UNIDAD VII: ONDAS ELECTROMAGNETICAS

Oscilaciones eléctricas. Ecuaciones de MAXWELL y ondas electromagnéticas. Velocidad de propagación de las ondas. Vector de POYNTING.

Índice

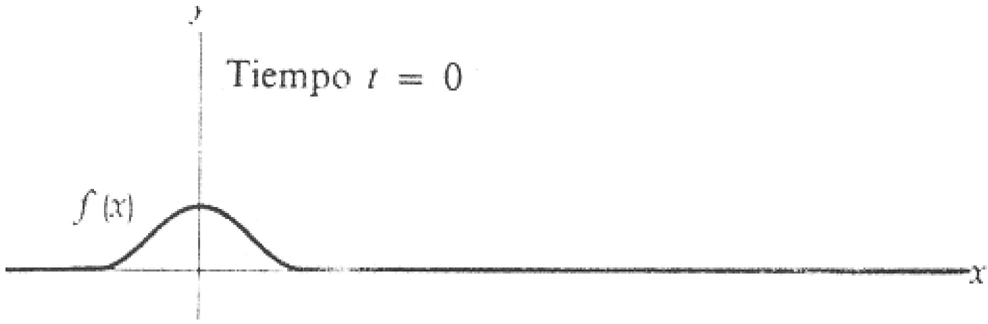
Ondas

Para poder entender los conceptos de ondas electromagnéticas, repasaremos primero algunos conceptos de ondas ya vistos anteriormente. Su estudio es fundamental ya que la energía de cualquier tipo puede transmitirse mediante ondas, es decir la energía se puede transmitir sin que el cuerpo se desplace, basta con que el cuerpo irradie su energía. Esta radiación de energía se llama onda. El movimiento ondulatorio puede considerarse como un transporte de energía y de cantidad de movimiento desde un punto del espacio a otro, sin transporte de materia. Podemos distinguir dos tipos básicos de ondas: *ondas mecánicas* (ondas en el agua, una cuerda, etc.). La energía y la cantidad de movimiento se transportan mediante una perturbación del medio, la perturbación se propaga debido a las propiedades elásticas del mismo. *Ondas electromagnéticas:* se deben fundamentalmente a vibraciones de campos eléctricos y magnéticos.
A pesar de la diversidad de las ondas hay muchas características que son comunes a toda clase de ondas, mientras que otras afectan a un amplio margen de fenómenos ondulatorios.
Al definir el movimiento asociado a una onda debemos distinguir dos aspectos del por un lado el movimiento de la onda a través del medio y por otro el movimiento oscilatorio de las partículas del medio. Podemos clasificar las ondas en función a la dirección de desplazamiento de las partículas con respecto a la dirección de propagación de la onda. Una *onda transversal* es aquella en la que las partículas oscilan perpendicularmente a la dirección de propagación. Una onda longitudinal es aquella en la que las partículas oscilan paralelamente a la dirección de propagación. Demostraremos que las ondas electromagnéticas son transversales. Algunas ondas presentan componentes longitudinales y transversales, como ser las ondas de agua.

Pulsos

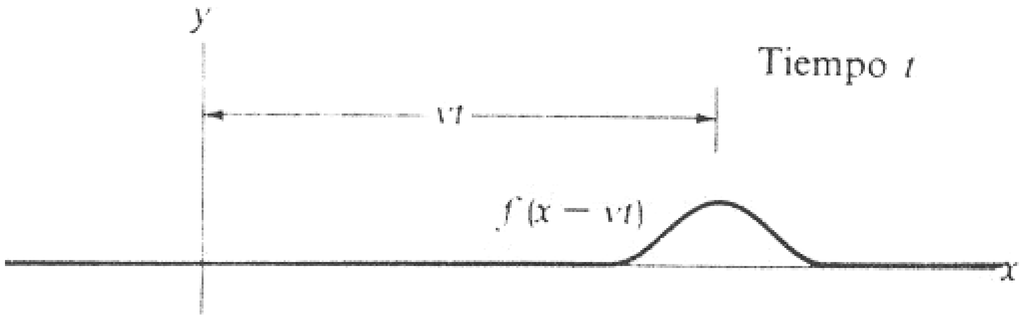
Un pulso es una onda de extensión relativamente corta. Es más sencilla de estudiar. Nos permite ver la expresión matemática de una onda viajera y ver algunos términos usados para describir ondas.

En las figuras siguientes puede verse dos etapas del movimiento de un pulso en una curda, en dos tiempos diferentas, cuando el pulso se propaga de izquierda a derecha con velocidad v .
En $t = 0$ la forma del pulso queda determina por la función $y(x) = f(x)$



Después de un tiempo t el pulso a avanzado hacia la derecha una distancia $d = vt$
Si suponemos que el pulso mantiene su forma mientras se propaga, es decir no hay dispersión, podemos expresar la forma del pulso en un instante de tiempo t como:

$$y(x,t) = f(x - vt)$$

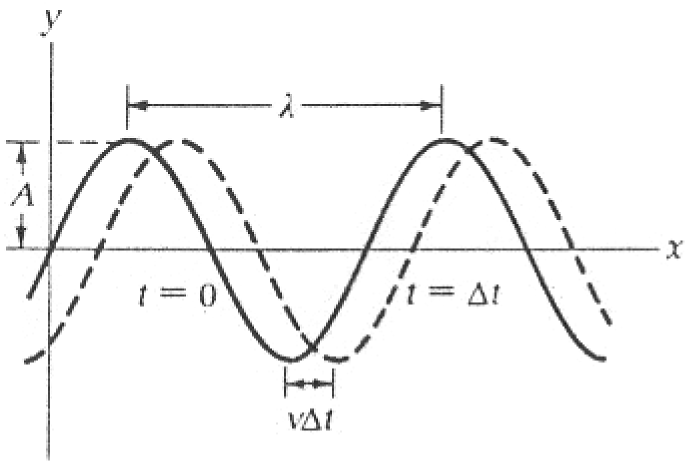


Se denomina función de onda a la función $y(x,t)$ que sirve para describir una onda.
Veamos algunos conceptos de las ondas:

Interferencia de ondas: Cuando dos o más ondas se encuentran entre si decimos que interfieren. El principio de superposición establece que la función de onda resultante debida a dos o más funciones de ondas individuales es la suma de las funciones de ondas individuales. Posteriormente a su encuentro, el tamaño, forma y velocidad de cada pulso es el mismo que tendría si no se hubieran encontrado.
Reflexión y transmisión: Las ondas pueden reflejarse en fronteras y trasmitirse de un medio a otro.

Ondas armónicas

El tratamiento matemático de las ondas está basado principalmente en la función de onda para una onda armónica. Por ejemplo una onda armónica la podemos describir mediante una función seno en cualquier instante particular. En la figura vemos una onda en dos tiempos diferentes, la curva continua es la onda en el instante $t = 0$, mientras que la curva a trazos la representa después de un breve tiempo Δt



En $t = 0$ tenemos $y = Asen\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$

La amplitud A es el desplazamiento máximo de cualquier elemento de la onda desde su posición de equilibrio en $y = 0$ y *la longitud de la onda* λ es la distancia a que se vuelve a repetir la onda, o sea la distancia entre dos crestas sucesivas.

Si la onda se mueve hacia la derecha con velocidad v será:

$$y(x,t) = Asen\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right]$$

Donde el argumento de la función seno es *la fase* de la onda $\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right]$

El periodo T es el tiempo necesario para que un elemento complete una oscilación y también el tiempo necesario para que un nuevo desplazamiento particular de la onda se mueva una distancia igual a una longitud de onda. Esto significa que la onda se mueve una distancia λ en un tiempo T, su velocidad es entonces: $v = \lambda / T$.

Los parámetros con los que tradicionalmente se describen las ondas son:

- Frecuencia: $f = \frac{1}{T}$
- Frecuencia angular $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$
- Numero de onda $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

De allí que podamos escribir la ecuación de onda como:

$$y(x,t) = Asen[(kx - \omega t)]$$

Una onda real no puede ser perfectamente armónica, puesto que una onda armónica se extiende hacia el infinito en ambos sentido a lo largo del eje x y no tiene ni principio ni fin en el tiempo. Una onda real debe tener principio y fin en algún lugar del espacio y del tiempo. Muchas de las ondas existentes en la naturaleza, como ser las ondas de sonido, las de luz, las electromagnéticas, pueden frecuentemente aproximarse a una onda armónica, puesto que su extensión en ele espacio es mucho mayor que su longitud de onda y el intervalo de tiempo que tarda en pasar por un punto es mucho mayor que su periodo. Una onda de este tipo se denomina *tren de pulso*. Podemos considerar que una onda armónica es una representación idealizada de un tren de onda.

Ecuación de onda

Estudiando las derivadas de la función de onda para una onda armónica, vamos a ver una ecuación diferencial que llamamos ecuación de onda. Veremos después que el estudio de determinadas leyes físicas conduce a la misma ecuación. Este hallazgo constituye predicción teórica de la existencia de ondas en un sistema.
Vimos que la expresión matemática para una onda armónica era:

$y(x,t) = Asen(Kx - \omega t)$ Derivamos con respecto a t nos queda

$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} Asen(Kx - \omega t) = -A\omega \cos(Kx - \omega t)$ Volvemos a derivar

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-A\omega\cos(Kx - \omega t)\right) = -A\omega^2 sen(Kx - \omega t) =$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A\omega^2 sen(Kx - \omega t) = -\omega^2 y(x,t)$$

Además sabemos que $v = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi/K}{2\pi/\omega} = \frac{\omega}{K} \Rightarrow \omega = vK$ reemplazando

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -v^2 K^2 y(x,t) \qquad (1)$$

Como segundo paso para encontrar la ecuación de onda derivamos la función:

$y(x,t) = Asen(Kx - \omega t)$ con respecto a la variable x

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} Asen(Kx - \omega t) = -AK\cos(Kx - \omega t)$$

Repetimos los pasos anteriores y volvemos a derivar

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-AK\cos(Kx - \omega t)\right) = -AK^2 sen(Kx - \omega t) =$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -AK^2 sen(Kx - \omega t) = -K^2 y(x,t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -K^2 y(x,t) \qquad (2)$$

De las dos expresiones encuadradas (1) y (2) despejamos en valor de la función $y(x,t)$

De (1) $\quad y(x,t) = -\frac{1}{v^2 K^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

De (2) $\quad y(x,t) = -\frac{1}{K^2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

Igualando ambas expresiones será

$$-\frac{1}{v^2 K^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{1}{K^2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Simplificando nos queda

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Ecuación que recibe el nombre de *Ecuación de Onda*

Esta ecuación diferencial es la ecuación de onda. Puesto que hemos llegado a esta ecuación a partir de las derivadas de una función armónica podemos decir que la función de onda correspondiente a una onda armónica satisface, o es solución, de la ecuación de onda.

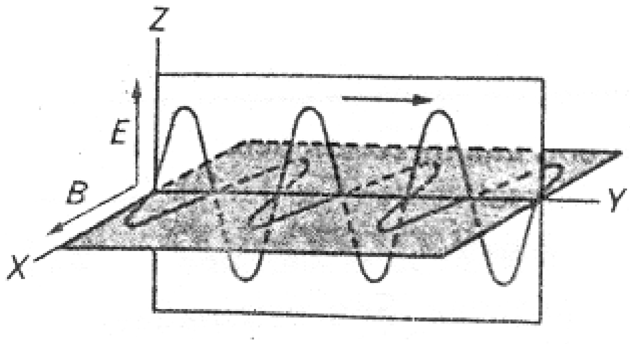
Es decir, si encontramos un sistema que cumple la ecuación de onda, debemos esperar la existencia de ondas en dicho sistema. Podemos generalizar la ecuación de onda escribiendo:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

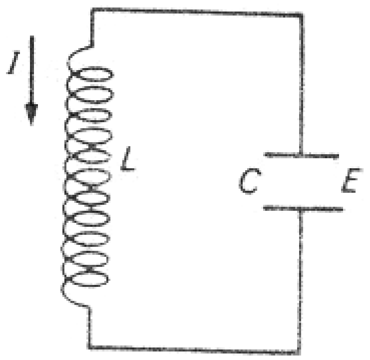
Donde Ψ es la magnitud física que “ondea” y v es la velocidad de la onda

Introducción a las ondas electromagnéticas

Las ondas electromagnéticas se generan por vibraciones de campos eléctricos y magnéticos. No necesitan medio material de propagación. Son doblemente transversales, según demostraremos más adelante, el campo magnético y el campo eléctrico son perpendiculares entre si y a su vez perpendiculares a la dirección de propagación. Se propagan a la velocidad de la luz. Su origen se funda en el hecho de que toda carga eléctrica acelerada emite energía en forma de radiación electromagnética.

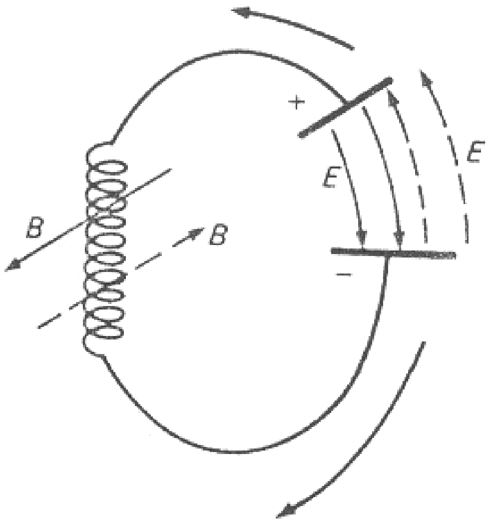


Un método sencillo para producirlas consiste en preparar un circuito oscilante formado por una bobina y un condensador. Ya vimos el funcionamiento de este circuito en lo que hace al intercambio de energía entre el condensador y la bobina. Repasamos algunos conceptos



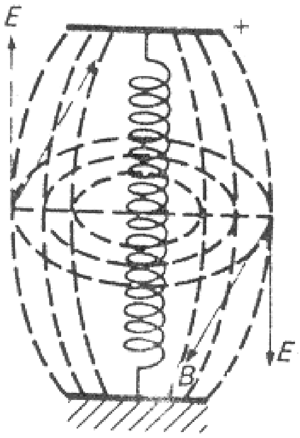
Vemos el circuito de la derecha, supongamos que en un instante dado el condensador está cargado con una cierta carga. En el momento de iniciarse la corriente la energía es máxima en el condensador y nula en la bobina. Este se ira descargando, cuando este descargado totalmente, la energía ha quedado almacenada en la bobina y desaparece el campo eléctrico entre las placas del condensador. Mientas ha circulado corriente en la bobina se ha producido

En el instante en que el condensador se ha descargado cesa la corriente, desapareciendo el campo magnético. Esta desaparición origina una corriente en sentido contrario que carga de nuevo al condensador, volviendo a las condiciones iniciales. Y el proceso vuelve ha repetirse... Se llama periodo del circuito al tiempo que tarda en realizarse el ciclo.



En el circuito descrito la energía electromagnética queda almacenada en el propio circuito sin irradiarla al exterior.

Esta irradiación se consigue separando paulatinamente las armaduras del condensador, como vemos en la figura



Hasta llegar al caso limite, donde tenemos una antema emisora. La energía se irradia en forma de ondas esféricas doblemente transversales

Las ecuaciones de MAXWELL

El experimento de Oersted (1820) había demostrado la existencia de efectos magnéticos debidos a cargas en movimiento. Los descubrimientos de Faraday (1831) habían puesto de manifiesto que campos magnéticos variables con el tiempo dan lugar a un movimiento de cargas eléctricas en los conductores. Además, la explicación de Faraday de estos fenómenos llamados de inducción había introducido por primera vez en la historia de la física la noción de campo magnético representado por un conjunto de líneas de fuerza. Medio siglo antes, Charles Coulomb (1785) había descrito en forma de ley el modo en que las cargas eléctricas se atraen entre sí. Estos cuatro elementos fundamentales sirvieron de base en 1864 all físico escocés James Clerk Maxwell para iniciar la síntesis de los fenómenos eléctricos y de los fenómenos magnéticos entonces conocidos y su explicación dentro de una amplia teoría conocida como teoría del electromagnetismo. Apoyado en una enorme habilidad matemática, Maxwell empezó dando forma de ecuaciones a las

observaciones de Faraday y a su noción de campo magnético. Ese año publico un articulo titulado "Teoría Dinámica del Campo Electromagnético" en el que presento las celebres ecuaciones que unificaban los campos eléctricos y magnéticos, y demostró que estas ecuaciones predecían la existencia de ondas de los campos eléctrico y magnéticas, ***ondas electromagnéticas***. Maxwell identifico estas ondas electromagnéticas con la luz y por lo tanto, sus ecuaciones no solo unificaban los campos electrices y magnéticos, sino también los fenómenos ópticos. Hoy día sabemos que la luz visible es realmente un tipo de onda electromagnética, otros ejemplos son las ondas de radio frecuencia, las microondas, los rayos X, etc.
Los descubrimientos de Maxwell tuvieron un impacto sin precedentes en toda la actividad humana, si bien los mayores avanzas se vieron en nuestro siglo, Maxwell tuvo conciencia de su importancia, escribió: " Estoy preparando un articulo con una teoría electromagnética para la luz, el cual mientras no me convenza de lo contrario, pienso que será un gran avance".

Las relaciones matemáticas entre los campos eléctrico y magnético desarrollada por Maxwell proporcionan una base teórica completa para el tratamiento de todos los fenómenos electromagnéticos

Podemos resumir las ecuaciones de Maxwell, todas ellas ya vistas, de la siguiente manera

1 – Ley de Gauss para el campo eléctrico, establece que el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga neta encerrada por el volumen encerrado por dicha superficie.

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{\sum q}{\varepsilon_0}$$

2 – Ley de Gauss para el campo magnético, establece que el flujo del campo magnético a través de una superficie cerrada es igual a cero: Dado que este flujo es cero, el equivalente magnético a la carga eléctrica no existe, la unidad magnética más chica es el dipolo magnético.

$$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0$$

3 – Ley de Faraday: establece que la integral de línea del campo eléctrico a lo largo de un camino cerrado es proporcional a la rapidez con que cambia en el tiempo el flujo magnético a través de una superficie limitada por dicho camino. En consecuencia un campo magnético cambiante viene acompañado de un campo eléctrico.

$$\oint \vec{E}d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}d\vec{S}$$

4 – Ley de Amper en forma modificada: Maxwell modifico la esta ecuación añadiendo el segundo termino del lado derecho, la corriente de desplazamiento, donde aparece el flujo de campo eléctrico. La forma modificada de la Ley de Amper establece que la integral de línea del campo magnético a lo largo de un camino cerrado es proporcional a la suma e dos términos. El primer término contiene la corriente total que atraviesa la superficie limitada por el camino cerrado. El segundo término es la rapidez de variación del flujo de campo eléctrico a través de una superficie limitada por dicho camino. Como consecuencia de la modificación de Maxwell la ecuación establece que un campo eléctrico cambiante viene acompañado de un campo magnético.

$$\oint \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 \sum i + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt}\int \vec{E}d\vec{l}$$

Las ecuaciones de Maxwell representan una descripción completa y concisa de los campos eléctrico y magnético.

Ecuación de Onda de los campos electromagnéticos

La ecuación de onda predice la existencia de ondas en un sistema, hemos visto que si encontramos un sistema que cumple la ecuación de onda, debemos esperar la existencia de ondas en dicho sistema. La ecuación de onda es:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

Podemos afirmar la el cumplimiento con la ecuación de onda es un presagio teórico de que los ondas existen en ese sistema o dicho de otra forma si encontramos un sistema que cumple con la ecuación de onda, debemos esperar la existencia de ondas en dicho sistema.

Las ecuaciones de Maxwell se pueden combinar entre si para producir dos ecuaciones de onda, una para el campo eléctrico y otra para el campo magnético.

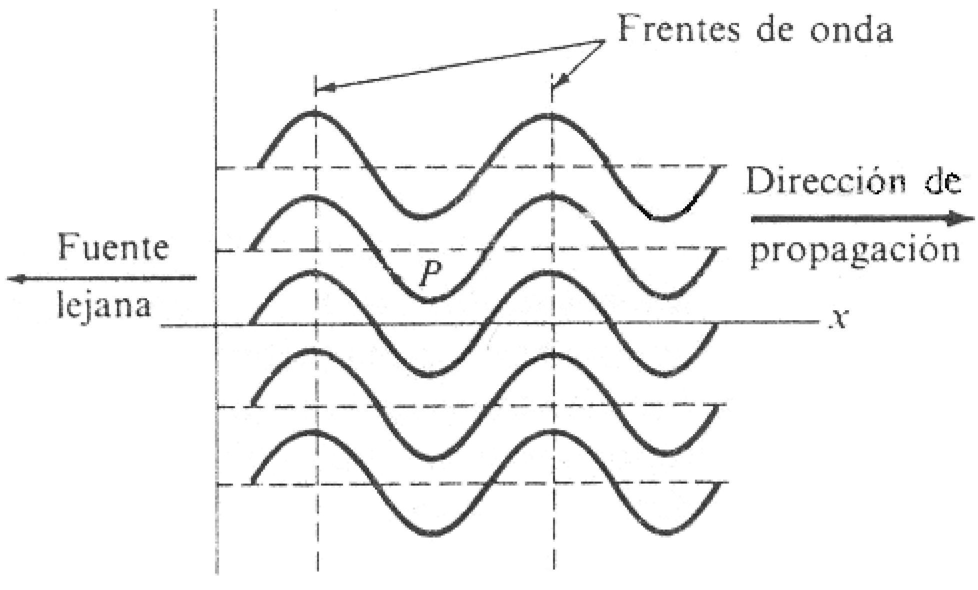
Aproximación de ondas planas

Para simplificar nuestro estudio vamos a considerar, anticipando el resultado, solo campos eléctricos y magnéticos que varíen en forma ondulatoria, no consideraremos los campos que sean uniformes en el espacio o constantes en el tiempo. La dependencia espacial y temporal de los campos será oscilante, así entonces una onda de campo eléctrico que viaja en la dirección $+x$ tendrá la forma $E = E_0 sen(kx - \omega t)$

Además consideramos que se encuentra en una región libre y que esta región está alejada de las fuentes que producen las ondas. Una onda que viaja a lo largo del eje x depende solamente de x y no de z e y

Con esta orientación los campos pueden escribirse como

$$E = E(x,t) \qquad B = B(x,t)$$



Los campos eléctricos y magnéticos ondulatorios son transversales

Los campos eléctricos y magnéticos ondulatorios son transversales a la dirección de propagación, si bien no lo demostramos, se lo puede hacer a partir de la Ley d Gauss, los campos electromagnéticos no tienen componente en la dirección de propagación. Para un campo eléctrico que se propaga a lo largo del eje x, cuya ecuación es $E = E_0 sen(kx - \omega t)$ se cumple que $E_x = 0$. De igual manera para el campo magnético $B_x = 0$.

Los campos eléctricos y magnéticos ondulatorios son mutuamente perpendiculares

Siguiendo con las ideas anteriores, si el eje de propagación es el eje x, podemos fijar para el campo eléctrico E en uno de los otros ejes por ejemplo el eje y, en consecuencia mediante la Ley de Faraday se puede demostrar que el campo magnético B necesariamente debe estar orientado según el eje z

Una onda que cumple con estas condiciones se llama onda plana polarizada y se define como el plano de polarización a aquel plano que contiene al campo eléctrico E y a la dirección de propagación. Para el caso comentado el plano de polarización será el plano xy.

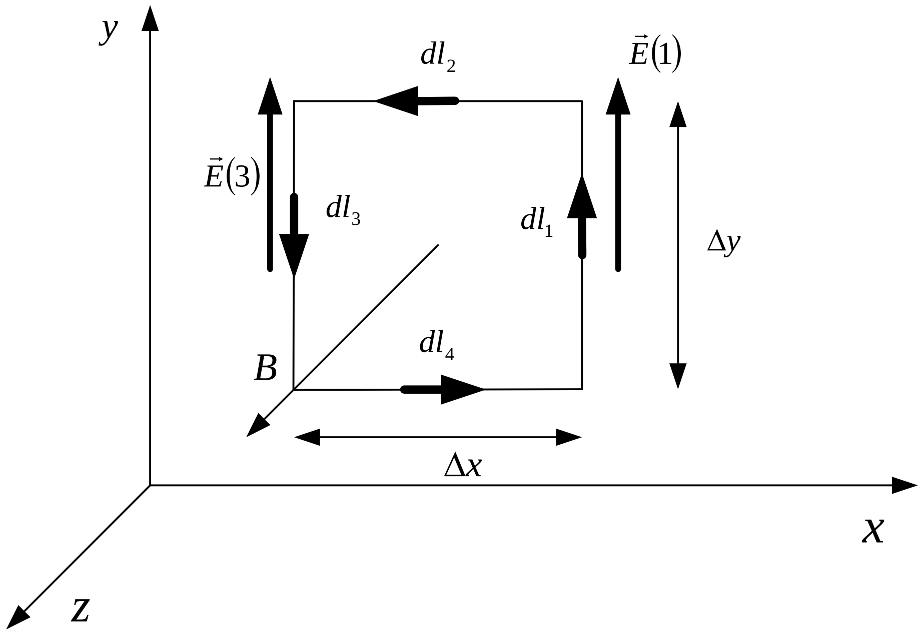
La ecuación de onda electromagnética

Partiendo de las ecuaciones de Maxwell demostraremos que las mismas cumplen con la condición de la ecuación de onda.

Consideramos que el campo eléctrico $\vec{E}$ esta dirigido a lo largo del eje y, y el campo magnético $\vec{B}$ esta dirigido a lo largo del eje z, siendo la propagación de la onda a lo largo del eje x, de la ley de Faraday será

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B} d\vec{S}$$

Aplicamos la ley de Faraday al camino cuadrado representado en la figura y teniendo en cuenta la denominación de los lados



Por un lado tenemos

$$\oint \vec{E}d\vec{l} = \int \vec{E}(1)d\vec{l}_1 + \int \vec{E}(2)d\vec{l}_2 + \int \vec{E}(3)d\vec{l}_3 + \int \vec{E}(4)d\vec{l}_4$$

De la figura vemos que como $\vec{E}$ solo tiene componente en el eje de las y , nos queda

$$\oint \vec{E}d\vec{l} = \int E_y(1)dy - \int E_y(3)dy = \left[E_y(1) - E_y(3)\right]\Delta_y$$ Podemos sacar de la integral porque E_y es independiente de y , por otro lado si tomamos un Δx pequeño podemos escribir:

$$E_y(1) - E_y(3) = \frac{\left[E_y(1) - E_y(3)\right]}{\Delta x}\Delta x \approx \frac{\partial E_y}{\partial x}\Delta x$$ Con lo cual podemos escribir $$\oint \vec{E}d\vec{l} = \frac{\partial E_y}{\partial x}\Delta x\Delta y$$

Por otro lado, analizando ahora en lado derecho de la Ley de Faraday $-\frac{d}{dt}\int \vec{B}d\vec{S}$ vemos en la figura que el vector de superficie $d\vec{S}$, estará en la dirección del eje z , y su valor será $dS = dxdy$, por lo que el flujo aproximado del campo magnético a través de esta superficie es:

$$\int \vec{B}d\vec{S} \approx B_z\Delta x\Delta y$$

Reemplazando los valores obtenidos en la ley de Faraday nos queda:

$$\oint \vec{E}d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}d\vec{S} \Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial x}\Delta x\Delta y \approx -\frac{\partial B_z}{\partial t}\Delta x\Delta y$$ En el limite la ecuación se hace exacta

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \qquad (1)$$

Mediante un análisis similar utilizando la ley de Amper se puede demostrar que

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E_y}{\partial t} \qquad (2)$$

Buscamos obtener la ecuación de onda para los campos electromagnéticos combinado las ecuaciones (1) y (2), para ello primero derivamos la ecuación (1) con respecto a x

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial B_z}{\partial t}\right) \Rightarrow \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial B_z}{\partial t}\right)$$

Derivamos ahora (2) con respecto a t

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\right) = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial E_y}{\partial t}\right) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\right) = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

Si suponemos que el orden de diferenciación de B_z con respecto a t y a x no afecta el resultado podemos combinar las dos ecuaciones obtenidas

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$ *Ecuación de onda para el campo eléctrico* E_y

Si ahora derivamos la ecuación (1) con respecto a t y (2) con respecto a x, obtendremos

Ecuación de onda para el campo magnético B_z

Si comparamos las ecuaciones de onda para el campo electromagnético obtenidas con la ecuación general de onda vemos que la velocidad de propagación de la onda será:

$$\frac{1}{v^2} = \mu_0\varepsilon_0 \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$ Reemplazando por los valores

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{\left(4\pi * 10^{-7}\right)\left(8.85 * 10^{-12}\right)}} = 3 * 10^8 \, {}^{m}\!/_{seg}$$

Esta velocidad tiene el mismo valor que la velocidad de la luz, c, en base a esto Maxwell razonó que como la luz no era nada más que una onda de campos eléctricos y magnéticos que se propaga en el espacio y en el tiempo, y la velocidad en el vacío depende de las propiedades eléctricas y magnéticas del mismo.

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

Ondas electromagnéticas

La solución armónica a las ecuaciones de las ondas electromagnéticas vistas

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}$$ serán de la forma:

$$E_y = E_0 sen\left(k_e x - \omega_e t\right) \qquad (a)$$

$$B_z = B_0 sen\left(k_b x - \omega_b t + \phi\right) \qquad (b)$$

Donde en un primer momento consideramos las posibilidades de que los números de onda y las frecuencias angulares sean distintas para cada campo, y que además pueda haber un desfasaje entre ambos. Veremos si esto es cierto.

Sabemos que : $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$, además se cumple que $c = \frac{\omega_e}{k_e} = \frac{\omega_b}{k_b}$

Usando estas relaciones trataremos de determinar ϕ y la relación entre k_e y k_b y también entre ω_e y ω_b

Diferenciamos las ecuaciones (a) y (b) nos queda:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = k_e E_0 \cos\left(k_e x - \omega_e t\right)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\omega_b B_0 \cos\left(k_b x - \omega_b t + \phi\right) = -k_b c B_0 \cos\left(k_b x - \omega_b t + \phi\right),$$

Como ya hemos visto que $\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$ Igualando y nos queda

$$k_e E_0 \cos(k_e x - \omega_e t) = k_b c B_0 \cos(k_e x - \omega_e t + \phi)$$

Para que esta ecuación sea valida para cualquier valor de x y t es necesario que se cumpla que $k_e = k_b$; $\omega_e = \omega_b$ y que $\phi = 2\pi n$ (número entero de veces), por lo tanto hacemos $k = k_e = k_b$

$$\omega = \omega_e = \omega_b$$

$$\phi = 0$$

Esto significa que los campos ondulatorios eléctrico y magnético tienen la misma longitud de onda λ siendo $\left(\lambda = 2\pi / k\right)$, la misma frecuencia angular ω y además están en fase.

Por lo que la ecuación queda:

$$kE_0 \cos(kx - \omega t) = kcB_0 \cos(kx - \omega t)$$ de donde nos queda $E_0 = cB_0$

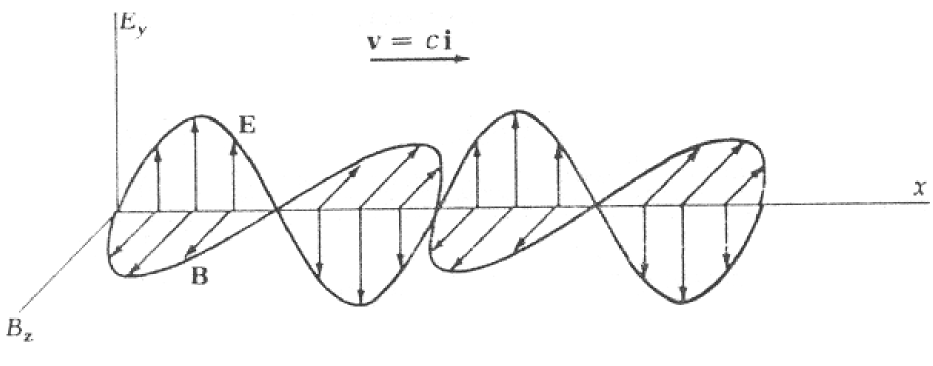
Podemos rescribir la solución armónica a las ecuaciones de las ondas electromagnéticas vistas como:

$$E_y = E_0 sen(kx - \omega t)$$

$$B_z = B_0 sen(kx - \omega t)$$

También se puede demostrar que $E_y = cB_z$

Podemos afirmar entonces que la velocidad, la longitud, la frecuencia y la fase de los campos ondulatorios eléctrico y magnético son iguales, que sus amplitudes son directamente proporcionales (siendo c el factor de proporcionalidad) y que los campos son mutuamente perpendiculares. Es decir los campos ondulatorios eléctricos y magnéticos no son identidades independientes y la existencia de uno requiere la existencia del otro. No son sino dos entidades de una onda, *la onda electromagnética*.



Intensidad de una onda electromagnética - Vector de POYNTING.

Las ondas electromagnéticas transportan energía. Así, por ejemplo, el sol emite radiación electromagnética y una fracción de esta energía radiante es absorbida por las plantas verdes. La energía transportada por una onda electromagnética consta de energía eléctrica y energía magnética. Hemos visto que la densidad de energía asociada a un campo eléctrico es $u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ y que la densidad de energía asociada a un campo magnético es $u_B = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$

Vemos a continuación que en las ondas electromagnéticas planas estas densidades de energía son iguales:

Sabemos que $E_y = cB_z$ y teniendo en cuenta que $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \Rightarrow \varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$

Obtenemos:

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_y^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_0 c^2}\right)(cB_2)^2 = \frac{1}{2}\frac{B_z}{\mu_0} = u_B$$

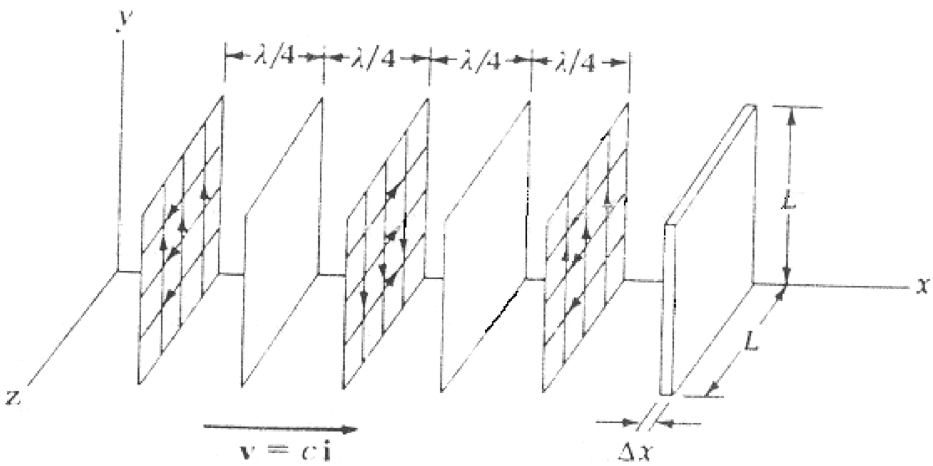
Es decir $u_E = u_B$

La suma de u_E y u_B es la densidad de energía electromagnética u

$$u = u_E + u_B \Rightarrow u = 2u_E = 2u_B$$

Podemos expresar $u = \varepsilon_0 E^2$

En la figura siguiente vemos una onda electromagnética plana atravesando una región espacial con forma de lámina de espesor Δx y área transversal $A = L^2$.



Si elegimos un espesor Δx que sea mucho menor que la longitud de onda de modo que los campos, y la densidad de energía, en dicho volumen sean esencialmente uniformes, la energía electromagnética, ΔU dentro de ese volumen es:

$$\Delta U = u(A\Delta x)$$

Ya que la onda viaja a velocidad c , el tiempo necesario, Δt , para que esta energía abandone el volumen laminar y ocupe el siguiente volumen adyacente es $\Delta t = \Delta x / c$.

Si dividimos ΔU por Δt obtenemos la rapidez con que la energía atraviesa una superficie de área A perpendicular a la dirección de propagación

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = uA\frac{\Delta x}{\Delta t} = uAc$$.

Para todo tipo de onda se define la intensidad S como la rapidez con que la energía pasa a través de un área dividida por dicha área, es decir:

$$S = \frac{1}{A}\frac{\Delta U}{\Delta t}$$ Reemplazando la ecuación anterior nos queda $$S = \frac{1}{A}\frac{\Delta U}{\Delta t} = uc$$

De modo que la intensidad de una onda es igual al producto de la densidad de energía por la velocidad de la onda. La podemos expresar en función del campo eléctrico como:

$$S = uc = \varepsilon_0 E^2 c$$

Si tenemos un vector intensidad que apunta en la dirección de propagación de la onda, en nuestro caso $\vec{S} = S\vec{i}$. Vemos que el producto vectorial del campo magnético y el campo eléctrico, también apunta en esta dirección:

$$\vec{E}x\vec{B} = \left(E_y\vec{j}\right)x\left(B_x\vec{k}\right) = E_yB_x\vec{i}$$

Se puede demostrar que S puede expresarse en función del producto E_yB_x como

$$S = \frac{E_yB_x}{\mu_0}$$ y por lo tanto en forma más general como:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} x \vec{B}$$

El vector $\vec{S}$ se denomina *vector de Poynting,* debido a su descubridor J.H. Poynting . El modulo de $\vec{S}$ da la intensidad de la onda y su dirección es aquella en la que se propaga dicha onda.

Para el caso de una onda armónica plana lo podemos escribir como:

$$S = \frac{1}{\mu_0} E_0 B_0 sen^2 (kx - \omega t)$$

El experimento de HERTZ

Las ondas electromagnéticas, cuya existencia fue deducida matemáticamente por Maxwell, en 1864, no fueron detectadas hasta 1888, durante estos años un sinnúmero de científicos busco poder generarlas y detectarlas, fue Heinrich Hertz el primero que lo consiguió El montaje experimental que le permitió producir y detectar ondas electromagnéticas constaba de un circuito eléctrico, capaz de producir tensiones eléctricas oscilantes, y de un detector. Dicho circuito, formado, en esencia, por un transformador y unas placas metálicas a modo de condensadores, se conectaba a dos esferas metálicas pulimentadas separadas entre sí por una pequeña región de aire. Cuando la tensión entre las dos esferas alcanzaba su valor máximo, el aire intermedio se electrizaba y saltaba una chispa. Este proceso se repetía periódicamente generando, cada vez, según la predicción de Maxwell, un conjunto de ondas electromagnéticas.
Para comprobar que, en efecto, un campo electromagnético viajero se estaba propagando por el espacio, Hertz preparó un detector (o antena), conocido también como resonador, que consistía en un alambre corto doblado en forma de circunferencia, pero con una pequeña abertura intermedia. Las ondas electromagnéticas, si existían, serían detectadas porque la variación del campo magnético de la onda al atravesar el resonador daría lugar a una fuerza electromotriz inducida que provocaría una chispa entre sus extremos.
Con el fin de analizar el fenómeno más cómodamente, situó en su laboratorio una superficie reflectora que le permitiría confinar las ondas producidas en el espacio comprendido entre el circuito emisor y la placa. Así, y con la ayuda del resonador, fue capaz de descubrir las características de las ondas generadas mediante su aparato emisor y de medir una longitud de onda de 66 cm. Las previsiones teóricas de Maxwell fueron confirmadas y Hertz demostró experimentalmente que las ondas electromagnéticas se reflejaban, se retractaban y sufrían

interferencias al igual que las ondas luminosas. En su honor recibieron el nombre de ondas hertzianas.

Espectro de ondas electromagnéticas

El espectro de ondas electromagnéticas es el conjunto de todos los tipos de ondas electromagnéticas clasificadas según su frecuencia.
Las podemos dividir en:

Radioondas: van de $3*10^4 Hz$ hasta $3*10^9 Hz$. Son ondas electromagnéticas producidas por un circuito oscilante LC. Su longitud de onda está comprendida entre los $10Km$ y $10cm$. Se emplean en radiodifusión y telecomunicaciones.

Microondas: van de $3*10^9 Hz$ hasta $3*10^{12} Hz$. Son producidas por vibraciones de moléculas. Su longitud de onda está comprendida entre los $10cm$ y $10^{-4} cm$. Se emplean en radioastronomía, comunicaciones (radar, maser), etc.

Rayos infrarrojos: van de $3*10^{12} Hz$ hasta $3*10^{14} Hz$. Son producidas en los cuerpos calientes y son debidas a oscilaciones de los átomos. Su longitud de onda está comprendida entre los $10^{-4} cm$ y $7500A^0$. Se emplean en la industria y en medicina.

Luz visible: van de $3*10^{14} Hz$ hasta $7*10^{14} Hz$. Son producidas por oscilaciones en los electrones más externos del átomo Su longitud de onda está comprendida entre los $7500A^0$ y $4000A^0$. Son percibidas por la retina Se emplean en la visión, láser, industria, etc.

Rayos ultravioleta: van de $7*10^{14} Hz$ hasta $10^{17} Hz$. Son producidas por oscilaciones en los electrones más internos del átomo Su longitud de onda está comprendida entre los $4000A^0$ y $30A^0$. Se emplean en medicina. El sol es un poderoso emisor de rayos ultravioleta.

Rayos X: van de $10^{17}\,Hz$ hasta $10^{19}\,Hz$. Son producidas por oscilaciones en los electrones próximos al núcleo. Su longitud de onda está comprendida entre los $30A^{0}$ y $0{,}4A^{0}$. Se emplean en medicina, en la industria, etc. Pueden ser peligrosos para la salud debido a su poder energético.

Rayos gamma: van de $10^{19}\,Hz$ hasta $10^{22}\,Hz$. Son producidas por oscilaciones nucleares, en los fenómenos radiactivos y en reacciones nucleares. Su longitud de onda está en el orden de $10^{-5}\,A^{0}$. Tienen un gran poder de penetración, lo cual los convierte en nocivos para los seres vivos.