

UNIDAD IV: CAMPO MAGNETICO

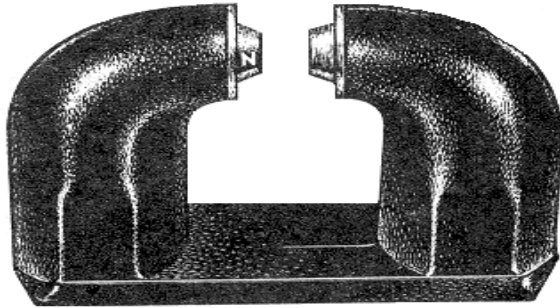
Antecedentes. Inducción magnética. Líneas de inducción. Flujo magnético. Unidades. Fuerzas magnéticas sobre una carga y una corriente eléctrica. Momento magnético sobre una espira. Movimientos de cargas en un campo magnético. Medida de la relación e/m. Efecto Hall. Ley de BIOT – SAVAT. Cálculo de B. Ley de AMPERE. Fuerza entre conductores paralelos. Definición de AMPERE. Campo magnético de un solenoide y un toroide.

Índice

<i>Índice</i>	1
<i>Antecedentes</i>	2
<i>Imanes y Magnetismo. El magnetismo de los imanes</i>	3
<i>Algunas características de las fuerzas magnéticas</i>	4
<i>Espectros magnéticos</i>	5
<i>Inducción magnética</i>	6
<i>Movimiento de partículas en un campo magnético estacionario</i>	8
<i>Fuerza sobre un conductor con corriente</i>	9
<i>Momento de una espira de corriente</i>	12
<i>Cargas aisladas en movimiento</i>	13
<i>Ley de Biot y Savart</i>	14
<i>Comparación entre la Ley de Coulomb y la Ley de Biot-Savart</i>	16
<i>Ejemplo: Campo magnético debido a una corriente rectilínea</i>	16
<i>Ley de Amper</i>	18
<i>Aplicaciones de las leyes de Biot-Savart y Amper</i>	20
<i>a - Campo magnético en el interior de un conductor</i>	20
<i>b - Campo magnético creado por una corriente circular</i>	20
<i>c - Campo magnético en un solenoide</i>	21
<i>d - Campo magnético en un toroide</i>	23
<i>Fuerzas entre corrientes</i>	24
<i>Definición de ampere internacional</i>	25
<i>Flujo magnético y la Ley de Gauss para el campo magnético</i>	26
<i>Corrientes de desplazamiento y la Ley de Amper</i>	27

Antecedentes

La ciencia del magnetismo nació de la observación de que ciertas "piedras", mineral magnetita o "piedra imán" , $F_{e_3}O_4$, atraían pedazos de hierro, este fenómeno se lo conoce desde la antigüedad, la palabra magnetismo viene de la región de Magnesia en el Asia Menor, que es uno de los lugares en donde se encontraban esas piedras. Uno de los primeros usos de los imanes fue el de la navegación, que si bien en Occidente comenzó alrededor del año 1000 de nuestra era, todo indica que en China se lo conocía desde mucho tiempo antes, se aprovecha el hecho de que otro "imán natural" es la Tierra misma, cuya acción orientadora sobre la aguja magnética de una brújula se ha conocido desde tiempos antiguos.



La figura muestra un imán permanente moderno, el descendiente directo de esos imanes naturales.

A pesar de sus orígenes ancestrales , el magnetismo comenzó a ser bien comprendido en el transcurso de los dos últimos siglos. Dicha experiencia fue efectuada por primera vez por Petrus Peregrinus, sabio francés que vivió sobre 1270 y a quien se debe el perfeccionamiento de la brújula, así como una importante aportación al estudio de los imanes.

En 1819 Hans Christian Oested (1777 – 1851) descubrió que una corriente eléctrica es una fuente de magnetismo, es decir podía desviar la orientación de la aguja de una brújula. Los experimentos realizados por Michael Faraday (1791-1867) y Joseph Henry (1797-1878) en los Estados Unidos permitieron establecer las leyes básicas que relacionan la electricidad con el magnetismo. Estos habían permanecido durante mucho tiempo en la historia de la ciencia como fenómenos independientes de los eléctricos. Pero el avance de la electricidad por un lado y del magnetismo por otro, preparo la síntesis de ambas partes de la física en una sola, el *electromagnetismo*, que reúne las relaciones mutuas existentes entre los campos magnéticos y las corrientes eléctricas. Esto permitió a James Clerk Maxwell enunciar su Teoría Electromagnética en la década de 1860, expresada en las llamadas Leyes de Maxwell, que son consideradas como una de las mejores construcciones conceptuales de la física clásica. Con el desarrollo de la teoría cuántica en este siglo aparecen las teorías microscópicas que explican las propiedades de los materiales magnéticos, siendo en la actualidad el magnetismo un área de la física de intensa investigación.

Imanes y Magnetismo. El magnetismo de los imanes

Cuando se estudian las acciones entre barras imantadas se observan fuerzas de atracción y repulsión, para tratar de explicar estos fenómenos se imaginó que en los extremos de la barra imantada había masas, cargas o polos magnéticos. El estudio del comportamiento de los imanes pone de manifiesto la existencia en cualquier imán de dos zonas extremas o polos en donde la acción magnética es más intensa, siendo prácticamente nula en el centro

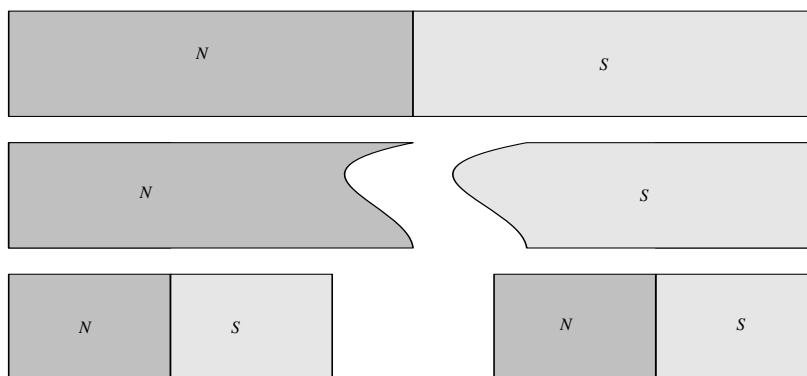
Los polos magnéticos de un imán no son equivalentes, como lo prueba el hecho de que enfrentando dos imanes idénticos se observen atracciones o repulsiones mutuas según se aproxime el primero al segundo por uno o por otro polo. Para distinguir los dos polos de un imán recto se les denomina polo norte y polo sur.



Esta referencia geográfica está relacionada con el hecho de que la Tierra se comporte como un gran imán. Las experiencias con brújulas indican que los polos del imán terrestre se encuentran próximos a los polos Sur - y Norte geográficos respectivamente. Por tal motivo, el polo de la brújula que se orienta aproximadamente hacia el Norte terrestre se denomina polo Norte y el opuesto constituye el polo Sur. Tal distinción entre polos magnéticos se puede extender a cualquier tipo de imanes. Las experiencias con imanes ponen de manifiesto que polos del mismo tipo (N-N y S-S) se repelen y polos de distinto tipo (N-S y S-N) se atraen.

Esta característica del magnetismo de los imanes fue explicada por los antiguos como la consecuencia de una propiedad más general de la naturaleza consistente en lo que ellos llamaron la «atracción de los opuestos».

Otra propiedad característica del comportamiento de los imanes consiste en la imposibilidad de aislar sus polos magnéticos. Si se corta un imán recto en dos mitades se reproducen otros dos imanes con sus respectivos polos norte y sur. Y lo mismo sucederá si se repite el procedimiento nuevamente con cada uno de ellos. No es posible, entonces, obtener un imán con un solo polo magnético semejante a un cuerpo cargado con electricidad de un solo signo.



Algunas características de las fuerzas magnéticas

A diferencia de lo que sucede con una barra de ámbar electrizada por frotamiento, la cual atrae hacia sí todo tipo de objetos con la condición de que sean ligeros, un imán ordinario sólo ejerce fuerzas magnéticas sobre cierto tipo de materiales, en particular sobre el hierro. Este fue uno de los obstáculos que impidieron una aproximación más temprana entre el estudio de la electricidad y el del magnetismo. Las fuerzas magnéticas son fuerzas de acción a distancia, es decir, se producen sin que exista contacto físico entre los dos imanes. Esta circunstancia, que excitó la imaginación de los filósofos antiguos por su difícil explicación, contribuyó más adelante al desarrollo del concepto de campo de fuerzas. Experiencias con imanes y dinamómetros permiten sostener que la intensidad de la fuerza magnética de interacción entre imanes disminuye con el cuadrado de la distancia que los separa:

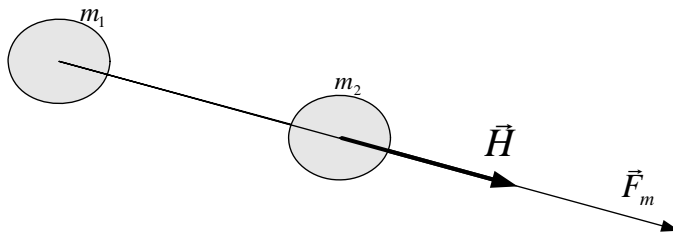
$F_m \propto \frac{1}{r^2}$, Mediante experiencias similares a las realizadas por Coulomb se pudo expresar la

siguiente ecuación $F_m = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{m_1 m_2}{r^2}$ donde m_1 y m_2 son las masas magnéticas y μ_0 es una constante llamada permeabilidad magnética del vacío. Así como vimos el concepto de campo eléctrico, podemos asociar la acción a distancias que producen las masas magnéticas, con el concepto

de un campo. El vector que represente este campo es el vector \vec{H} , llamado *vector intensidad de campo magnético* y se lo define en dirección, sentido y modulo mediante la relación

$$\vec{H} = \frac{\vec{F}_m}{m}$$

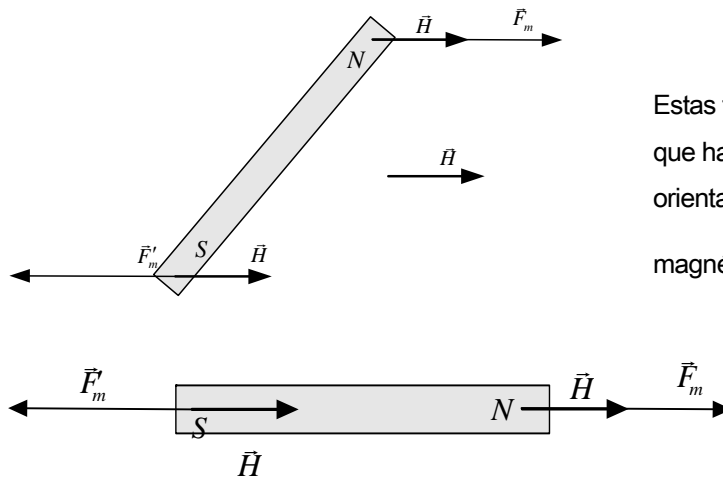
Donde m es una masa magnética norte y \vec{F}_m la fuerza que actúa sobre ella. Si consideramos una masa unitaria podemos decir que \vec{H} es la fuerza que actúa sobre la unidad de masa colocada en el punto donde se estudia el vector \vec{H} . Apliquemos estas ideas a la ecuación de nos define la fuerza magnética \vec{F}_m , suponemos que $m_1 = m$ es la masa magnética que nos crea el campo y m_2 una masa cualquiera, resulta



$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{m}{r^2}$$

queda finalmente la ecuación $\vec{H} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{m}{r^2}$ Ya vimos que no es posible aislar una masa magnética sur cortando la barra por la mitad, en este aspecto las cargas magnéticas se comportan en forma diferente a lo que se comportan las cargas eléctricas. Los polos siempre aparecen de a pares, formando lo que se llama dipolo magnético. Colocamos un dipolo magnético en un campo magnético,

aparece una fuerza \vec{F}_m , en el sentido de \vec{H} sobre el polo norte y otra fuerza \vec{F}'_m de la misma magnitud pero de sentido contrario a \vec{H} en el polo sur.



Estas fuerzas constituyen un par que hacen girar al dipolo hasta orientarlo en la dirección del campo magnético \vec{H}

Espectros magnéticos

El hecho de que los dipolos magnéticos se ordenen en función de la intensidad del campo magnético \vec{H} permite obtener un mapa del mismo. Cuando se espolvorea en una cartulina o en una lámina de vidrio, situadas sobre un imán, limaduras de hierro, éstas se orientan de un modo regular a lo largo de líneas que unen entre sí los dos polos del imán. Lo que sucede es que cada limadura se comporta como una pequeña brújula que se orienta en cada punto como consecuencia de las fuerzas magnéticas que soporta. La imagen que forma este conjunto de limaduras alineadas constituye el espectro magnético del imán. Así las limaduras de hierro espolvoreadas sobre un imán se orientan a lo largo de las líneas de

fuerza del campo magnético correspondiente y el espectro magnético resultante proporciona una representación espacial del campo. Por convenio se considera que las líneas de fuerza salen del polo Norte y se dirigen al polo Sur.

El espectro magnético de un imán permite no sólo distinguir con claridad los polos magnéticos, sino que además proporciona una representación de la influencia magnética del imán en el espacio que le rodea. Así una pareja de imanes enfrentados por sus polos de igual tipo dará lugar a un espectro magnético diferente al que se obtiene cuando se colocan de modo que sean los polos opuestos los más próximos. Esta imagen física de la influencia de los imanes sobre el espacio que les rodea hace posible una aproximación relativamente directa a la idea de campo magnético.

Inducción magnética

En el año 1820, dijimos que Oesed observó que la aguja de una brújula colocada debajo o arriba de un conductor rectilíneo giraba hasta colocarse perpendicular al mismo cuando circulaba una corriente eléctrica. La experiencia probó que las corrientes eléctricas producían efectos magnéticos o sea originaban un campo magnético en el espacio que rodea al conductor con la siguiente notable diferencia: las líneas de fuerza magnética son cerradas, no proceden de una fuente y no terminan en un sumidero. Podemos decir que la corriente eléctrica se comporta como un remolino con las líneas de fuerza. Los campos magnéticos ejercen fuerzas sobre las cargas en movimiento. La presencia de este nuevo elemento, es decir la carga móvil, hace necesario utilizar un nuevo vector para describir las propiedades de los campos magnéticos, este vector magnético se denomina *inducción magnética* \vec{B} y en el vacío este vector está relacionado

con \vec{H} mediante la expresión
$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

Como veremos más adelante, cuando estudiamos los campos magnéticos dentro de las sustancias magnéticas, como el hierro o el acero, deja de ser válida esta relación.

La inducción magnética es un vector tal que en cada punto coincide en dirección y sentido con los de la línea de fuerza magnética correspondiente. Las brújulas, al alinearse a lo largo de las líneas de fuerza del campo magnético, indican la dirección y el sentido de la intensidad del campo de inducción \vec{B} .

La obtención de una expresión para \vec{B} se deriva de la observación experimental de lo que le sucede a una carga q en movimiento en presencia de un campo magnético, suponemos que no existe campo gravitatorio ni eléctrico. Si la carga estuviera en reposo no se apreciaría ninguna fuerza mutua; sin embargo, si la carga q se mueve dentro del campo creado por un imán se observa cómo su trayectoria

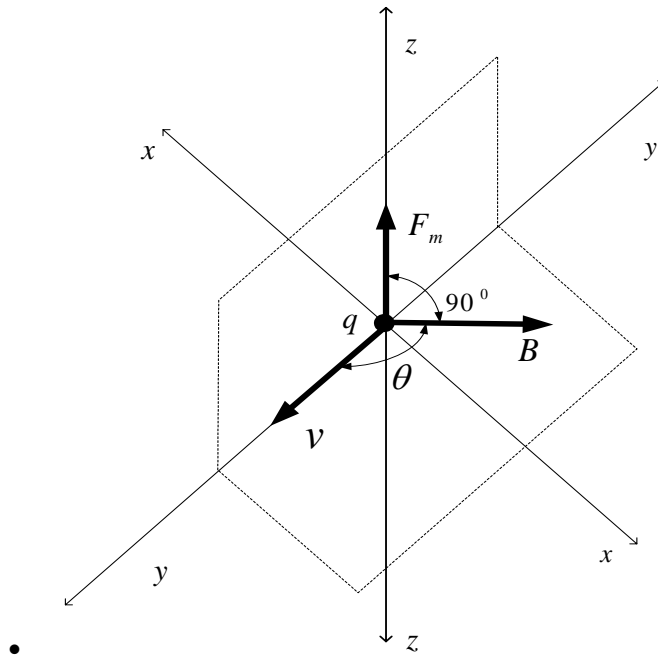
se curva, lo cual indica que una fuerza magnética F_m se está ejerciendo sobre ella.

Del estudio experimental de este fenómeno se deduce que:

- F_m es tanto mayor cuanto mayor es la magnitud de la carga q y su sentido depende del signo

de la carga.

- F_m es tanto mayor cuanto mayor es la velocidad \vec{v} de la carga q .
- F_m se hace máxima cuando la carga q se mueve en una dirección perpendicular a las líneas de fuerza y resulta nula cuando se mueve paralelamente a ella.
- La dirección de la fuerza magnética en un punto resulta perpendicular al plano definido por las líneas de fuerza a nivel de ese punto y por la dirección del movimiento de la carga q , o lo que es lo mismo, F_m es perpendicular al plano formado por los vectores \vec{B} y \vec{v} .



Las conclusiones experimentales quedan resumidas en la expresión

$$F_m = qvB \text{sen } \theta$$

Donde B representa el módulo o magnitud de la inducción del campo magnético y θ el ángulo que forman los vectores \vec{B} y \vec{v} .

Dado que F_m , \vec{B} y \vec{v} son vectores, es necesario además reunir en una regla lo relativo a la relación entre sus direcciones y sentidos: el vector F_m es perpendicular al plano formado por los vectores \vec{B} y \vec{v} y su sentido coincide con el de avance de un tornillo que se hiciera girar en el sentido que va de \vec{B} a \vec{v} (por el camino más corto). Dicha regla, es llamada del tornillo de Maxwell es equivalente a la de la mano izquierda, según la cual las direcciones y sentidos de los vectores F_m , \vec{v} y \vec{B} vienen dados por los dedos pulgar, índice y mayor de la mano izquierda.

La ecuación $F_m = qvB \sin \theta$ constituye una definición indirecta del módulo o magnitud de la intensidad del vector inducción de campo magnético, dado que a partir de ella se tiene:

$$B = \frac{F_m}{qv \sin \theta}$$

La dirección de \vec{B} es precisamente aquella en la que debería desplazarse q para que F_m fuera nula; es decir, la de las líneas de fuerza.

En la fórmula $F_m = qvB \sin \theta$ es posible identificar el producto vectorial

$vB \sin \theta = \vec{v} \times \vec{B}$ Podemos entonces expresar la fuerza magnética en forma general como

$$\vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

La unidad del campo magnético en el SI es el tesla T y representa la intensidad que ha de tener un campo magnético para que una carga de 1 C, moviéndose en su interior a una velocidad de 1 m/s perpendicularmente a la dirección del campo, experimente una fuerza magnética de 1 newton.

Aunque no pertenece al SI, con cierta frecuencia se emplea el gauss G :

$$T = 10^4 G$$

Movimiento de partículas en un campo magnético estacionario

Los campos eléctricos y magnéticos desvían ambos las trayectorias de las cargas en movimiento, pero lo hacen de modos diferentes.

Una partícula cargada que se mueve en un campo eléctrico \vec{E} , como el producido entre las dos placas de un condensador plano dispuesto horizontalmente sufre una fuerza eléctrica F_e en la misma dirección del campo \vec{E} que curva su trayectoria. Si la partícula alcanza el espacio comprendido entre las dos placas según una dirección paralela, se desviará hacia la placa positiva (+) si su carga es negativa y hacia

la placa negativa (-) en caso contrario, pero siempre en un plano vertical, es decir, perpendicular a ambas placas. Dicho plano es el definido por los vectores \vec{E} y \vec{v}

Si las dos placas del condensador se sustituyen por los dos polos de un imán de herradura, la partícula sufre una fuerza magnética F_m que según la regla de la mano izquierda es perpendicular a los vectores \vec{v} y \vec{B} . En este caso la trayectoria de la partícula cargada se desvía en el plano horizontal. Si combinamos la fuerza eléctrica y la magnética actuando simultáneamente sobre una partícula de carga q , moviéndose con velocidad \vec{v} tenemos

$$F_t = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

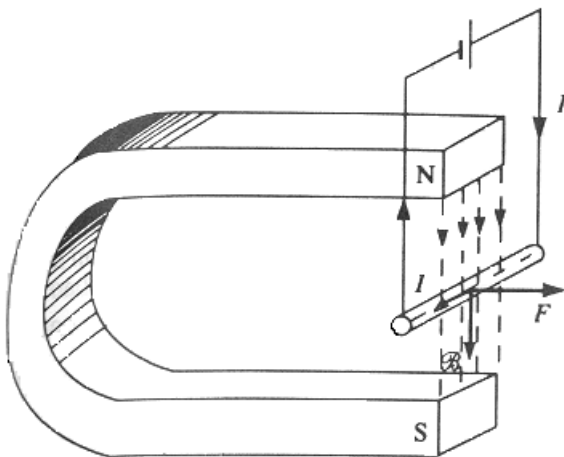
Esta fuerza se la conoce como *fuerza de Lorentz*

Fuerza sobre un conductor con corriente

Hemos visto que cuando una partícula de carga q , moviéndose con velocidad \vec{v} en un campo de inducción magnética \vec{B} , aparece una fuerza magnética F_m , dada por $\vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B})$

Como la corriente en un conductor esta formada por un conjunto de portadores de carga en movimiento, podemos utilizar esta ecuación para obtener la fuerza magnética que ejerce un campo magnético sobre un conductor por el que circula una corriente i .

Consideremos un trozo de alambre conductor delgado, recto, de longitud d y de sección transversal A , por el que circula una corriente i , y que esta en una zona del espacio con campo de inducción magnética uniforme \vec{B} . Como se ve en la figura



Calcularemos la fuerza total que actúa sobre los portadores utilizando la velocidad media o de arrastre v_d con que se desplazan en el seno del conductor

Si n es el número de portadores por unidad de volumen, el número que hay en la distancia d es $N = nVol = ndA$, y la carga total es $q = Ne = nedA$. Donde e es la carga de electrón.

Si v_d es la velocidad de arrastre de los portadores en el conductor, la fuerza que actúa sobre él es:

$$\vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B}) = neAd(\vec{v}_d \times \vec{B})$$

Como la corriente circula en la misma dirección en la que tomamos nuestra distancia d , podemos escribir el producto $d\vec{v}_d$ como:

$d\vec{v}_d = dv_d \vec{i} = v_d \vec{d}$, siendo \vec{i} el versor en esa dirección reemplazando en la expresión de la fuerza

$$\vec{F}_m = neAv_d(\vec{d} \times \vec{B})$$

Recordando que la corriente eléctrica es

$$i = neAv_d$$

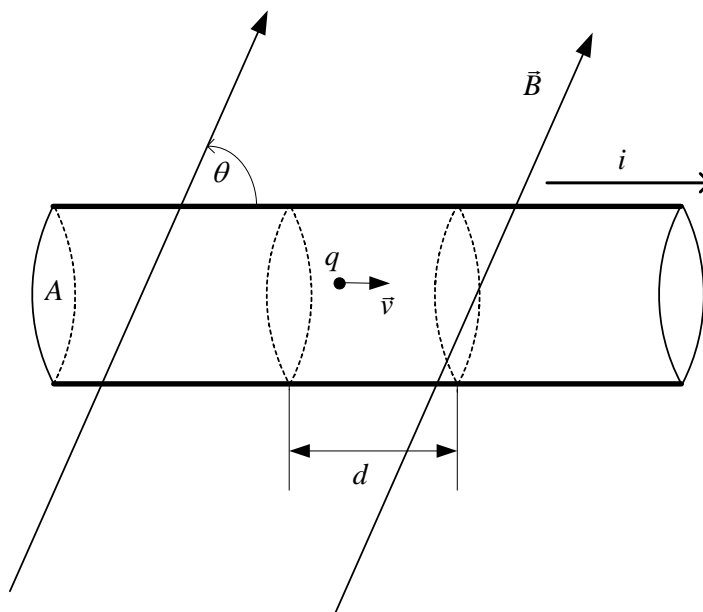
$$\vec{F}_m = i(\vec{d} \times \vec{B})$$

tenemos finalmente

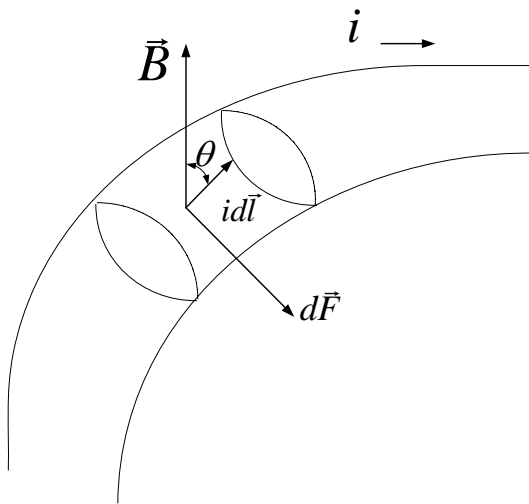
La fuerza magnética sobre este trozo de alambre conductor es perpendicular a \vec{d} y a \vec{B} .

El módulo de la fuerza está dado por $F_m = idB \sin \theta$ donde θ es el ángulo entre \vec{d} y \vec{B} .

La ecuación que hemos obtenido está restringida a conductores delgados rectos y campos magnéticos uniformes, como el de la figura siguiente.



En general tendremos que trabajar con conductores que no son rectos y campos magnéticos que no son uniformes. Para encontrar una expresión válida en estos casos, trabajaremos con una longitud infinitesimal dl de un conductor por el que pasa una corriente i , definimos un elemento de corriente infinitesimal como el producto de la corriente i por el vector desplazamiento $d\vec{l}$, cuya dirección viene dada por el sentido de la corriente en dicho elemento. El trozo de alambre que contiene al elemento de corriente infinitesimal puede ser considerado recto y también puede considerarse que B no varía a lo largo de la pequeña longitud dl



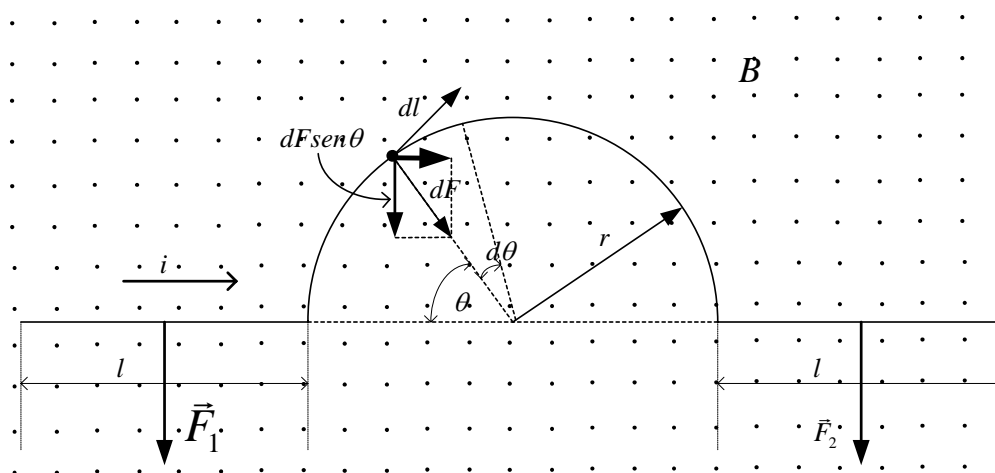
Entonces será:

$$d\vec{F} = i d\vec{l} \times \vec{B}$$

Entonces para calcular la fuerza magnética total, tendremos que realizar la integración a lo largo del conductor

$$\vec{F} = \int_L i d\vec{l} \times \vec{B}$$

Vemos un ejemplo, si tenemos un alambre doblado como se ve en la figura siguiente, el cual lleva una corriente i y está colocado en un campo magnético uniforme de inducción magnética B , saliente al plano, los puntos en la figura indican el vector B , saliente al plano



La fuerza sobre cada tramo recto es: $F_1 = F_2 = ilB$ y apunta hacia abajo

En el tramo circular un segmento de alambre de longitud $d\vec{l}$ experimenta una fuerza $d\vec{F}$ cuya magnitud es $dF = iBdl = iB(Rd\theta)$, y cuya dirección es radial hacia el centro, la fuerza total sobre el semicírculo será:

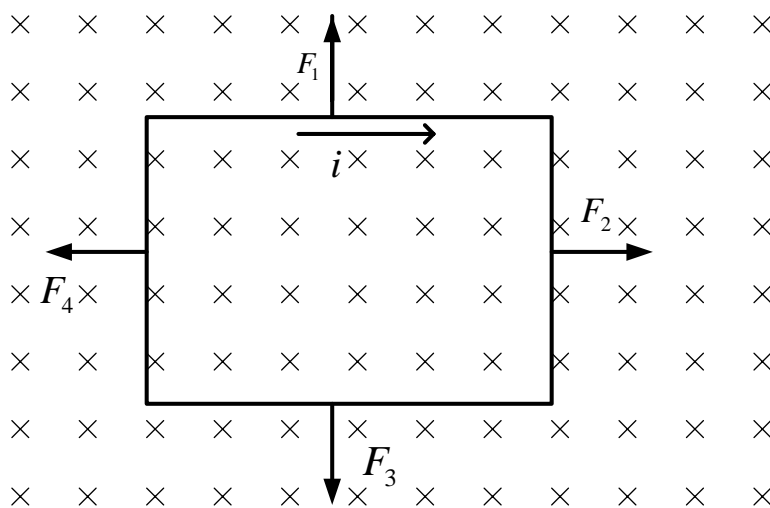
$$F = \int_0^\pi dF \sin\theta = \int_0^\pi (iBRd\theta) \sin\theta = iBR \int_0^\pi \sin\theta d\theta = 2iBR$$

La fuerza resultante sobre todo el alambre es:

$$F_T = F_1 + F_2 + F = 2ilB + 2iBR = 2iB(l + R)$$

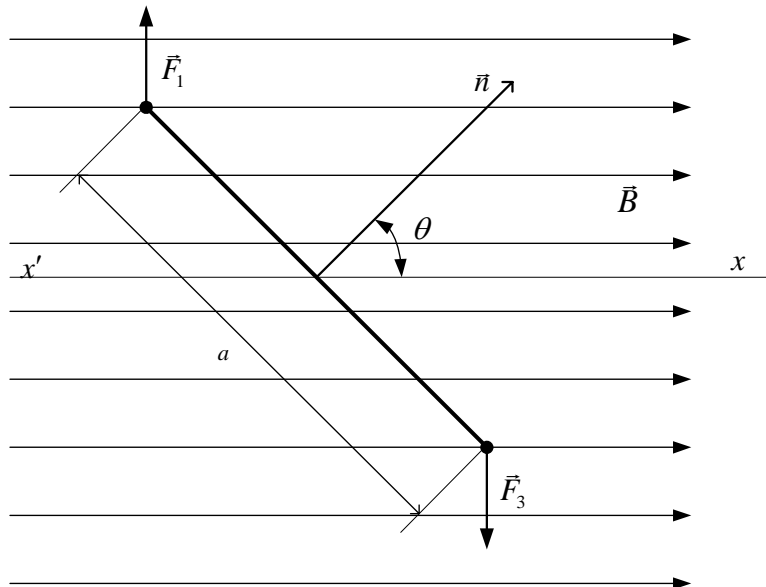
Momento de una espira de corriente

En la figura vemos una espira rectangular de alambre de cuyos lados tienen una longitud a y un ancho b colocada en un campo de inducción uniforme B , el plano forma un ángulo θ con la dirección de B . La fuerza neta sobre la espira es la resultante de las fuerzas sobre los cuatro lados de ella.



Las fuerzas F_2 y F_4 tienen la misma intensidad, la misma línea de acción, pero son de sentido contrario, por lo tanto tomadas juntas no tienen ningún efecto sobre el movimiento de la espira

Vista desde otro ángulo será



La magnitud de F_1 y F_3 es iab estas fuerzas tienen sentido contrario, pero no tienen la misma recta de acción si la bobina está en la posición del ejemplo

Hay en consecuencia un momento neto que tiende a hacer girar la bobina alrededor del eje xx' . La magnitud de este momento τ se encuentra calculando el momento producido por una de las fuerzas y duplicándolo. Nos queda entonces

$$\tau = 2(iaB) \left(\frac{b}{2} \right) \text{sen} \theta = iabB \text{sen} \theta$$

Considerando que el área de la espira es

$$A = ab \quad \text{nos queda}$$

$$\tau = (iB)A \text{sen} \theta$$

Este momento es el que actúa sobre cada vuelta de la bobina. Si hay N vueltas el momento sobre toda la bobina será

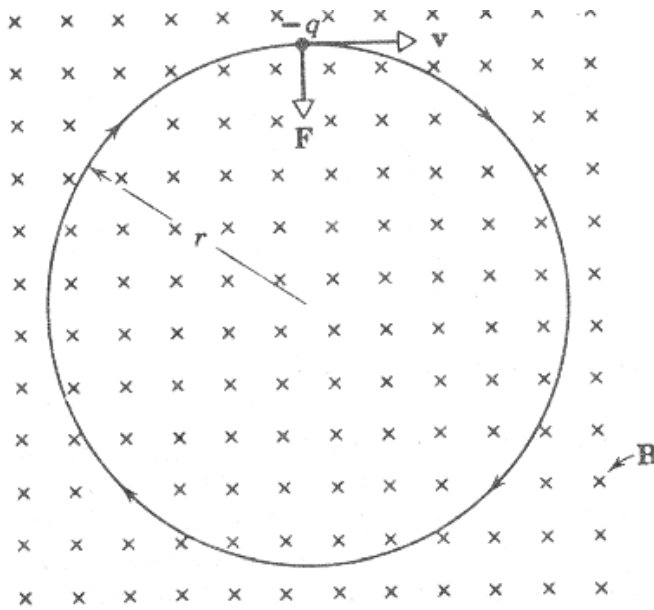
$$\tau = NiBAsen\theta$$

Se puede demostrar que esta ecuación es válida para todas las espiras planas de área A , sean rectangulares o no.

Un momento sobre una espira por la que pasa corriente es el principio fundamental de la operación del motor eléctrico y de la mayoría de los medidores analógicos usados para medir corrientes o diferencia de potencial.

Cargas aisladas en movimiento

En la figura vemos una partícula cargada negativamente que se introduce con una velocidad v en un campo magnético uniforme \vec{B} , suponemos que v es perpendicular a \vec{B} , y por lo tanto esta en el plano de la figura. La partícula experimentará una fuerza desviadora lateral, que también estará en el plano de la figura, dada por $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = qvB \text{sen } 90 = qvB$



Este caso es similar al de una piedra que se pone a girar en un círculo, también hay una fuerza, que es la tensión de cable. La partícula cargada, al igual que la piedra, se mueven con velocidad constante en una trayectoria circular

De la segunda Ley de Newton tenemos que: $qvB = \frac{mv^2}{r}$ Despejando nos da

el radio de la trayectoria $r = \frac{mv}{qB}$

La velocidad angular está dada por $\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}$, y la frecuencia angular será

$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m}$, que no depende de la velocidad de la partícula. Las partículas rápidas se mueven en círculos grandes y las lentas en círculos pequeños. Todas requieren el mismo tiempo para completar una revolución en el campo.

La frecuencia f , es una frecuencia característica para la partícula cargada en el campo, recibe el nombre de frecuencia del ciclotrón.

Ley de Biot y Savart

Tras el descubrimiento de Oersted, de que la corriente eléctrica es una fuente de campo magnético, experimentos llevados a cabo por Ampere, Biot y Savart permitieron obtener la ley que relaciona a las corrientes y los campos magnéticos creados por ellas, conocida como ley de Biot y Savart..

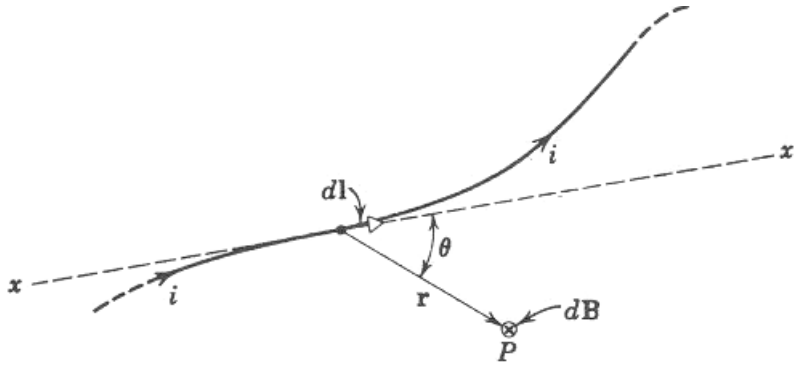
La Ley de Biot y Savart es análoga en el magnetismo a la ley de Coulomb es la electrostática, en base a esta podemos expresar el campo eléctrico producido por una distribución de cargas,

considerando un elemento diferencial de dicha distribución, de manera tal que el campo eléctrico producido por esta distribución viene dado por:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{r}, \text{ integrando sobre toda la distribución de cargas se obtiene el campo}$$

eléctrico
$$\vec{E} = \int d\vec{E} .$$

De igual forma vemos ahora una distribución arbitraria de corrientes como muestra la figura:



La corriente i circula por un alambre curvo. Consideramos como un elemento típico de corriente un tramo del conductor dl que lleva la corriente i , su dirección es la tangente al conductor, (línea punteada), debemos pensar que un circuito está constituido por un gran número de elementos de corrientes colocados uno tras otro. Llamamos P al punto en el cual queremos conocer el campo de inducción magnética $d\vec{B}$, asociada con el elemento de corriente. Según la Ley de Biot-Savart, la magnitud de dB está dada por la siguiente expresión

$$dB = \frac{\mu_0 i dl \sin\theta}{4\pi r^2},$$

Siendo \vec{r} un vector de recorrido desde el elemento hacia P y θ es el ángulo entre este vector y dl , La dirección de $d\vec{B}$ es la del vector resultante de $d\vec{l} \times \vec{r}$. En nuestro caso está dirigido entrando en la hoja y perpendicular al plano de ella.

El campo resultante en P se encuentra integrando

$$\vec{B} = \int d\vec{B}, \text{ que lo podemos expresar como } \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int i \frac{dl \times \vec{r}}{r^2}$$

Donde $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \frac{Tm}{A}$ es la permeabilidad magnética en el vacío. Las propiedades magnéticas del vacío son prácticamente iguales a las del aire, por lo que podemos usar μ_0 en presencia de aire.

Comparación entre la Ley de Coulomb y la Ley de Biot-Savart

Existen similitudes entre la Ley de Biot-Savart para el campo magnético y la Ley de Coulomb para el campo eléctrico:

Ambas poseen una dependencia $1/r^2$ con la distancia que hay desde el punto fuente al punto considerado donde se calcula el campo, siendo idl la fuente del campo $d\vec{B}$ y dq la fuente del campo $d\vec{E}$.

La constante $1/4\pi\epsilon_0$ da la fuerza de la interacción eléctrica y la constante $\mu_0/4\pi$ da la fuerza de la interacción magnética.

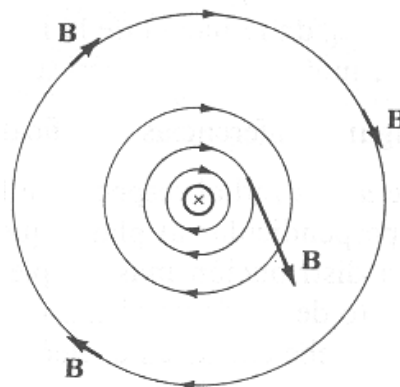
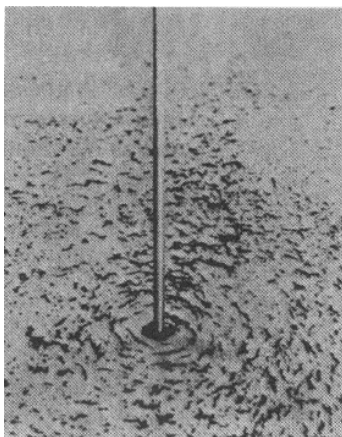
También existen algunas diferencias significativas entre estas dos leyes

La dirección de $d\vec{E}$ es radial respecto de la carga fuente dq , mientras que la dirección de $d\vec{B}$ es perpendicular al plano que contiene a idl y a \vec{r} .

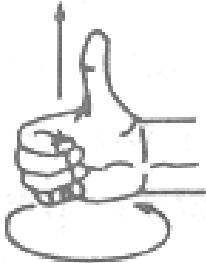
Mientras que la distribución más simple de carga es la carga puntual aislada, un único elemento de corriente aislado no existe en una corriente estacionaria. Por lo tanto la carga debe entrar en el elemento de corriente por un extremo y salir por el otro, por lo que siempre están presente varios elementos de corriente, por que siempre tenemos que considerar la integral de línea que se extiende a lo largo de toda la distribución de corriente. El campo magnético en un punto es la superposición lineal de las contribuciones vectoriales debidas a cada uno de los elementos infinitesimales de corriente.

Ejemplo: Campo magnético debido a una corriente rectilínea

La repetición de la experiencia de Oersted con la ayuda de limaduras de hierro dispuestas sobre una cartulina perpendicular al hilo conductor rectilíneo, pone de manifiesto una estructura de líneas de fuerza del campo magnético resultante, formando circunferencias concéntricas que rodean al hilo.



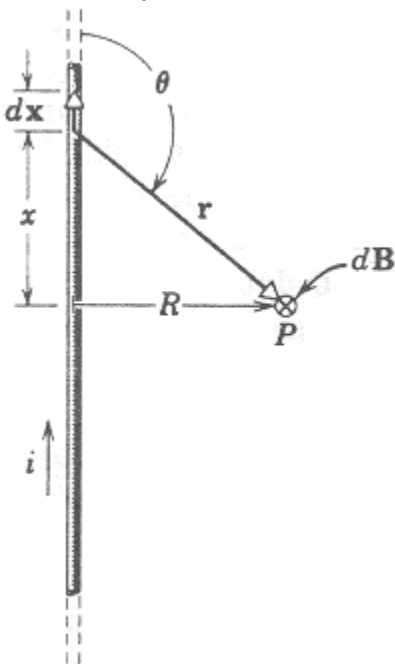
Su sentido puede relacionarse con el convencional de la corriente sustituyendo las limaduras por pequeñas brújulas. En tal caso se observa que el polo norte de cada brújula (que apunta siempre en el sentido del vector intensidad de campo \vec{B}) se corresponde con la indicación de los dedos restantes de la mano derecha semicerrada en torno a la corriente, cuando el pulgar apunta en el sentido de dicha corriente.



Esta es la *regla de la mano derecha*, permite relacionar el sentido de una corriente rectilínea con el sentido de las líneas de fuerza del campo magnético \vec{B} creado por ella.

Experiencias más detalladas indican que la intensidad del campo \vec{B} depende de las características del medio que rodea a la corriente rectilínea, siendo tanto mayor cuando mayor es la intensidad de corriente i y cuanto menor es la distancia r al hilo conductor. Calcularemos \vec{B} utilizando la ley de Biot y Savart:

Tomamos el eje x coincidente con el conductor



$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dx \sin \theta}{r^2} \quad \text{como vemos en la figura } r, \theta \text{ y } x$$

Podemos escribir:

$$r = \sqrt{x^2 + R^2} \quad \text{y} \quad \sin \theta = \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

Reemplazando e integrando nos queda:

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R dx}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \left| \frac{x}{(x^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}} \right|_{-\infty}^{\infty} =$$

De donde nos queda

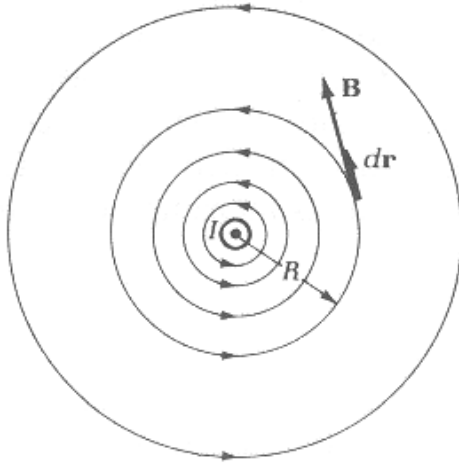
$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$

Ley de Amper

Hemos visto que un alambre largo y recto por el que circula una corriente i produce un campo

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$

magnético cuyo valor viene dado por:



tangente a la línea de campo que pasa por el punto, como vemos en la figura, donde el sentido de la corriente es hacia fuera de la página. Este cerramiento del campo magnético alrededor de la corriente que lo produce puede expresarse en términos geométricos. Como es un camino cerrado, la circunferencia es el borde de una superficie cruzada o atravesada por la corriente. Se dice entonces que la corriente está enhebrada o enlazada por un camino cerrado. La relación entre el campo magnético que rodea

al conductor y la corriente enlazada por el camino cerrado puede expresarse cuantitativamente mediante la *Ley de Amper*. Vemos el caso particular que estamos analizando, tomemos un desplazamiento diferencial $d\vec{r}$ a lo largo del camino cerrado, hacemos el producto escalar del campo magnético \vec{B} , por el desplazamiento infinitesimal $d\vec{r}$, a lo largo de todo el círculo:

$$\oint \vec{B} d\vec{r} = \oint B dr \cos \theta = \oint B dr \cos 0^\circ = \oint B dr = B \oint dr = B(2\pi R)$$

pero ya vimos de la Ley de Biot Savart

$$B(2\pi R) = \mu_0 i, \text{ por lo que nos queda}$$

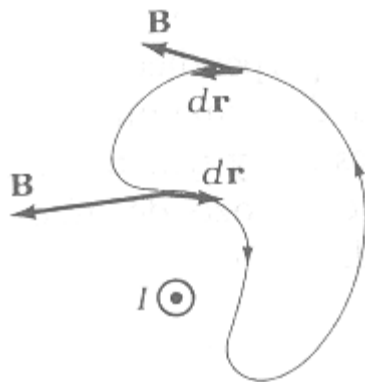
$$\oint \vec{B} d\vec{r} = \mu_0 i$$

El resultado es independiente del radio R . Se cumplirá también para un camino formado por arcos y rectas radiales. Si bien el camino considerado es bastante general, podemos decir que esto se cumple para cualquier camino que consideremos, ya que lo podemos descomponer

siempre en una suma infinitesimal de arcos y rectas radiales infinitesimal como vemos en el dibujo siguiente



Es posible demostrar que cuando el camino cerrado no enlaza a la corriente, como en la figura



Nos queda

$$\oint \vec{B} d\vec{r} = 0$$

Si consideramos ahora el caso más general de tener un camino cerrado que enlaza algunas corrientes, pero no a todas, incluso estas pueden tener una forma general, no necesariamente que pasan por alambres largos y rectos nos quedará

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum i$$

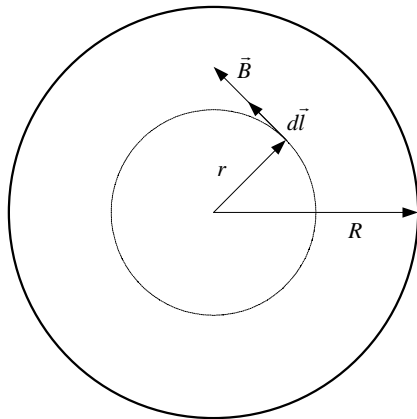
La ley de Amper para campos magnéticos puede ser considerada como análoga a la Ley de Gauss para campos eléctricos: un análisis matemático más general permite demostrar que cualquier campo que se obtenga a partir de la Ley de Biot Savart debe cumplir también con la Ley de Amper. La Ley de Biot Savart y la Ley de Amper son equivalente en el mismo sentido que la Ley de Coulomb y la Ley de Gauss son equivalentes.

La analogía entre la Ley de Amper y la Ley de Gauss no es completa. Es importante tener presente que la Ley de Amper contiene una integral de línea a lo largo de un camino cerrado, mientras que la Ley de Gauss contiene una integral de superficie, extendida a una superficie cerrada. Es decir que los campos eléctricos estáticos son diferentes a los campos magnéticos estáticos.

Aplicaciones de las leyes de Biot-Savart y Amper

a - Campo magnético en el interior de un conductor

Vemos la expresión del campo magnético \vec{B} a una distancia r del centro de un alambre cilíndrico largo de radio R , siendo $r < R$. El alambre lleva una corriente i_0 distribuida uniformemente en toda su sección transversal, que la consideramos saliente de la hoja



En la figura vemos una trayectoria circular dentro del alambre, al ser la corriente i_0 uniforme, podemos calcular la corriente i que es la que se encuentra dentro del radio r

$$\text{como } i = i_0 \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = i_0 \frac{r^2}{R^2}$$

Aplicando la ley de Amper nos queda:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 i \quad \text{Reemplazando el valor de } i \text{ será } \oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 i_0 \frac{r}{R^2},$$

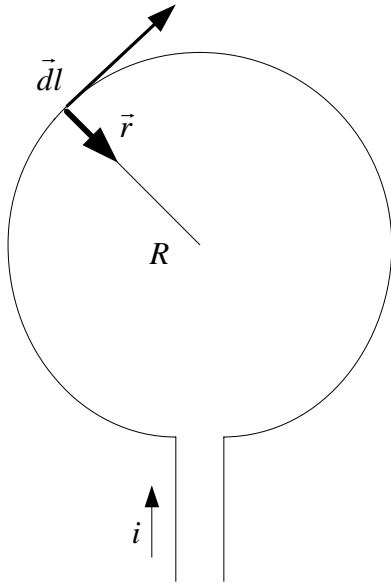
$$B(2\pi r) = \mu_0 i_0 \frac{r^2}{R^2}, \quad \text{siendo } i_0 \text{ la corriente total que circula por el conductor}$$

Despejando el valor del campo magnético

$$B = \mu_0 i_0 \frac{r}{2\pi R^2}, \quad \text{en la superficie del alambre, } r = R \text{ nos queda } B = \frac{\mu_0 i_0}{2\pi R}$$

b - Campo magnético creado por una corriente circular

Vemos en la figura una espira circular de radio R por la que circula una corriente i , buscamos el valor del campo magnético en el centro de la espira, suponemos un elemento de la espira de longitud dl y luego integramos a lo largo de toda la espira. Aplicando la ley de Biot-Savart



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int i \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^2}, \text{ que en nuestro caso será}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_0^{2\pi R} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{R^2}, \text{ como los dos vectores son}$$

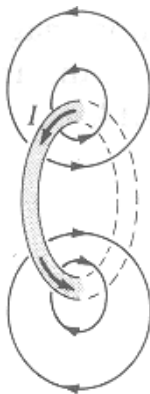
perpendiculares y la distancia R es constante será

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi R^2} i \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0}{4\pi R^2} i 2\pi R =$$

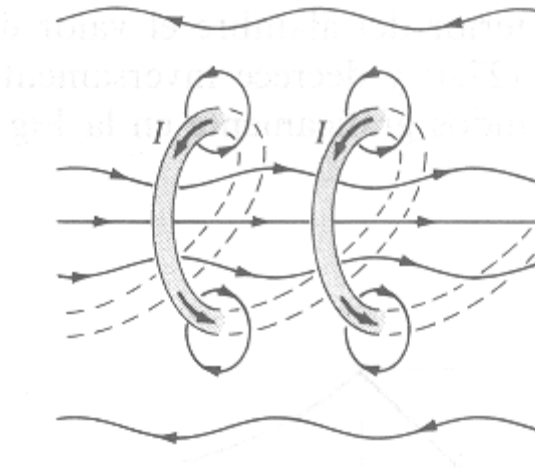
$$B = \frac{\mu_0}{2R} i$$

c - Campo magnético en un solenoide

Un solenoide está formado por el arrollamiento de un alambre muy largo sobre un cilindro, generalmente un cilindro circular: los arrollamientos o vueltas del alambre forman una bobina helicoidal, cuya longitud, medida a lo largo del eje del solenoide, es generalmente mayor que el diámetro de cada vuelta. Un parámetro importante de un solenoide es el número de vueltas que tiene por unidad de longitud. Para tratar de entender como es el campo magnético de un solenoide vemos primero el campo magnético de una única espira circular



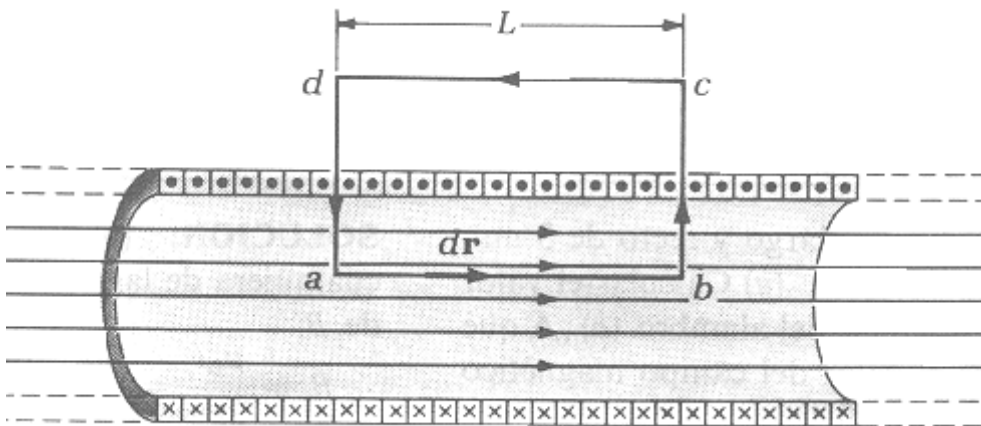
En el dibujo las líneas de campo magnético están en un plano perpendicular a la espira



En la figura vemos las líneas de campo para un solenoide de vueltas separadas. En un solenoide de vueltas más apretadas la separación entre estas será menor y cada vuelta se aproxima más en su forma a una espira, de manera que cada espira producirá una contribución al campo

magnético similar al campo producido por una espira con corriente. En el interior del solenoide la contribución de cada vuelta al campo tiende a reforzar la contribución de las demás, de manera tal que el campo resultante es aproximadamente uniforme y paralelo al eje del solenoide. En el exterior del solenoide las contribuciones tienden a cancelarse de forma que el campo es relativamente pequeño.

En el caso ideal de la figura siguiente la distribución de corriente en los arrollamientos es equivalente a la distribución en una lámina metálica cilíndrica con corriente perpendicular a su eje, y la longitud de este solenoide es virtualmente infinita.



En el interior del solenoide ideal el campo magnético es uniforme y paralelo a su eje y el campo en el exterior del solenoide es cero.

Aplicamos la ley de Amper al camino cerrado $abcd$ dibujado en la figura

$$\oint_{abcd} \vec{B} d\vec{r} = \int_a^b \vec{B} d\vec{r} + \int_b^c \vec{B} d\vec{r} + \int_c^d \vec{B} d\vec{r} + \int_d^a \vec{B} d\vec{r}$$

Las integrales a lo largo de bc y ad son igual a cero porque \vec{B} y $d\vec{r}$ son perpendiculares entre si. A lo largo del segmento cd , que esta afuera del solenoide, también es cero porque el campo magnético es cero ($\vec{B} = 0$). Nos queda entonces:

$$\oint_{abcd} \vec{B} d\vec{r} = \int_a^b \vec{B} d\vec{r} = \int_a^b B dr \cos 0^\circ = \int_a^b B dr = B \int_a^b dr = BL$$

donde L es la longitud del segmento ab . Para un solenoide con n vueltas por unidad de longitud el número de vueltas enlazadas por el camino cerrado es nL , como cada una de estas vueltas lleva una corriente i , la corriente enlazada por el camino cerrado es

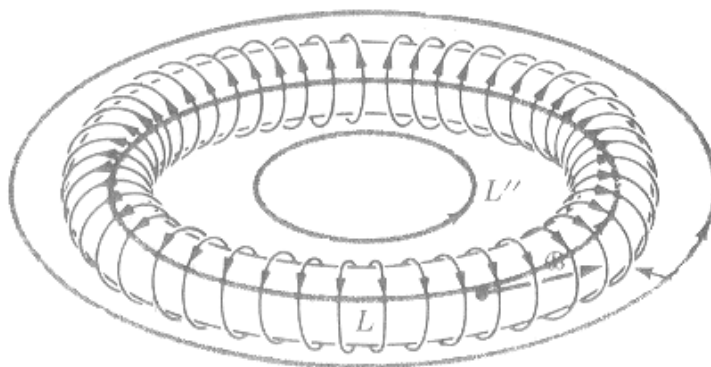
$$\sum i = nLi, \text{ aplicamos ahora la Ley de Amper}$$

$$\oint \vec{B} d\vec{r} = \mu_0 \sum i, \text{ reemplazando será}$$

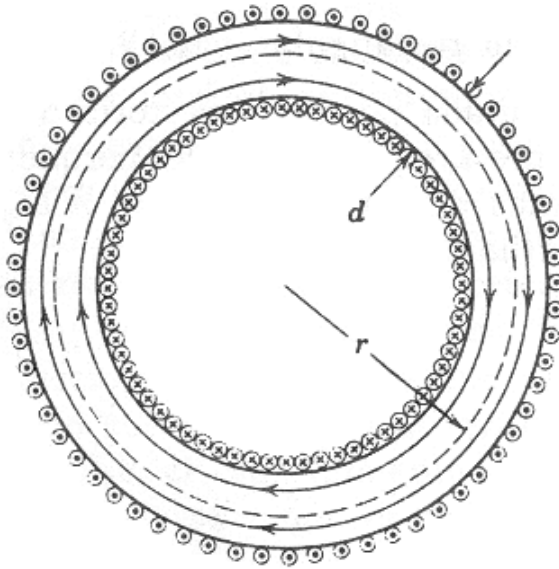
$$\oint \vec{B} d\vec{r} = BL = \mu_0 nLi \Rightarrow B = \mu_0 ni$$

d - Campo magnético en un toroide

La figura siguiente muestra un toroide, que puede considerarse como un solenoide de longitud finita en forma de una rosca



Vamos a calcular B en los puntos interiores, por simetría las líneas de B forman círculos concéntricos dentro del toroide, como vemos en el esquema siguiente



Aplicamos la Ley de Amper a una trayectoria circular de integración de radio r

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 i \quad \text{nos queda}$$

$$B(2\pi r) = \mu_0 i, \quad \text{donde la}$$

corriente enlazada total i la podemos escribir como $i = i_0 N$ donde i_0 es la corriente en las espiras del toroide y N el número total de vueltas

Reemplazando en la expresión anterior nos queda

$$B = \frac{\mu_0 i_0 N}{2\pi r}$$

donde a diferencia del solenoide el campo magnético B no es constante en toda la sección transversal de un toroide, sino que depende del radio r .

Se puede demostrar que el campo B es igual a cero para puntos fuera del toroide ideal.

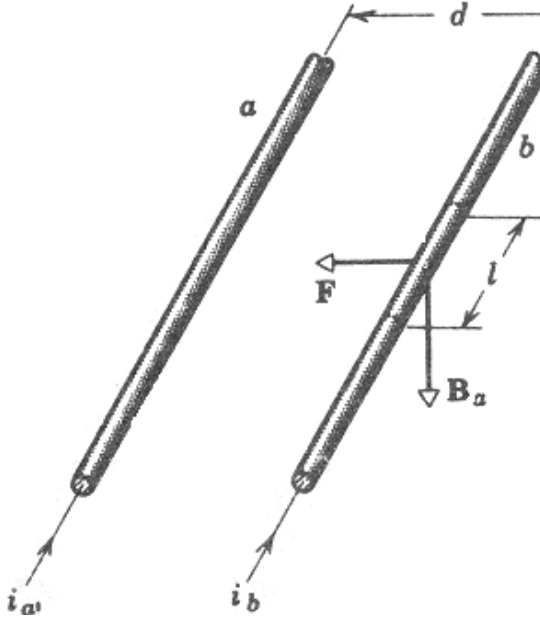
Fuerzas entre corrientes

Las corrientes eléctricas en presencia de imanes sufren fuerzas magnéticas, pero también las corrientes eléctricas y no sólo los imanes producen campos magnéticos; de modo que dos corrientes eléctricas suficientemente próximas experimentarán entre sí fuerzas magnéticas de una forma parecida a lo que sucede con dos imanes.

La experimentación con conductores dispuestos paralelamente pone de manifiesto que éstos se atraen cuando las corrientes respectivas tienen el mismo sentido y se repelen cuando sus sentidos de circulación son opuestos. Además, esta fuerza magnética entre corrientes paralelas es directamente proporcional a la longitud del conductor y al producto de las intensidades de corriente e inversamente proporcional a la distancia d que las separa, dependiendo además de las características del medio.

La explicación de tales resultados experimentales puede hacerse sabiendo que la fuerza magnética es $F_m = i d \times \vec{B} = i d B \sin\theta$, la expresión del campo magnético debido a una

corriente rectilínea es $B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$ y las relaciones entre las direcciones del campo B , la corriente i y la fuerza F_m resumidas en la regla de la mano izquierda. Vemos en el siguiente dibujo dos conductores paralelos uno de ellos tiene una corriente i_a y el otro i_b como se ve en la figura



El alambre a producirá un campo de inducción magnética B_a en todos los puntos cercanos. La magnitud de B_a debida a la corriente i_a en el sitio donde esta el segundo alambre será:

$$B_a = \frac{\mu_0 i_a}{2\pi d}$$

la dirección de acuerdo a la regla de la mano derecha es hacia abajo.

El alambre b que lleva una corriente i_b

se encuentra colocado dentro del campo externo de inducción magnética B_a , un tramo de longitud l de este alambre experimentará una fuerza magnética lateral cuya magnitud es

$$F_b = i_b l B_a = \frac{\mu_0 l i_a i_b}{2\pi d}$$

De haber analizado la fuerza sobre el alambre a la fuerza hubiera apuntado hacia la derecha. Para corrientes paralelas los dos alambres se atraen entre si, para corrientes antiparalelas (igual dirección pero sentido contrario) se repelen entre si.

Definición de ampere internacional

El hecho de que las fuerzas se puedan medir con facilidad y precisión sugirió la posibilidad de definir el ampere como unidad fundamental recurriendo a experiencias electromagnéticas, en las cuales la fuerza magnética varía con la intensidad de corriente según una ley conocida. Tal es el caso de la interacción magnética entre corrientes paralelas.

Considerando como medio el vacío con $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ y la distancia entre los hilos conductores de 1 m, la expresión de la fuerza magnética entre ellos se convierte en:

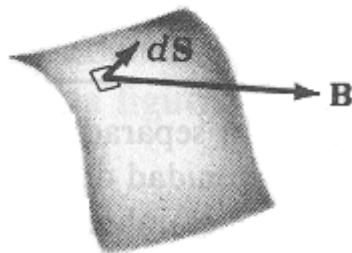
$$F = \frac{4\pi 10^{-7}}{2\pi} i^2 d, \text{ haciendo } i = 1\text{Amp y } d = 1\text{m}$$

$$\text{nos queda } F = \frac{4\pi 10^{-7}}{2\pi} i^2 d = \frac{4\pi 10^{-7}}{2\pi} 1^2 1 = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$$

Definimos entonces el *ampere* como la intensidad de corriente que circulando por dos conductores rectilíneos de longitud infinita, sección circular y paralelos, separados entre sí un metro en el vacío, producirá una fuerza magnética entre ellos de $2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$ por cada metro de longitud de cada uno de los dos hilos.

Flujo magnético y la Ley de Gauss para el campo magnético

Análogamente a la definición de flujo eléctrico ya vista, definiremos ahora el flujo magnético a través de una superficie. Suponemos que dividimos una superficie imaginaria en elementos de área infinitesimal, de forma que el vector elemento de área $d\vec{S}$ en un punto de la superficie es perpendicular a la superficie en ese punto, según vemos en la figura



El flujo magnético $d\Phi_B$ a través del elemento de área $d\vec{S}$ es

$$d\Phi_B = \vec{B}d\vec{S}$$

el flujo magnético a través de una superficie cualquiera lo obtenemos integrando todos los elementos $d\Phi_B$

$$\Phi_B = \int d\Phi_B = \int \vec{B}d\vec{S}$$

Ya hemos visto la Ley de Gauss para el campo eléctrico, establece que el flujo de campo eléctrico a través de una superficie cerrada depende únicamente de la carga encerrada en el interior de la superficie.

$$\Phi_E = \oint \vec{E}d\vec{S} = \frac{\sum q}{\epsilon_0}$$

La forma de la Ley de Gauss nos recuerda que la fuente más

simple de campo eléctrico es la carga puntual.

Para el caso de campo magnético el flujo a través de una superficie cerrada será:

$\Phi_B = \oint \vec{B} d\vec{S}$. Para cualquier superficie cerrada el flujo de campo magnético es cero, pues cada línea de campo magnético que atraviesa hacia dentro la superficie vuelve a atravesarla hacia fuera en otro punto. El número neto de líneas que atraviesa la superficie es cero.

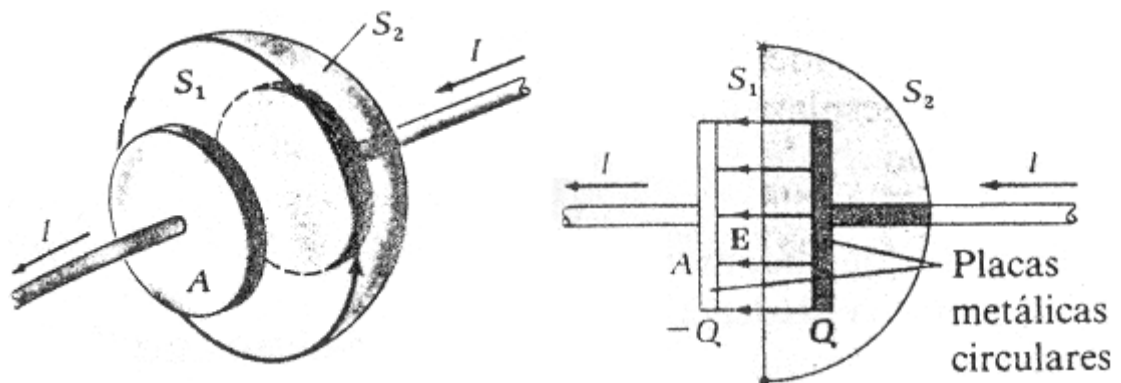
$$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0$$

Lo podemos entender razonando que no hay una contrapartida magnética a la carga eléctrica, no existe el monopolo magnético, es decir un polo magnético aislado. Si el monopolo magnético no existe las fuentes más simples de campo magnético son los dipolos magnéticos.

Corrientes de desplazamiento y la Ley de Amper

La ley de Amper tal como la hemos planteado hasta ahora ha estado limitada a los campos magnéticos producidos por el tipo de corrientes que pueden existir en un alambre continuo. Existen otros tipos de distribuciones de corrientes, que no están contemplados en la forma vista de la Ley de Amper, por lo que es necesario modificarla para darle un carácter más general. Esta generalización descubierta por Maxwell, representa un gran avance en el desarrollo del conocimiento profundo del electromagnetismo, incluyendo incluso el conocimiento de la naturaleza de la luz.

En la figura siguiente se ve un condensador que esta siendo cargado, y donde i es el valor instantáneo de la corriente que pasa por los alambres de conexión. Planteamos una superficie cerrada, S , compuesta por dos tapas, como se ve en la figura, S_1 y S_2 , la superficie S_2 es atravesada por la corriente i , pero la superficie S_1 no es atravesada por la corriente, porque esta superficie pasa por el espacio existente entre las placas del condensador. Conforme se carga el condensador hay una acumulación de carga en la placa que queda entre S_1 y S_2 ,



Por conservación de la carga, la rapidez con que se acumula carga en la placa del condensador

es igual a la corriente que atraviesa la superficie S_2 , es decir: $i = \frac{dQ}{dt}$

Donde Q es el valor instantáneo de la carga del condensador. En este caso la corriente enlazada por el camino cerrado parece depender de la superficie elegida, por lo cual la Ley de Amper no se cumple y debe ser modificada.

La modificación de Maxwell en la Ley de Amper consiste en considerar una corriente imaginaria equivalente atravesando la superficie S_1 , de forma tal que la corriente enlazada por el camino cerrado sea igual para cualquier superficie limitada por este. En la figura anterior el campo eléctrico entre las placas del condensador será:

$E = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$, como sabemos que el flujo del campo eléctrico a través de una superficie es

$\Phi_E = \int \vec{E} d\vec{S}$, y como el campo existe únicamente entre las placas será $\Phi_E = EA$

Despejando el valor de Q y reemplazando nos queda

$Q = E\epsilon_0 A = \epsilon_0 \Phi_E$, derivamos esta expresión con respecto al tiempo, vemos que la corriente esta relacionada con la derivada temporal del flujo de campo eléctrico

$i = \frac{dQ}{dt} = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$ el lado derecho de esta expresión contiene la derivada de flujo de campo

eléctrico que atraviesa la superficie S_1 , mientras que i es la corriente que atraviesa la superficie S_2 . Llamamos a esta corriente efectiva *corriente de desplazamiento* i_d . Y la definimos como

$i_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$, reemplazando ahora en la Ley de Amper, $\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum i$ nos queda

$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \left(\sum i + i_d \right)$ o bien

$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \left(\sum i + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)$

Al incluir la corriente de desplazamiento la corriente total enlazada por un camino cerrado es igual para cualquier superficie limitada por dicho camino cerrado.

La corriente de desplazamiento y la Ley de Amper modificada juegan un papel esencial en el estudio de las ondas electromagnéticas.