Una curva C contenida en E_2 puede estar definida por una ecuación:

$y = g(x)$ → forma explícita
ó $f(x,y) = 0$ → forma implícita

En muchos casos se puede pasar de una forma a otra, pero algunas veces esto no es posible, o no siempre $f(x,y) = 0$ representa a la función implícita de $y = g(x)$.

Por ejemplo cuando:

a) $f(x,y) = 0$ representa la forma implícita a una $y = g(x)$.

Ej: $f(x,y) = 4x + 2y - 8 = 0$ representa implícitamente a $y = -2x + 4$

b) $f(x,y) = 0$ es la forma implícita de más de una función de x.

Ej: $x^2 + y^2 - 4 = 0$ representa implícitamente a:

$y_1 = \sqrt{4 - x^2}$ y a $y_2 = -\sqrt{4 - x^2}$

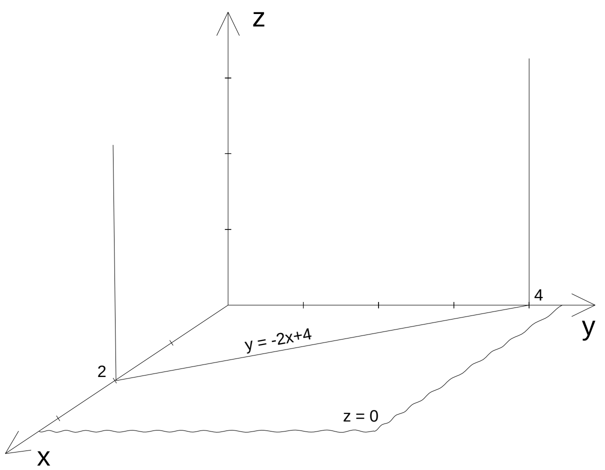
c) $f(x,y) = 0$ no es función implícita de alguna $y = g(x)$, es decir $\nexists$ la función implícita.

Ej: $x^2 + y^2 + 4 = 0$ por ser suma de términos positivos no se anula para ningún $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

- Interpretación geométrica de los ejemplos anteriores:

a) La función:

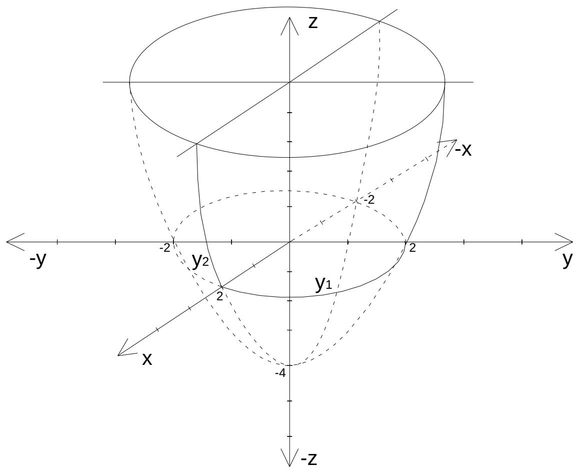
$z = 4x + 2y - 8$ tiene como representación gráfica un plano, cuya intersección con $z = 0$ es la recta: $y = -2x + 4$



b) La función:

$z = x^2 + y^2 - 4z$ tiene por gráfica un paraboloide de revolución, cuya intersección con $z = 0$ es la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$. Esta ecuación representa a las 2 funciones que representa $f(x, y) = 0$ en forma implícita:

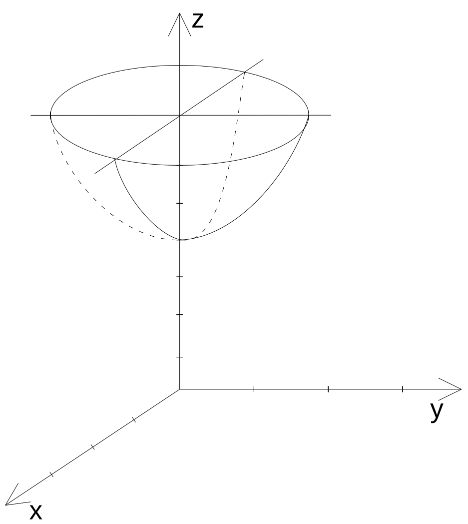
$$y_1 = \sqrt{4 - x^2} \qquad\qquad y_2 = -\sqrt{4 - x^2}$$



c) La función:

$z = x^2 + y^2 + 4$ es un paraboloide que no tiene intersección con $z = 0$, porque $f(x, y) > 0\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$\therefore \nexists$ la función implícita.



Teorema de Dini

Existencia de la Función Implícita de una variable independiente.

$f(x,y) = 0$ define implícitamente a $y = g(x)$, si se verifican las siguientes condiciones:

1°) $f(\overline{p_0}) = 0$ (La función debe anularse al menos en un punto del dominio)

2°) $z = f(x,y)$ posee derivadas parciales continuas en un entorno de $\overline{p_0}$.

3) $\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{p_0}) \neq 0$ (La derivada parcial con respecto a la variable dependiente debe ser distinta a cero)

Derivada de la Función Implícita de una variable independiente.

En las condiciones del teorema anterior, la función $f(x,y) = 0$ define implícitamente a la función $y = g(x)$ cuya derivada es:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}}$$

Demostración:

Si $f(x,y) = 0$ se verifica para $y = g(x) \Rightarrow f(x, g(x)) = 0$ ($g(x)$ satisface la ecuación)

Derivando ambos miembros (como función compuesta), tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{despejando} \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}$$

Ejemplo: Dada la siguiente función:

$f(x,y) = 2xy + y^2 - x - y = 0$ donde $y = f(x)$

a) Verificar que se trata de una función implícita, considerando las condiciones para la existencia para $(x,y) = (0,0)$

b) Hallar $\frac{dy}{dx}$ con $(x,y) = (0,0)$

Solución:

a) 1º) $f(0,0) = 0$ s.v.

2º) $\exists\ \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 1 \rightarrow \frac{\partial f(0;0)}{\partial x} = -1$ y $\exists\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 2y - 1 \rightarrow \frac{\partial f(0;0)}{\partial y} = -1$

3º) $\frac{\partial f(0;0)}{\partial y} = -1 \neq 0$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{-\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y} = \frac{-(2x-1)}{2x+2y-1}$ en $(0{,}0) = \frac{-(-1)}{-1} = -1$

El teorema de la Existencia y Derivabilidad se extiende a campos escalares definidos implícitamente.

Por ejemplo:

La ecuación $F(x, y, z) = 0$ define implícitamente al campo de <u>dos variables independientes</u> $z = G(x, y)$, si se verifica:

1°) $F(\overline{p_0}) = 0$ Para algún $\overline{p_0}(x_0; y_0; z_0)$ perteneciente al dominio.

2°) $\exists$ F'_x ; F'_y y F'_z y son continuas en un entorno de $\overline{p_0}$

3°) $F'_z \neq 0$

Calculamos las derivadas de $z = G(x, y)$ utilizando las reglas de derivación para la función implícita.

Buscamos: $\frac{\partial z}{\partial x} \wedge \frac{\partial z}{\partial y}$ ó Z'_x y Z'_y

Diferenciando:

$$dF = F'_x(x, y, z)dx + F'_y(x, y, z)dy + F'_z(x, y, z)dz = 0$$

Despejando dz:

$$dz = -\frac{F'_x}{F'_z}dx - \frac{F'_y}{F'_z}dy$$

Pero como $z = g(x, y)$

$dz = Z'_x dx + Z'_y dy$ comparando dz

Resulta:

$$\boxed{Z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} \qquad \wedge \qquad Z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}}$$

En general si $F(x_1; x_2; \dots; x_n) = 0$ define implícitamente a $x_1 = F_1(x_2; x_3; \dots; x_n)$ y $F'_{x_1} \neq 0$ cumpliéndose las condiciones de continuidad y derivabilidad, resulta:

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_2} = -\frac{F'_{x_2}}{F'_{x_1}} \quad ; \quad \frac{\partial x_1}{\partial x_3} = -\frac{F'_{x_3}}{F'_{x_1}} \quad ; \; \dots \; ; \quad \frac{\partial x_1}{\partial x_n} = -\frac{F'_{x_n}}{F'_{x_1}}$$

Generalización:

Las funciones implícitas $F(x; y; z) = 0$ ó $F(x; y; z; w) = 0$ pueden representar a funciones de más de una variable independiente y a más de 1 función.

Por ejemplo: $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ representa implícitamente a dos funciones:

$Z_1 = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y $Z_2 = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$

ó $F(x; y; z; w) = 0$ puede ser implícita de:

$w = f(x; y; z)$ función de 3 variables independientes ó a las funciones:

$$\begin{cases} x = g(z;w) & \text{de 2 variables independientes} \\ y = t(z;w) \end{cases}$$

Análogamente se pueden obtener otras derivadas cuando se conoce la dependencia funcional.

En todos estos casos se presentan las mismas condiciones de existencia y derivabilidad que para funciones implícitas de 1 variable independiente.

SISTEMA DE FUNCIONES IMPLÍCITAS:

Así como una superficie puede estar definida en forma implícita por una ecuación, una curva en el espacio puede estar definida implícitamente por un sistema de 2 ecuaciones.

$$\begin{cases} F(x;y;z) = 0 & \text{donde, por ejmplo:} \quad y = f(x) \quad \wedge \quad z = g(x) \\ G(x;y;z) = 0 \end{cases}$$

En este caso decimos que el sistema de 2 ecuaciones define implícitamente a 2 de sus variables como función de la restante.

Las condiciones de existencia son similares a las que exige el teorema para definir una función implícita de una sola variable y fueron enunciados en forma general, mediante el Teorema de Cauchy-Dini.

También pueden calcularse las derivadas de f y de g, si existen, utilizando un determinante funcional llamado *Jacobiano.*

Veamos el caso considerado

$F(x;y;z) = 0 \wedge G(x;y;z) = 0$ definen implícitamente a $y = f(x) \wedge z = g(x) \Rightarrow$

si F y G son diferenciables es:

$$\begin{cases} dF = F'_x dx + F'_y dy + F'_z dz = 0 \\ dG = G'_x dx + G'_y dy + G'_z dz = 0 \end{cases}$$

Luego:

$$\begin{cases} F'_y dy + F'_z dz = -F'_x dx \\ G'_y dy + G'_z dz = -G'_x dx \end{cases}$$

Siendo $dx \neq 0$ divido ambos miembros por dx:

queda: $$\begin{cases} F'_y \dfrac{dy}{dx} + F'_z \dfrac{dz}{dx} = -F'_x \\ G'_y \dfrac{dy}{dx} + G'_z \dfrac{dz}{dx} = -G'_x \end{cases}$$

El determinante del sistema se llama Jacobiano de F y G respecto a las variables $'y'$ y $'z'$.

Jacobiano: $\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} = \begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}$

Si este Jacobiano no se anula el sistema tiene solución única para las incógnitas $\frac{dy}{dx} = f'_x$ y $\frac{dz}{dx} = g'_x$ y se hallan aplicando Crámer.

Resulta:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} -F'_x & F'_z \\ -G'_x & G'_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}} \qquad \text{y} \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} F'_y & -F'_x \\ G'_y & -G'_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}}$$

Ejemplo: Sean

$$\begin{cases} F(x,y,z) = x^3 + 2y^3 - 5z + 1 = 0 \\ G(x,y,z) = x - y + z^3 - 4 = 0 \end{cases}$$

Hallar: $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{dz}{dx}$ → *Observando la expresión de estas derivadas, queda determinada cuál es la variable independiente.*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} F'_x & F'_z \\ G'_x & G'_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 3x^2 & -5 \\ 1 & 3z^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6y^2 & -5 \\ -1 & 3z^2 \end{vmatrix}} = -\frac{(9x^2z^2 + 5)}{(18y^2z^2 - 5)} = \frac{-9x^2z^2 - 5}{18y^2z^2 - 5}$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} F'_y & F'_x \\ G'_y & G'_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 6y^2 & 3x^2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{18y^2z^2 - 5} = -\frac{(6y^2 + 3x^2)}{18y^2z^2 - 5} = \frac{-6y^2 - 3x^2}{18y^2z^2 - 5}$$

Planteamos otra situación: Las dos ecuaciones $F(x,y,u,v) = 0 \wedge G(x,y,u,v) = 0$ pueden definir implícitamente dos funciones de dos variables independientes.

$u = h(x,y)$ y $v = m(x,y)$

Podemos hallar las derivadas parciales de u y v, mediante las derivadas parciales de las funciones implícitas, F y G.

Diferenciando F y G, obtenemos:

$$\begin{cases} dF = F'_x dx + F'_y dy + F'_u du + F'_v dv = 0 \\ dG = G'_x dx + G'_y dy + G'_u du + G'_v dv = 0 \end{cases}$$

Despejando:

$$\Rightarrow \begin{cases} F'_u du + F'_v dv = -F'_x dx - F'_y dy \\ G'_u du + G'_v dv = -G'_x dx - G'_y dy \end{cases}$$

El Jacobiano del sistema: $\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix} \neq 0$

"El Jacobiano, está formado por las derivadas parciales de la función implícita con respecto a las variables dependientes."

Luego, aplicando Cramer:

$$du = \frac{\begin{vmatrix} -F'_x dx - F'_y dy & F'_v \\ -G'_x dx - G'_y dy & G'_v \end{vmatrix}}{J} = -\frac{\begin{vmatrix} F'_x & F'_v \\ G'_x & G'_v \end{vmatrix}}{J} dx - \frac{\begin{vmatrix} F'_y & F'_v \\ G'_y & G'_v \end{vmatrix}}{J} dy$$

↓

Por propiedad de los determinantes

En síntesis: $du = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} dx - \frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} dy$

como: $u = H(x,y)$ entonces $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$

Comparando los términos de du:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} \qquad \wedge \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}}$$

Del mismo modo si buscamos dv:

$$dv = \frac{\begin{vmatrix} F'_u & -F'_x dx - F'_y dy \\ G'_u & -G'_x dx - G'_y dy \end{vmatrix}}{J} = -\frac{\begin{vmatrix} F'_u & F'_x \\ G'_u & G'_x \end{vmatrix}}{J} dx - \frac{\begin{vmatrix} F'_u & F'_y \\ G'_u & G'_y \end{vmatrix}}{J} dy$$

$$\Rightarrow dv = \frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} \cdot dx - \frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} \cdot dy$$

como $v = m(x;y)$ entonces $dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$

Comparando los términos de dv:

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}}$$