velocidad efectiva media $\overline{V}$ mencionada anteriormente.



La figura sugiere la relación entre estas dos velocidades. La línea llena es una trayectoria irregular posible seguida un electrón cuando no se aplica un campo; el electrón avanza de x, a y efectuando seis choques en el camino.

Las líneas interrumpidas muestran cómo hubiera podido ocurrir el mismo fenómeno si se hubiese aplicado un campo eléctrico $\vec{E}$. Notamos que el electrón es arrastrado constantemente hacia la derecha, terminando en y' y no y.

Se puede calcular la velocidad de arrastre v_d de los electrones en del campo eléctrico aplicado $\vec{E}$ y de v_d y λ. Cuando se aplica campo a un electrón que está inicialmente en reposo, experimenta fuerza $\vec{F} = e\vec{E}$ que le comunica una aceleración a dada por la segunda ley de Newton:

$$a = \frac{eE}{m}$$

Consideremos a un electrón que ha chocado precisamente contra un corazón ion. El choque, en general, destruirá momentáneamente tendencia del arrastre y el electrón tendrá una verdadera dirección desordenada después de este choque. Al siguiente choque, la velocidad del electrón habrá cambiado a:

$v_d = a\left(\frac{\lambda}{\overline{v}}\right)$, siendo $\left(\frac{\lambda}{\overline{v}}\right)$ su tiempo medio entre choques

El movimiento del electrón a través del conductor es análogo a la velocidad constante con que cae una piedra en el agua. Contra la fuerza gravitacional sobre la piedra se opone una fuerza resistente viscosa que es proporcional a la velocidad. Así pues, la velocidad final de la piedra es constante.

Podemos expresar a v_d en función de la densidad de corriente j y combinarla con la ecuación anterior, obtenemos:

$v_d = \frac{j}{ne} = \frac{eE\lambda}{m\overline{v}}$, de donde $E = \frac{jm\overline{v}}{ne^2\lambda}$

y como sabemos que $\rho = \frac{E}{j}$ llegamos a:

$$\rho = \frac{E}{j} = \frac{1}{j}\frac{jm\overline{v}}{ne^2\lambda} = \frac{m\overline{v}}{ne^2\lambda}$$

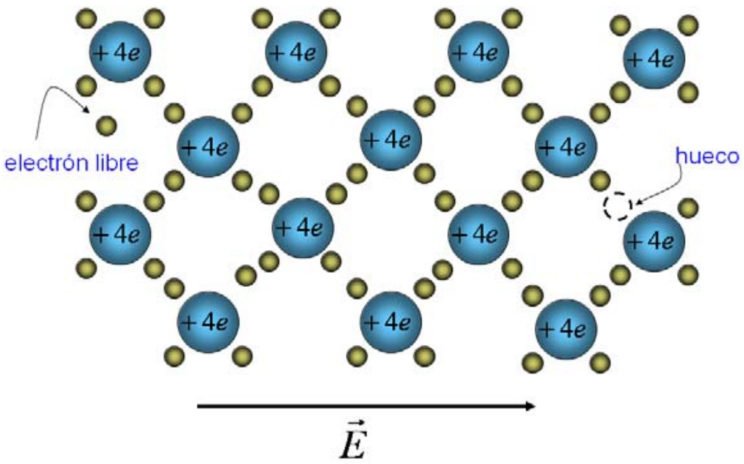
Esta ecuación se puede considerar como la afirmación de que los metales obedecen la ley de Ohm si *es que* podemos demostrar que $\overline{v}$ y λ no dependen del campo eléctrico aplicado E . En tal caso, ρ no dependerá de E , lo cual es el criterio para saber si un material obedece la ley de Ohm. Las cantidades $\overline{v}$ y λ dependen de la distribución de velocidades de los electrones de conducción. Vemos que esta distribución queda afectada sólo ligeramente al aplicar un campo eléctrico aun cuando sea relativamente grande, puesto que $\overline{v}$ es del orden de 10^8 cm / seg., mientras que v_d es solamente es del orden de 10^{-2} cm / seg., dando una relación del orden de 10^{10} .

Podemos estar seguros de que cualesquiera que sean valores de $\overline{v}$ y λ (por ejemplo para el cobre a 20°C) cuando no hay un campo eléctrico, se conservan casi sin cambio cuando se aplica un campo eléctrico. Así pues, nuestra ecuación de ρ es independiente del campo eléctrico E y el material obedece la ley de Ohm. El cálculo numérico de ρ a partir de esta ecuación se complica por la dificultad de calcular a λ , si bien se ha efectuado este cálculo en un buen numero de casos

Conducción en semiconductores

Anteriormente habíamos dividido los materiales en dos clases dependiendo de su conductividad eléctrica: conductores y aislantes. Existe un tercer tipo, *los semiconductores,* cuya conductividad es intermedia entre la de los conductores y la de los aislantes. Los semiconductores juegan un papel esencial en la tecnología moderna. Son los materiales usados para fabricar dispositivos electrónicos como diodos, transistores y circuitos integrados.. Pues bien, la densidad de portadores es el factor clave para controlar la conductividad de un semiconductor.

Conducción en semiconductores puros. Los semiconductores están formados por elementos de las columnas centrales de la tabla periódica, entre los que el silicio es el más común. Estudiaremos el silicio como nuestro semiconductor representativo.
El silicio $(Z = 14)$ tiene una valencia 4, y cuando los átomos de este elemento se juntan formando un sólido, cada uno tiene cuatro vecinos más próximos. En siguiente figura mostramos una representación en dos dimensiones de la red cristalina tridimensional del silicio;



cada átomo aparece como un ion de carga $+4e$ acompañado de cuatro electrones de valencia.

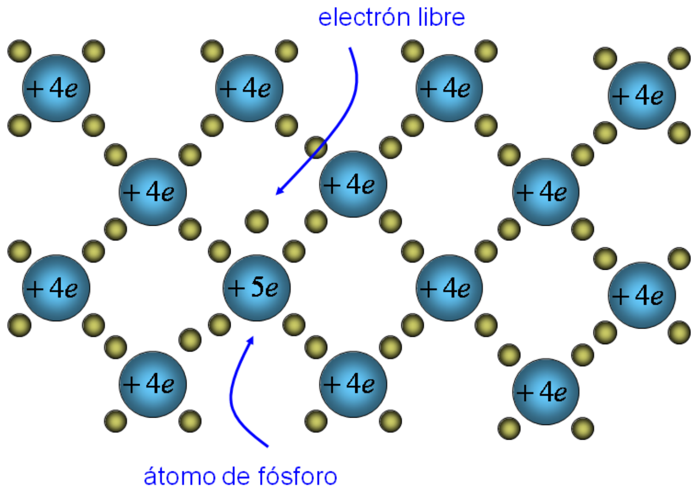
En el silicio puro casi todos estos electrones están ligados a sus respectivos iones a temperatura ambiente, pero las fluctuaciones de energía térmica hacen que algunos de ellos se encuentren libres. Es decir, una pequeña fracción de los átomos de silicio está *térmicamente ionizada. (A* temperatura ambiente, aproximadamente un átomo de cada 10^{12} se encuentra ionizado, es decir una fracción muy pequeña.) Los electrones liberados térmicamente serán portadores de carga negativos.
Además de los electrones libres, los semiconductores tienen portadores de carga positivos. En la figura anterior vemos que si un electrón se libera de su sitio en el sólido, deja atrás una

posición donde falta un electrón. Esta «falta de electrón» se llama *hueco, y* un campo eléctrico aplicado puede hacer que un hueco se mueva a través del sólido en la dirección del campo. De esta forma un hueco es un portador de carga positivo.

Un hueco moviéndose en un semiconductor, debido a un campo eléctrico aplicado, es similar a una burbuja moviéndose hacia arriba desde e el fondo de una piscina debido al campo gravitatorio de la tierra; la burbuja sube a través del agua, aunque realmente el agua está cayendo conforme la burbuja sube. En lugar de hablar del agua cayendo resulta más apropiado hablar de la burbuja subiendo, pensamos en termino de «la falta de agua» (la burbuja) en ve; considerar el agua subiendo.

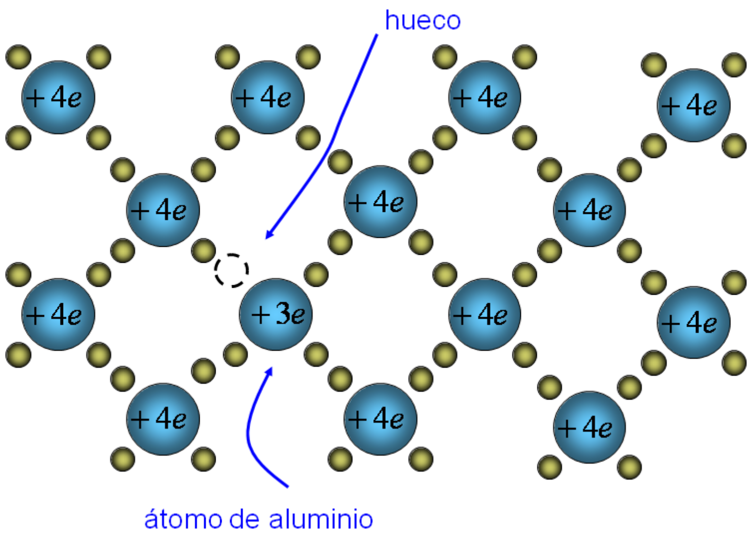
Semiconductores tipo-n y tipo-p.

En el caso anterior el número de portadores del silicio era muy bajo en comparación con, el de los metales. En un metal hay aproximadamente un portador por átomo, ya vimos que en el silicio a temperatura ambiente hay aproximadamente uno por cada 10^{12} átomos. En consecuencia, la resistividad del silicio a temperatura ambiente es del orden de 10^{11} veces mayor que la de los metales. Sin embargo, la densidad de portadores en un semiconductor puede aumentarse considerablemente introduciendo ciertas impurezas en el material. Consideremos el efecto de la incorporación de átomos de fósforo en silicio. El fósforo $(Z = 15)$ tiene cinco electrones de valencia, uno más que el silicio. Si se introduce una pequeña cantidad de fósforo en el silicio sólido, algunos lugares normalmente ocupados por los iones silicio (con carga $+4e$) serán ahora ocupados por iones fósforo (con carga $+5e$), como se muestra en la siguiente figura



Cuatro de los cinco electrones de valencia de cada átomo de fósforo estarán ligados al ion de fósforo (en la misma disposición de los electrones alrededor de los iones de silicio), y el electrón restante está siempre prácticamente libre a temperatura ambiente. Por tanto esencialmente cada átomo de la impureza de fósforo cede un portador de carga negativo, electrón libre al material.

Consideremos ahora el efecto de impurezas de aluminio en silicio. El aluminio $(Z = 13)$ tiene tres electrones de valencia, uno menos que el silicio. Si se introduce una pequeña cantidad de aluminio en silicio sólido, algunos lugares normalmente ocupados por iones silicio pasarán a estar ocupados por iones aluminio (con carga $+3e$), como se muestra en la figura



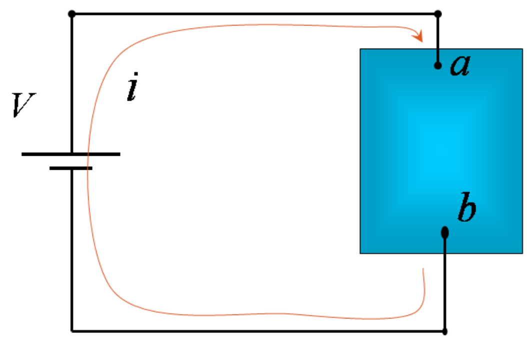
A temperatura ambiente el hueco, formado por la falta de un electrón de valencia en el aluminio, está prácticamente siempre libre, de forma que casi todos los iones aluminio tienen cuatro electrones a su alrededor, como los de silicio.

A temperatura ambiente el hueco, formado por la falta de un electrón de valencia en el aluminio, está prácticamente siempre libre, de forma que casi todos los iones aluminio tienen cuatro electrones a su alrededor, como los de silicio. El átomo de aluminio *acepta* un electrón del material, y ahora el material tiene un portador de carga en forma de hueco. Esencialmente cada átomo de aluminio produce un hueco en el material.

Cuando se introduce a propósito una impureza en un material que era puro se dice que el material está dopado. Por ejemplo, cuando se introduce fósforo en silicio puro, el material resultante es silicio dopado-con fósforo. Como hemos visto, el silicio dopado con fósforo contiene un exceso de portadores de carga negativos. Este tipo de material se denomina semiconductor *tipo n*; refiriéndonos a la carga negativa de los portadores, en este caso electrones. El silicio dopado con aluminio es un semiconductor tipo p; o sea a la carga positiva de los portadores, los huecos.
Para calificar un semiconductor corno *tipo n* o *tipo p*, la concentración debe ser suficientemente alta como para que la densidad de electrones libres o huecos debe ser mucho mayor que la densidad de portadores en el material puro.

Intercambios de energía en un circuito eléctrico

La figura muestra un circuito que consiste en una batería conectada con una *caja cerrada,* es decir no sabemos y para este primer análisis no importa que hay adentro, sino solo su comportamiento al relacionarla con el exterior . Por los alambres de conexión pasa una corriente i constante y existe una diferencia de potencial constante V_{ab} entre las terminales a y b. La caja podría contener una resistencia, un motor o un acumulador, entre otras cosas.



La terminal a, conectada con el borne positivo de la batería está a mayor potencial que la terminal b. Si se mueve una carga dq de a a b, esta carga disminuirá su energía potencial eléctrica en una cantidad $dq * V_{ab}$

El principio de conservación de la energía nos dice que esta energía se transforma dentro de la caja, de energía potencial eléctrica a alguna otra forma ¿Qué cosa será esa otra forma? Ello depende del contenido de la caja. Entonces en un tiempo dt la energía dU transformada dentro de la caja es:

$$dU = dqV_{ab} = idtV_{ab}$$

Encontramos la *rapidez* de transmisión de energía P dividiendo entre el tiempo, o sea,

$$P = \frac{dU}{dt} = iV_{ab}$$

Si el artefacto que está dentro de la caja es un motor, la energía aparece casi toda como trabajo mecánico hecho por el motor; si artefacto es un acumulador que se está cargando, la energía aparece casi toda como energía química almacenada en esa segunda batería.
Si el artefacto es una resistencia, aseguramos que la energía aparece como calor en la resistencia. Para darse cuenta de ello, consideremos una piedra de masa *m* que cae desde una altura h. Disminuye su energía potencial gravitacional en una cantidad mgh. Si la piedra cae en el vacío, o bien -para muchos fines prácticos el aire, esta energía se transforma en energía cinética de la piedra. Pero si la piedra cae en el agua, su velocidad al cabo de cierto 'tiempo se hace constante, lo cual significa que la energía cinética ya no aumenta. La

energía potencial de que continuamente se dispone conforme cae la piedra aparece entonces como energía térmica en la piedra y en el agua circundante. Es la fuerza viscosa de arrastre del agua, semejante a la fricción y que obra en la superficie de la piedra, la que evita que ésta acelere, y es en esta superficie en donde aparece la energía térmica.
El paso de los electrones a través de la resistencia es muy semejante al de la piedra a través del agua. Los electrones avanzan con una velocidad constante de arrastre v_d y por consiguiente no ganan energía cinética. La energía potencial eléctrica que pierden se transmite a la resistencia como calor. En una escala microscópica esto puede interpretarse considerando que los choques de los electrones con la red aumentan la amplitud de ls vibraciones térmicas de la red, en una escala macroscópica esto corresponde a un aumento de temperatura. Este efecto, que es termodinámicamente irreversible, se llama *calentamiento por efecto Joule.*

Para una resistencia tenemos:

$P = Vi$, pero de la ley de Ohm tenemos que $V = Ri$ combinando ambas expresiones podemos escribir:

$$P = Ri^2 \quad \text{ó} \quad P = \frac{V^2}{R}$$

Tengamos presente que mientras que $P = Vi$ se aplica a la transmisión de energía eléctrica de todas las clases; las ecuaciones $P = Ri^2$ y $P = \frac{V^2}{R}$ se aplican solamente a la transformación de energía eléctrica en energía calórifica
a en una resistencia, estas son las que se conocen como de Joule. Esta ley es en definitiva una manera particular de escribir el principio de la conservación de la energía para el caso especial en el cual energía eléctrica se transforma en energía calorífica.

La unidad de potencia la podemos deducir de:

$$[P] = [V][i] = [volt][amp] = \left[\frac{joule}{coul}\right]\left[\frac{coul}{seg}\right] =$$

$$[P] = \left[\frac{joule}{seg}\right] = [watt]$$

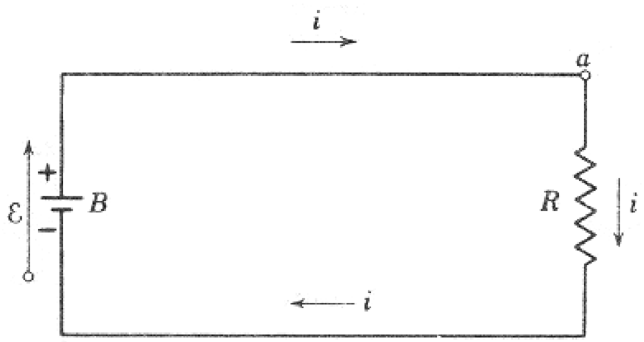
Fuerza Electromotriz

Para que en un circuito eléctrico exista una corriente continua, el circuito debe contener un componente que actúe como fuente de energía eléctrica. Estos componentes se llaman fuentes de fuerza electromotriz, abreviado fem. Una fuente de fuerza electromotriz proporciona a los portadores de carga la energía eléctrica necesaria para que realicen su trayecto a través del circuito.

En nuestro estudio capítulo no nos ocuparemos de cómo están construidos o de los detalles de su funcionamiento, sino que nos dedicaremos a describir sus características eléctricas y a explorar su utilidad en circuitos eléctricos.

La batería produce esa corriente estable al mantener una diferencia de potencial aproximadamente constante entre sus terminales. El terminal que está a mayor potencial se denomina terminal positivo, y el terminal que está a menor potencial se denomina terminal negativo. Por tanto, el sentido de la corriente fuera de la batería (a través de la resistencia) va desde el terminal positivo al terminal negativo, y el sentido de la corriente en el interior de la batería va del terminal negativo hacia el positivo. Dos importantes magnitudes que caracterizan una batería son su fem ε y. su resistencia interna r . Muchas veces para los cálculos el valor de la resistencia interna r es tan pequeño que se lo puede despreciar.

La figura siguiente muestra una fuente de fem ε , representada por una batería y la cual va conectada a una resistencia R .La fuente de fem conserva la terminal superior positiva y la terminal inferior negativa, como se representa con los signos + y - .



En el circuito exterior a la fem los portadores positivos de carga se moverían en la dirección que muestran las flechas representadas por i . En otras palabras, se produciría una corriente en el sentido de las manecillas del reloj.

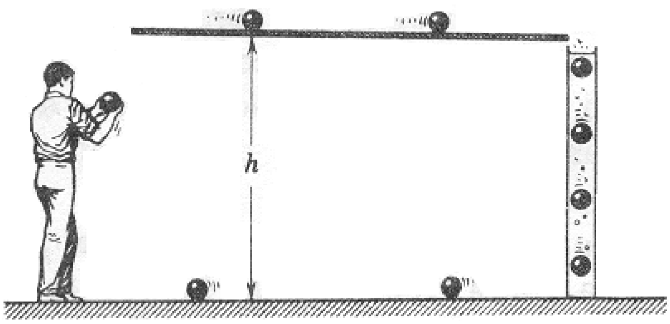
Una fuente de fem debe ser capaz de hacer trabajo sobre portadores de carga que penetren a ella. En el circuito anterior, el efecto de la fuente es mover las cargas pos de un punto de bajo potencial, la terminal negativa, a través fuente a un punto de elevado potencial, la terminal positiva. Realiza un trabajo similar al de una bomba mediante la cual el agua se puede subir un lugar de bajo potencial a otro de elevado potencial.

En la circuito pasa carga dq en un tiempo dt , esta carga entra a la fuente fem en su extremo de bajo potencial y sale de ella en su extremo de elevado potencial. La fuente debe hacer una cantidad debajo dW sobre los portadores de carga (positiva) para forzarlos que vayan al punto de, mayor potencial. La fem ε , de la fuente define así:

$$\varepsilon = \frac{dW}{dq}$$

Si una fuente de fem hace trabajo sobre un portador de carga, debe haber una transmisión de energía dentro de la fuente. Por ejemplo, en una batería se transforma energía química en eléctrica. Podemos describir una fuente de fem como un dispositivo en el cual se transforma, en forma reversible, energía química, mecánica o de otra forma, en energía eléctrica. La energía química proporcionada por la batería en el circuito anterior se almacena en los campos eléctricos y magnéticos que rodean al circuito. Esta energía almacenada no aumenta porque se está gastando al transformarse en calor por el efecto Joule en la resistencia con la misma rapidez con que es abastecida. Los campos eléctrico y magnético juegan el papel de intermediarios en el proceso de transmisión de energía, funcionando como depósitos de almacenamiento.

El dibujo siguiente un símil gravitacional del circuito, en el mismo, la fuente de fem hace trabajo sobre los portadores de carga. Esta energía, almacenada temporalmente como energía de campo electromagnético, aparece al fin de cuentas como calentamiento por el efecto Joule en la resistencia R .

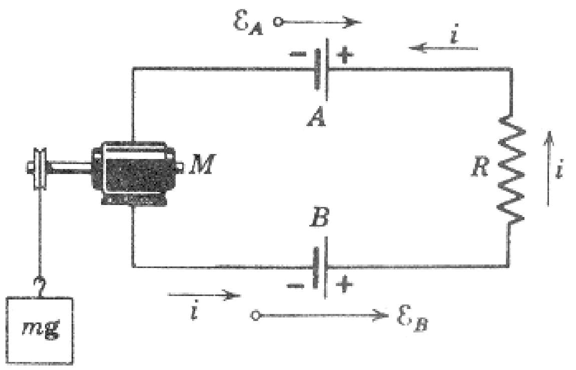


El hombre, al levantar las bolas de boliche del piso al anaquel, hace trabajo sobre ellas. Esta energía queda almacenada temporalmente como energía en el campo gravitacional

Las bolas ruedan lentamente por el anaquel, cayendo por el extremo derecho a un cilindro lleno de aceite viscoso. Se hunden hasta el fondo a velocidad constante, y son extraídas mediante un mecanismo adecuado que no se muestra en la figura. Después van rodando por el piso hacia la izquierda. La energía que proporciona la persona al sistema aparece al fin de cuentas como calor en el fluido viscoso. La energía que proporciona la persona viene de su propia energía interna, química.

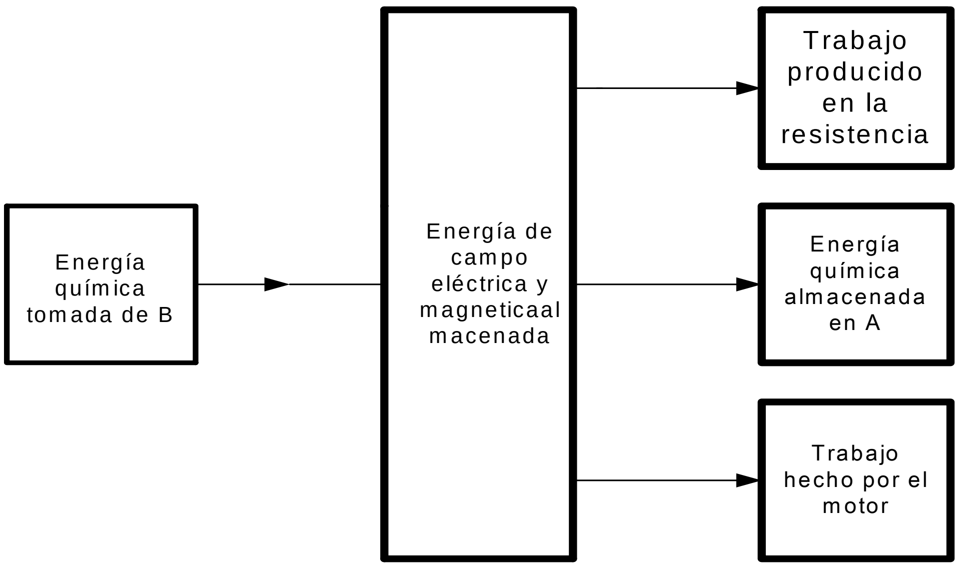
La circulación de las cargas en el circuito, se suspenderá a la larga si la batería no carga, la circulación de las bolas de boliche en el dibujo se suspenderá a la larga si la persona no recupera con alimentos su provisión de energía interna.

La figura muestra un circuito que contiene dos baterías, ideales A y B, una resistencia R y un motor eléctrico ideal que opera levantando un peso.



Las baterías se conectan de tal manera que tienden a mandar cargas por el circuito en direcciones opuestas; la dirección definitiva de la corriente queda determinada por B, que proporciona la mayor diferencia de potencial.

La energía química en B se está consumiendo continuamente, apareciendo la energía en las tres formas mostradas a la derecha. La batería A se está "cargando" mientras que la batería B se está descargando. Nuevamente, los campos eléctrico y magnético que rodean al circuito obran como intermediarios. Las transformaciones de energía en este circuito son:



Calculo de la corriente en un circuito

En un tiempo dt aparecerá una cantidad de energía dada por la expresión:

$dW = i^2 Rdt$ en la resistencia del circuito anterior como calor por el efecto Joule. Durante ese mismo tiempo se habrá movido una carga $dq = idt$ a través de la fuente de fem, y ésta habrá hecho un trabajo sobre esa carga dado por la siguiente expresión

$$dW = \varepsilon dq = \varepsilon idt$$

De acuerdo con el principio de la conservación de la energía, el trabajo hecho por la fuente debe ser igual al calor generado por el efecto Joule, o sea,

$$dW = \varepsilon idt = i^2 Rdt$$

Despejando la corriente tenemos $\varepsilon idt = i^2 Rdt \Rightarrow \varepsilon i = i^2 R \Rightarrow \varepsilon = iR \Rightarrow$

$$i = \frac{\varepsilon}{R}$$

También podemos derivar esta ecuación considerando que, para que el potencial eléctrico tenga un verdadero significado, es preciso que un punto dado no pueda tener más que un solo valor del potencial en un momento dado. Si comenzamos en un punto cualquiera del circuito de la figura, e imaginariamente seguimos todo el circuito el una dirección cualquiera, sumando algebraicamente los cambios de potencial encontrados, debemos llegar al mismo potencial cuando regresemos al punto de partida. En otras palabras, *la suma algebraica de los cambios de potencial que se encuentren al recorrer el circuito completo, debe ser cero.*

Comencemos en un punto a cuyo potencial es V_a y recorramos el circuito en sentido de las manecillas del reloj. Al pasar por la resistencia hay un cambio de potencial de valor $-iR$. El signo menos indica que la parte superior de la resistencia tiene un potencial mayor que la parte inferior, lo cual debe ser cierta porque los portadores de carga positiva se mueven por sí mismos del potencial alto al potencial bajo. Al atravesar el acumulador de abajo. hacia arriba hay un aumento de potencial de valor $+\varepsilon$ debido a que la batería hace trabajo (positivo) sobre los portadores de carga, lo que quiere decir que los mueve de un punto de bajo potencial a un punto de potencial elevado. Añadiendo la suma algebraica de los cambios de potencial al potencial V_a debe obtenerse el mismo valor V_a , o sea:

$V_a - iR + \varepsilon = V_a$, que lo podemos expresar

$$-\,iR\,+\,\varepsilon\,=\,0$$

Expresión esta que no depende del valor de V_a y que expresa explícitamente que la suma algebraica de los cambios de potencial al recorrer un circuito completo es cero.

Estas dos maneras de encontrar la corriente en circuitos simples, basadas en la conservación de la energía y en el concepto de potencial son completamente equivalentes porque las diferencias de potencial se definen en función del trabajo y energía.

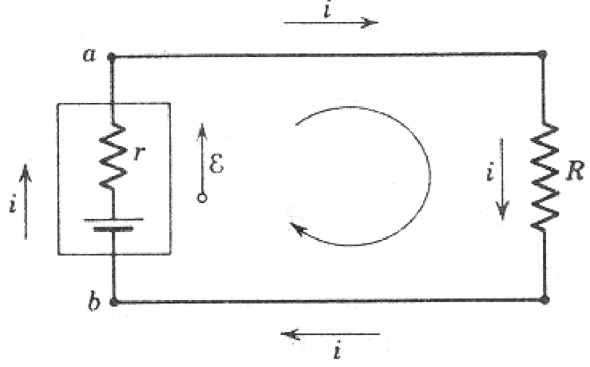
Si bien lo volveremos a ver más adelante, el enunciado de que la suma de los cambios de potencial que se encuentran al seguir un circuito completo es cero se llama segunda ley de Kirchhoff; o también teorema de la trayectoria o de las mallas. Siempre debe tenerse presente que este teorema es simplemente una manera particular de enunciar el principio de la conservación de la energía en circuitos eléctricos.

Veamos las reglas para encontrar las diferencias de potencial en cualquier circuito; estas reglas se deducen del análisis anterior.

1. Si se recorre una resistencia en el sentido de la corriente, el cambio de potencial es $-\,iR$; en el sentido contrario es $+\,iR$.
2. Si se atraviesa una fuente de fem en el sentido de la fem, el cambio de potencial es $+\,\varepsilon$; en el sentido contrario es $-\,\varepsilon$

Algunos circuitos simples

En el circuito siguiente se pone de manifiesto que todas las fuentes de fem tienen una resistencia interna r intrínseca. Esta resistencia no se puede eliminar, aun cuando desde el punto de vista de las energías sería mejor hacerlo, porque es una parte inherente del aparato. La figura muestra la resistencia interior r y la fem separadas, aun cuando, en realidad, ocupan la misma región del espacio.



Si aplicamos la ley de las mallas, comenzando en el punto a y dando la vuelta en el sentido de las manecillas del reloj, obtenemos:

$$V_b + \varepsilon - ir - iR = V_b$$

o sea,

$$+ \varepsilon - ir - iR = 0$$

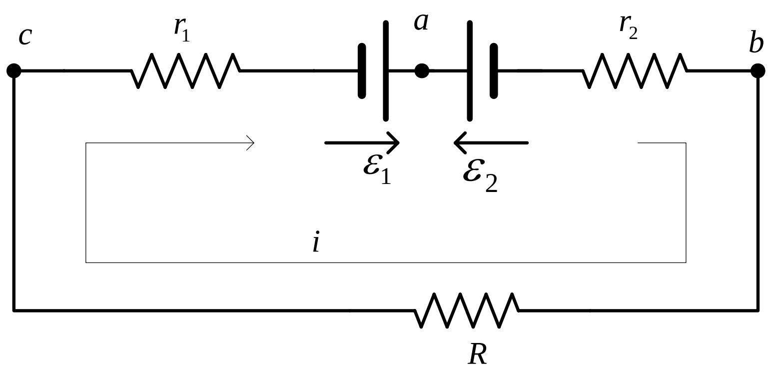
despejando la corriente i se obtiene

$$i = \frac{\varepsilon}{r + R}$$

Diferencias de potencial

Veamos como calcular la diferencia de potencial entre dos puntos en un circuito. En el circuito siguiente calculamos la entre la diferencia de potencial entre los puntos a y b, es decir

$$V_{ab} = V_a - V_b$$



Para encontrar esta relación comencemos en el punto b y sigamos el circuito hasta el punto a, pasando a través de la resistencia R contra la corriente. Si V_b y V_a Va son los potenciales en los puntos b y a, respectivamente, tenemos:

$$V_b - Ri - r_1 i + \varepsilon_1 = V_a$$ de donde

$$V_{ab} = V_a - V_b = -Ri - r_1 i + \varepsilon_1$$

Resumiendo podemos decir: Para encontrar la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera en un circuito se comienza en un punto cualquiera y se recorre el circuito hasta llegar al otro punto, siguiendo cualquier trayectoria y se suman algebraicamente los cambios de potencial que se encuentren. Esta suma algebraica será la diferencia de potencial. Este procedimiento es similar al que sirve para encontrar la corriente en un circuito cerrado, salvo que en este caso las diferencias de potencial se agregan en una parte del circuito y no en todo el circuito.

La diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera no puede tener más que un solo valor; así pues, debemos obtener el mismo resultado para todas las trayectorias que conecten estos puntos

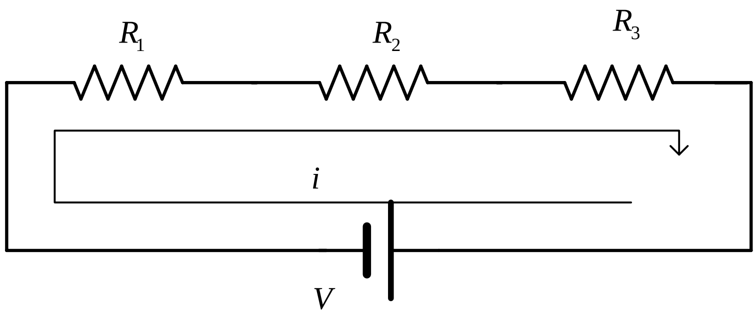
Resistencia equivalente - Resistencia en serie y en paralelo

Los circuitos eléctricos contienen generalmente combinaciones de resistencias. El concepto de resistencia equivalente de una combinación de resistencias es útil para calcular la corriente que pasa por las diferentes ramas de un circuito. *La resistencia equivalente de una combinación de resistencias es el valor de una única resistencia que reemplazada por la combinación produce el mismo efecto externo*. Para producir el mismo efecto externo que la combinación, la resistencia única debe transportar la misma corriente que la combinación cuando la diferencia de potencial entre sus extremos sea igual que en ésta.

Es decir, $R_{eq} = \dfrac{V}{i}$, donde R_{eq} es el valor de la resistencia equivalente a la combinación, V la diferencia de potencial entre los extremos de la combinación, e i la corriente que fluye a través de la combinación.

Resistencia equivalente de un conjunto de resistencias en serie

El circuito siguiente nos muestra tres resistencias de valores R_1 , R_2 y R_3 conectadas en serie. Las líneas rectas de conexión indican alambres de resistencia despreciable. También se muestra la variación del potencial en la dirección correspondiente al sentido de la corriente. Vamos a decir que dos o más resistencias están conectadas en serie cuando la corriente que circula por ellas es la misma.



Vemos que la diferencia de potencial entre los extremos de la combinación es igual a la suma de las diferencias de potencial entre extremos de cada resistencia:

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

Puesto que están en serie, debe pasar la misma corriente por las tres resistencias, de forma que

$$V_1 = iR_1$$
$$V_2 = iR_2$$
$$V_3 = iR_3$$

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = iR_1 + iR_2 + iR_3$$

$$V = i\left(R_1 + R_2 + R_3\right) \Rightarrow \frac{V}{i} = R_1 + R_2 + R_3$$

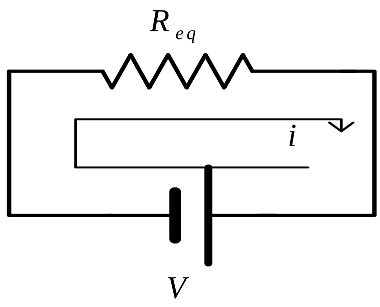
Por definición la resistencia equivalente es :

$$R_{eq} = \frac{V}{i} = R_1 + R_2 + R_3 \Rightarrow R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$$

Una única resistencia de valor $R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$, puede reemplazar a las tres resistencias, manteniendo el mismo efecto externo. Generalizando podemos decir que para resistencias conectadas en serie

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^{n} R_i \ ,$$

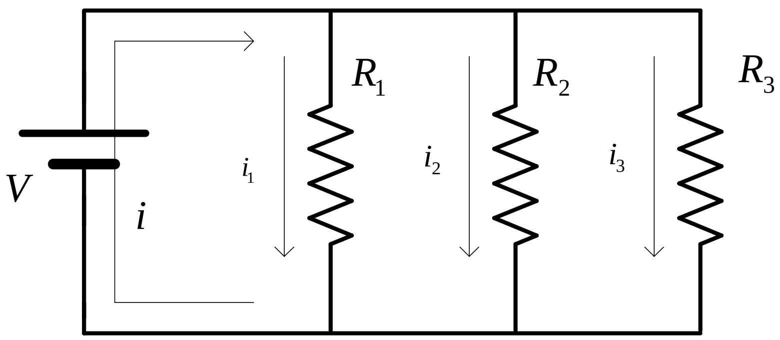
Para nuestro caso el circuito quedará



Donde $R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$

Resistencia equivalente de un conjunto de resistencias en paralelo

La condición para considerar a dos o más resistencias en paralelo es que la diferencia de potencial entre los extremos de ambas resistencias sea la misma.



La corriente i que entra en el conjunto de resistencias es igual a la suma de las corrientes que atraviesan cada resistencia.

$$i = i_1 + i_2 + i_3$$

como la diferencia de potencial en los bornes de cada resistencia es V, aplicando la Ley de Ohm nos queda:

$$i_1 = \frac{V}{R_1} \qquad i_2 = \frac{V}{R_2} \qquad i_3 = \frac{V}{R_3}$$

reemplazando será

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \frac{V}{R_3} \Rightarrow$$

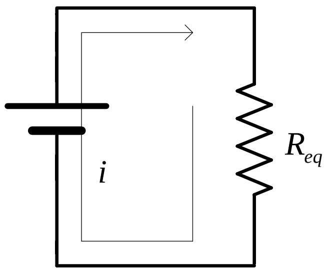
$$i = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) \Rightarrow \frac{i}{V} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$

y por definición de resistencia equivalente $R_{eq} = \dfrac{V}{i}$ de la ecuación anterior nos queda:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$ generalizando para n resistencias conectadas en paralelo será

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_n}$$

Nuestro circuito quedará

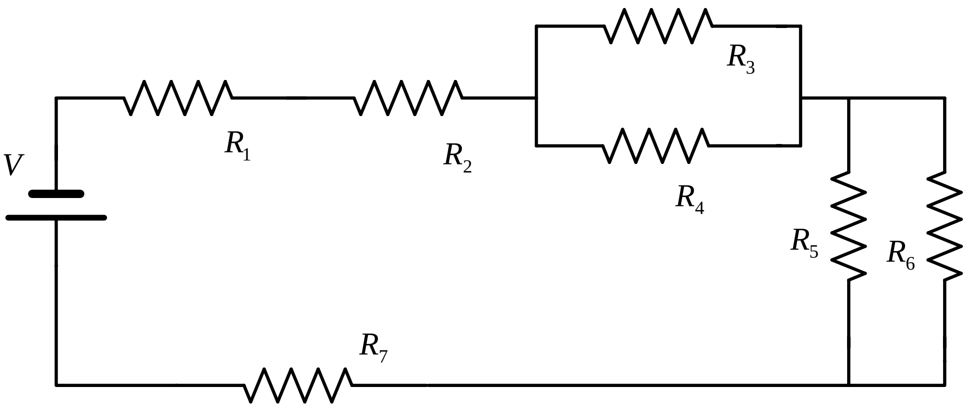


Donde se cumple que

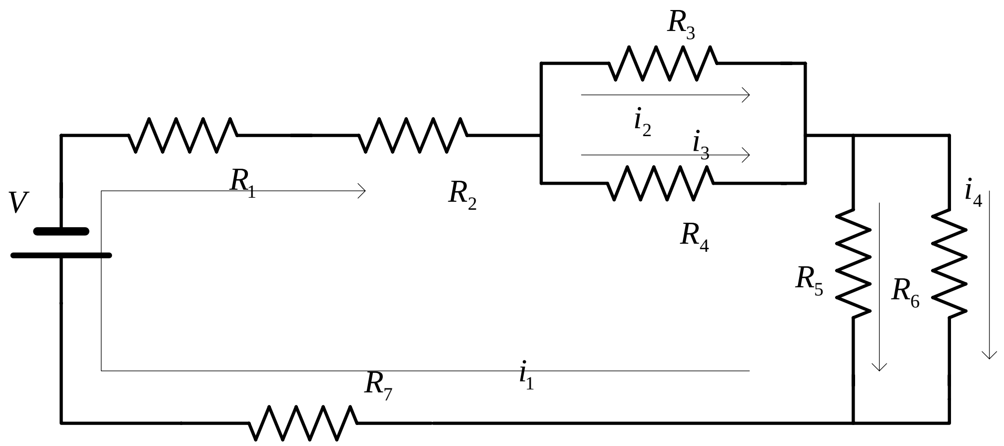
$$\frac{1}{R_{eq}} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$

Ejemplo de resolución de circuitos aplicando la Ley de Ohm

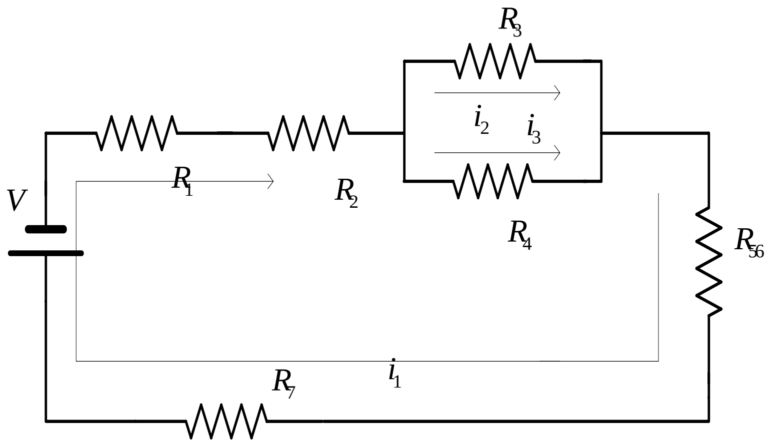
Entendemos por resolución de circuitos el hecho de calcular todas las corrientes eléctricas que circulan por el mismo. En el ejemplo siguiente nos limitamos a un circuito que tiene una sola batería, el método de resolución será tratar de encontrar la resistencia equivalente del circuito, luego por aplicación de la Ley de Ohm encontrar las corrientes por cada resistencia.



Como primer paso planteamos las corrientes por las resistencias



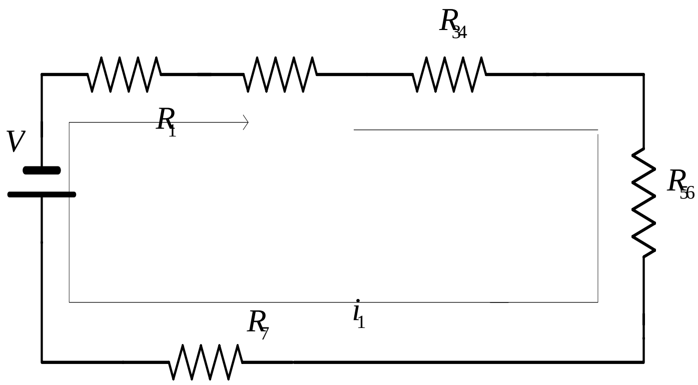
En el circuito anterior resolvemos el equivalente paralelo entre las resistencias R_5 y R_6



Donde

$$\frac{1}{R_{56}} = \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}$$

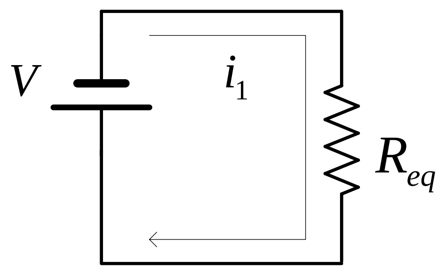
A continuación el paralelo entre R_3 y R_4



Donde

$$\frac{1}{R_{34}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}$$

Finalmente resolvemos el circuito serie



Donde

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_{34} + R_{56} + R_7$$

Aplicando la Ley de Ohm, en este ultimo circuito será:

$i_1 = \dfrac{V}{R_{eq}}$, conociendo el valor de i_1 , calculamos las diferencias de tensión sobre las resistencias equivalentes R_{34} y R_{56} , como

$V_{34} = R_{34} i_1$ y $V_{56} = R_{56} i_1$

Conociendo las diferencias de potencial, podemos calcular las corrientes sobre las resistencias restantes como:

$$i_2 = \frac{V_{34}}{R_3} \qquad i_3 = \frac{V_{34}}{R_4}$$

$$i_4 = \frac{V_{56}}{R_6} \qquad i_5 = \frac{V_{56}}{R_5}$$

Redes eléctricas – Leyes de Kirchhoff

A la hora de diseñar un circuito que realice alguna función, generalmente se cuenta con baterías u otras fuentes de fem conocida y resistencias de valor conocido. A menudo el problema reside en cómo hacer que una determinada corriente pase por un elemento particular. No siempre se pude hallar una única resistencia equivalente para todo el circuito, en consecuencia no podemos simplificarlo como el ejemplo anterior, en estos casos debemos aplicar las reglas conocidas como Leyes de Kirchhoff en honor al físico alemán Gustav. R. Kirchhoff (1824-1887) , que fue el primero en enunciarlas ,nos ayudan a encontrar las corrientes que pasan por las diferentes partes de un circuito. Estas reglas son: la regla de las mallas y la regla de los nudos.

Definimos algunos conceptos que usaremos en los próximos enunciados:

- Nodo o nudo a todo punto del circuito a donde concurren tres o más conductores.
- Rama es la parte del circuito comprendida entre dos nodos, dos nodos son consecutivos cuando para ir de uno al otro no es necesario pasar por un tercero, en una rama la corriente será siempre la misma.

- Corriente de rama, es una corriente auxiliar para el calculo, nace en un nodo y termina en otro
- Malla es cualquier camino conductor cerrado que se pueda distinguir en el circuito, esta formada por ramas, pero una rama puede pertenecer a distintas mallas.

La regla de los nodos o primera Ley de Kirchhoff

Para analizar un circuito con dos o más mallas debemos usar la regla de los nudos, además de la de las mallas que veremos a continuación. Ya dijimos que un nudo es un punto de un circuito donde confluyen más de dos conductores. La regla de los nudos dice que la suma de las corrientes que llegan a un nudo es igual a la suma de las corrientes que salen de él. Dado que la carga no se puede acumular en ningún punto de los conductores de conexión, la regla de los nudos es una consecuencia de la conservación de la carga. Podemos escribir la regla de los nudos como

$$\sum i_{entrantes} = \sum i_{salientes}$$

Por convención consideramos con signo positivos a las corrientes entrantes a un nodo y con signo negativo a las salientes, podemos escribir entonces que para cada nodo del circuito se cumple que

$$\sum i = 0$$

La regla de las mallas o segunda Ley de Kirchhoff

Esta regla es una consecuencia del principio de conservación de energía, la energía que gana la unidad de carga al recorrer la malla debe ser igual a la energía convertida en calor, mecánica o cualquier otro tipo de energía.

La regla de las mallas establece que la suma de las consecuencia de la diferencias de potencial encontradas en el recorrido de cualquier camino cerrado (malla) de un circuito es cero. Como el potencial está directamente relacionado con la energía potencial de los portadores, la regla de las mallas no es sino una forma de expresar la conservación de la energía. Podemos escribir la regla de las mallas como:

$\sum V = 0$ o también, teniendo en cuenta la presencia de baterías, fem, y resistencias como

$$\sum \varepsilon = \sum Ri$$

para escribir las ecuaciones originadas por la regla de las mallas debemos tener presente dos principios ya vistos:

1. Si se recorre una resistencia en el sentido de la corriente, el cambio de potencial es $-iR$; en el sentido contrario es $+iR$.
2. Si se atraviesa una fuente de fem en el sentido de la fem, el cambio de potencial es $+\varepsilon$; en el sentido contrario es $-\varepsilon$

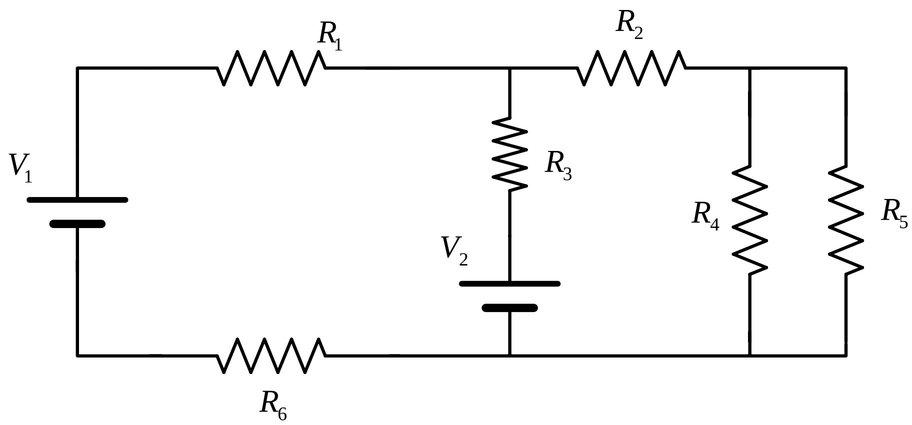
Resolución de circuitos mediante la aplicación de las Leyes de Kirchhoff

Entendemos por resolución de un circuito a calcular todas las corrientes que circulan por el mismo. Buscaremos plantear, basándonos en las reglas de Kirchhoff, tantas ecuaciones como corrientes incógnitas tengamos. A continuación resumimos los pasos a seguir:

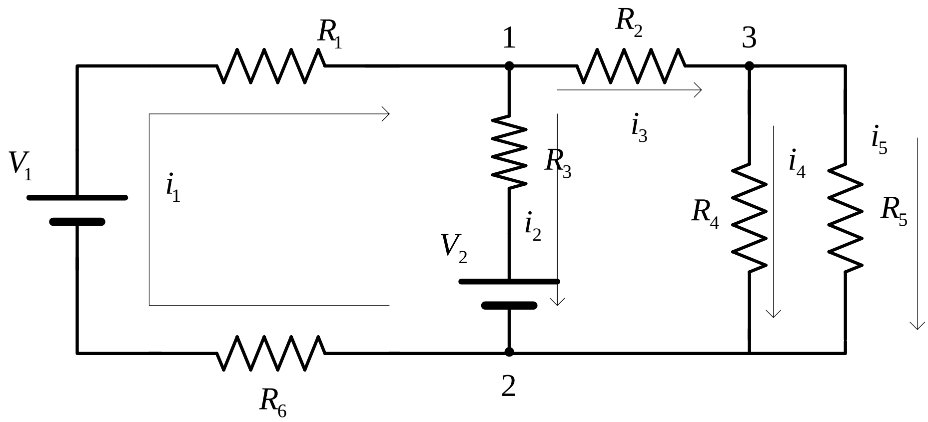
- Dado el circuito identificamos los nodos del mismo. Si bien no lo demostramos la cantidad de ecuaciones de nodos que podemos plantear es igual a $n-1$, siendo n el numero de nodos totales del circuito.
- Dibujamos las corrientes, dándole un sentido arbitrario de circulación. Si luego de resolverlo el valor de la corriente da positivo es sentido arbitrario es el correcto de la corriente, si da negativo es sentido es el contrario. Planteamos todas las ecuaciones de nodos independientes.
- Conociendo la cantidad de incógnitas, vemos la cantidad de ecuaciones de mallas que necesitaremos plantear, identificamos las mallas con las que vamos a trabajar y fijamos un sentido arbitrario para recorrerla. Planteamos las ecuaciones de mallas.
- Una vez que planteamos la cantidad de ecuaciones necesarias para resolver todas las corrientes incógnitas , utilizamos cualquier método, algebraico o no, para despejar las incógnitas.
- Muchas veces es posible realizar simplificaciones a nuestro circuito, por ejemplo encontrando resistencias equivalentes para una red de resistencias, a fin de disminuir el número de incógnitas con el cual trabajamos, debemos tener presente que al finalizar debemos hallar también las corrientes originales que pasa por cada resistencia.

Ejemplo de resolución de circuitos

Sea el siguiente circuito



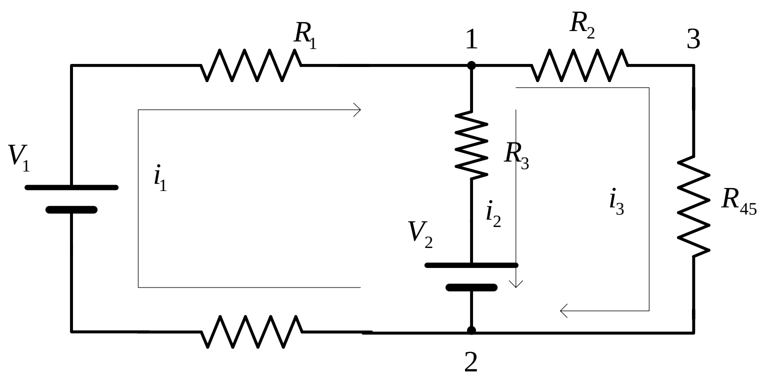
Identificamos los nodos, y planteamos todas las corrientes que circulan por el mismo



Podemos identificar tres nodos y cinco corrientes en el circuito, estas cinco corrientes son las que debemos hallar, vemos además que las resistencias R_4 y R_5 , están el paralelo, simplificamos nuestro circuito hallando la resistencia equivalente R_{45} , entonces

Podemos calcular R_{45} sabiendo que $$\frac{1}{R_{45}} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}$$

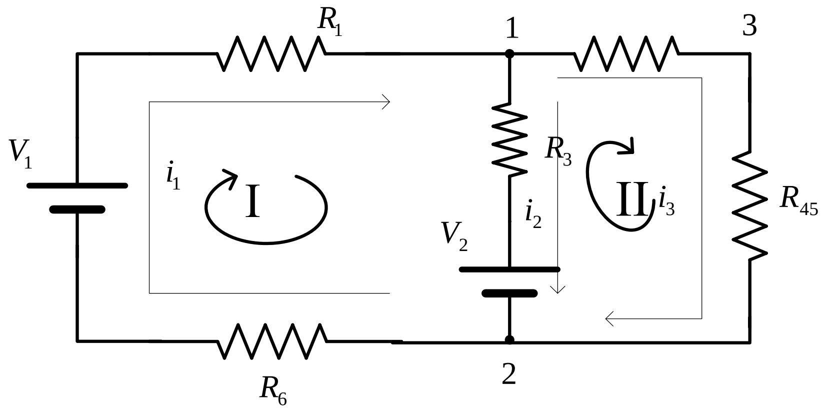
Con lo cual el circuito queda



Trabajamos con este circuito, en el vemos dos nodos independientes, en consecuencia planteamos la ecuación de nodos en el nodo 1 , haciendo $\sum i = 0$, será

$i_1 - i_2 - i_3 = 0$, primera ecuación a utilizar.

A continuación identificamos dos mallas cerradas, las que llamamos I y II , recorremos las mallas según el sentido que indica la flecha, este sentido es arbitrario, pero debe mantenerse para toda la malla



Planteamos las ecuaciones de mallas, $\sum V = \sum Ri$, que nos queda

en la malla I será: $V_1 - V_2 = R_1 i_1 + R_3 i_2 + R_6 i_1$

en la malla II será: $V_2 = -R_3 i_2 + R_2 i_3 + R_{45} i_3$

Tenemos entonces un sistema formado por tres ecuaciones y tres incógnitas que se puede resolver por cualquier método.

Nos queda hallar el valor de las corrientes i_4 y i_5 , para ello aplicamos la Ley de Ohm.

Calculamos la diferencia de potencial sobre la resistencia equivalente R_{45}

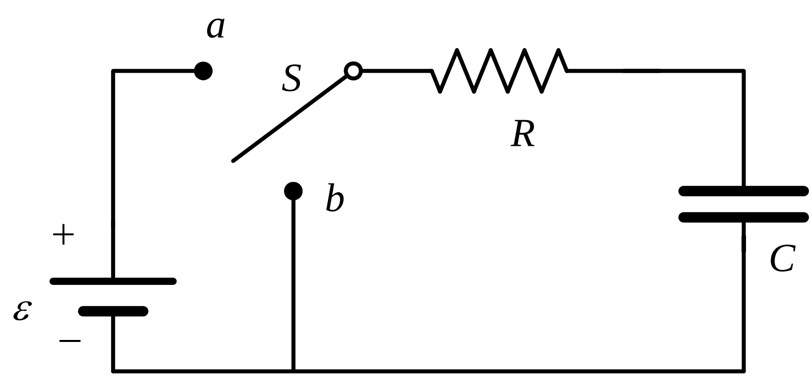
$V_{45} = R_{45} i_3$, y entonces será

$$i_4 = \frac{V_{45}}{R_4} \quad \text{y} \quad i_5 = \frac{V_{45}}{R_5}$$

Encontramos de esta manera las cinco corrientes, quedando el circuito resuelto.

Circuitos RC – Caga y descarga del condensador

Hasta ahora vimos circuitos en los cuales elementos eran resistencias y en los que las corrientes no variaban en el transcurso del tiempo. Ahora vamos a introducir al condensador como un elemento del circuito, lo que nos conducirá al concepto de corrientes variables con el tiempo. Consideramos el siguiente circuito,



Colocamos la llave en la posición a , en esta situación analizamos la corriente que comienza a circular. Realizamos nuestro análisis aplicando los principios de la conservación de la energía

En un tiempo dt se mueve por el circuito una carga dq , la cual será $dq = idt$

El trabajo realizado por la fuente ε lo podemos calcular como $dW = \varepsilon dq$, que debe ser igual a la energía que aparece como calor por el efecto Joule sobre la resistencia durante el tiempo dt , el cual lo podemos expresar como $dU_R = i^2 Rdt$

Más el aumento en la cantidad de energía que se almacena en el condensador

$dU_C = d\left(\dfrac{q^2}{2C}\right)$, escribimos la ecuación del balance de energías en el circuito como

$$\varepsilon dq = i^2 Rdt + d\left(\frac{q^2}{2C}\right)$$

, realizamos la derivación y nos queda

$$\varepsilon dq = i^2 Rdt + \frac{q}{C} dq$$

, dividiendo todos los miembros por dt

$$\varepsilon \frac{dq}{dt} = i^2 R + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt}$$

, pero $i = \dfrac{dq}{dt}$

quedando nuestra ecuación

$$\varepsilon = iR + \frac{q}{C}$$

Vemos que esta ecuación también responde a la regla de las mallas. Esta ecuación presenta dos variables, la carga q y la corriente eléctrica i, pero ambas están relacionadas $i = \frac{dq}{dt}$, entonces escribimos

$\varepsilon = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$, debemos encontrar la función $q(t)$ que satisfaga esta ecuación diferencial, para poder resolver esta ecuación debemos separar variables, de manera que queden en cada miembro de la igualdad

$$\varepsilon = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} \quad \rightarrow \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} - \frac{q}{RC}$$

$$\frac{dq}{dt} - \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{q}{RC} \quad \rightarrow \quad \frac{Rdq - \varepsilon dt}{Rdt} = -\frac{q}{RC}$$

$$Rdq - \varepsilon dt = -\frac{q}{RC}Rdt = -\frac{q}{C}dt$$

$$Rdq = -\frac{q}{C}dt + \varepsilon dt \quad \rightarrow \quad -R\frac{dq}{\left(\frac{q - C\varepsilon}{C}\right)} = dt$$

Multiplico y divido por -1

$$\frac{Rdq}{\left(-\frac{q}{C}\right) + \varepsilon} = dt \quad \rightarrow \quad -\frac{Rdq}{\left(\frac{q}{C} - \varepsilon\right)} = dt$$

$$-RC\frac{dq}{(q - C\varepsilon)} = dt \quad \rightarrow \quad \frac{dq}{(q - C\varepsilon)} = -\frac{1}{RC}dt$$

Tenemos las variables separadas, a continuación integramos ambos miembros de la igualdad

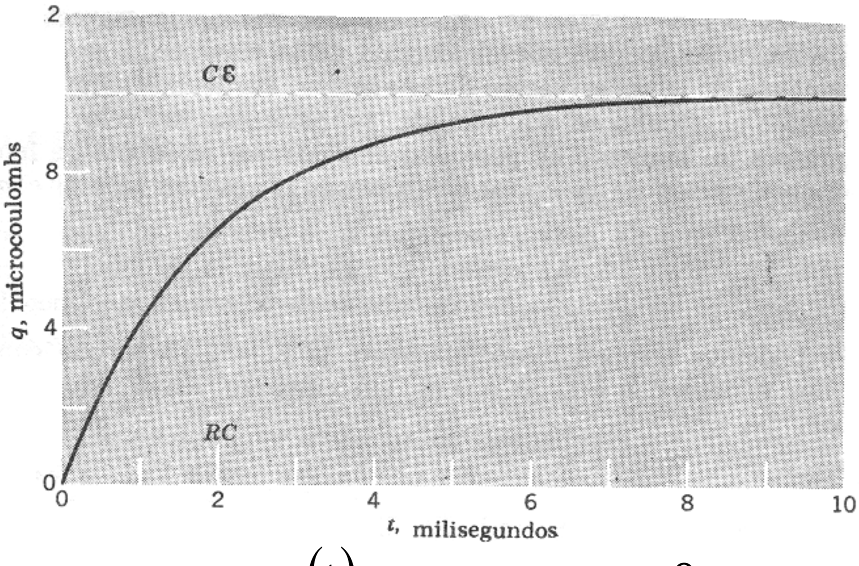
$$\int_0^q \frac{dq}{(q - C\varepsilon)} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt$$ Resolviendo la integral será

$$\ln\left(\frac{q - C\varepsilon}{-C\varepsilon}\right) = -\frac{1}{RC}t$$

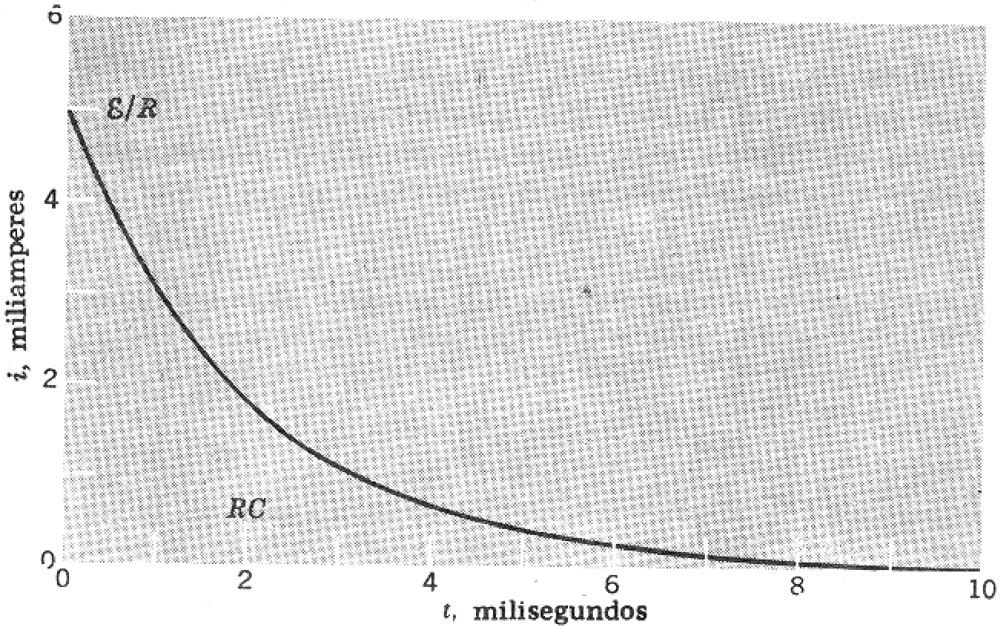
Derivando esta función encontramos la ecuación de la corriente i del circuito

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} e^{\frac{-t}{RC}}$$

Vemos algunos gráficos de estas funciones



la ecuación de la carga $q(t)$, vemos que para $t = 0$, se cumple que $q = 0$ y finalmente para $t \rightarrow \infty$ la carga alcanza el valor de $q = C\varepsilon$



En el gráfico superior vemos que para la corriente $i(t)$ en el instante $t = 0$ es igual

$i = \dfrac{\varepsilon}{R}$, y luego disminuye de tal manera que para $t \to \infty$, entonces $i \to 0$

La cantidad RC en las ecuaciones anteriores tiene las dimensiones de tiempo, puesto que el exponente no debe tener dimensiones y se llama la constante de tiempo capacitiva del circuito. Es que tarda el condensador en aumentar su carga en un factor $\left(1 - e^{-1}\right)$ de su valor de equilibrio, equivalente al sesenta y tres por ciento del valor total.

Supongamos ahora que el interruptor S del circuito ha estado en la posición a durante un tiempo t tal que $t >> RC$

El condensador ha quedado totalmente cargado para todos los fines prácticos. Entonces el interruptor S se pasa a la posición b , veamos como cambia en función del tiempo la carga del condensador y la corriente eléctrica

Con el interruptor S cerrado en b , no hay fem en el circuito y la regla de las mallas da

$$iR + \frac{q}{C} = 0$$

Si reemplazamos por $i = \dfrac{dq}{dt}$ podemos escribir la ecuación diferencial

$R\,\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{q}{C} = 0$ cuya solución es $q(t) = q_0\, e^{\frac{-t}{RC}}$, siendo q_0 la carga inicial del condensador , la constante de tiempo capacitiva aparece igual que en el proceso de carga, la corriente de descarga viene dada por la expresión

$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{q_0}{RC}\, e^{\frac{-t}{RC}}$$

el signo negativo pone de manifiesto que la corriente circula en sentido contrario a la del proceso de carga.

Como la carga inicial q_0 es $q_0 = C\,\varepsilon$, podemos reemplazar el la ecuación anterior y quedará

$i = -\dfrac{C\varepsilon}{RC}\, e^{\frac{-t}{RC}} = \dfrac{\varepsilon}{R}\, e^{\frac{-t}{RC}}$, donde para $t = 0$, se cumple que $i = \dfrac{\varepsilon}{R}$, lo cual es de esperar ya que la diferencia de potencial para el condensador totalmente cargado es ε